MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

CONSTANTIN UDRIȘTE
CONSTANTIN RADU
CONSTANTINA DICU
ODETTA MĂLĂNCIOIU

ALGEBRĂ, GEOMETRIE ȘI ECUAȚII DIFERENȚIALE

COORDONATOR: CONF. DR. CONSTANTIN UDRIȘTE

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ — BUCUREȘTI

Manuscrisul lucrării a fost analizat și aprobat de colectivul catedrei Matematici I, de Consiliul profesoral al Facultății de transporturi și de Biroul Senatului Institutului politehnic București.

Redactor : *DRĂGHIA ELEONORA*
Tehnoredactor : *PROSAN ILINCA*

PREFAȚĂ

Această carte se adresează studenților de la institutele de învățămînt superior tehnic și cadrelor didactice de specialitate. De asemenea ea mai poate fi folosită și de către studenții și cadrele didactice de la alte forme de învățămînt superior, materialul conținînd algebră liniară, geometrie analitică, geometrie diferențială și ecuații diferențiale.

Algebra liniară *este expusă în cinci capitole (Recapitulare — matrice și determinanți, Spații vectoriale, Transformări liniare, Valori și vectori proprii, Forme biliniare și pătratice). Prin acestea se ating problemele de bază ale teoriei elementare a spațiilor vectoriale, care au aplicații relativ imediate în disciplinele ce se predau viitorilor ingineri. Punctul de vedere acceptat în prezentarea noțiunilor decurge din experiența căpătată de autori în orele de curs și seminar și reflectă opinia materialelor bibliografice de referință, inclusiv a cursului de Analiză matemamatică care se predă în paralel. Informația este prelucrată corespunzător nivelului anului întîi de facultate.*

Geometria analitică în $\mathbf{E}_3$ *cuprinde șase capitole (Vectori liberi, Dreapta și planul în spațiu, Schimbări de repere carteziene, Conice, Cuadrice, Coordonate polare și semipolare). Prin conținutul acestor capitole se acoperă necesarul de noțiuni de geometrie analitică pentru viitorii ingineri, iar varianta de prezentare pune în evidență că vectorii liberi constituie un bun model-instrument atît pentru partea de geometrie cît și pentru mecanică, fizică etc. Conicele și cuadricele sînt privite ca mulțimi de nivel constant, fapt familiar celorlalți specialiști care concură la formarea inginerilor. Reducerea la forma canonică a ecuației unei conice sau cuadrice este expusă atît cu ajutorul roto-translațiilor cît și cu metoda valorilor și a vectorilor proprii procurată de teoria formelor pătratice.*

Geometria diferențială *este prezentată în patru capitole (Noțiuni introductive, Curbe, Suprafețe, Algebră și analiză tensorială). Pentru o cît mai mare apropiere de Analiza matematică*

conceptele sînt expuse direct pe $\mathbb{R}^n$, *modelul standard de spațiu euclidian (în special cazul* $n = 3$*). De asemenea se scoate în evidență că geometria diferențială elementară modernă folosește cu precădere conceptele de vector legat și cel de cîmp vectorial, instrumente de lucru accesibile la nivelul anului întîi de facultate. Avîndu-se în vedere formația unui viitor inginer, în primele trei capitole se insistă cu precădere pe introducerea riguroasă a noțiunilor, pe aspectele locale și globale ale teoriei curbelor și suprafețelor, pe elementele intrinseci ale unei curbe sau unei suprafețe și pe formule de calcul. În capitolul al patrulea se expun elementele de bază, introductive, ale algebrei și analizei tensoriale, într-o variantă care garantează generalitatea și aplicabilitatea conceptelor.*

Ecuațiile diferențiale *sînt expuse în cinci capitole (Ecuații diferențiale de ordinul întîi, Probleme și metode de rezolvare, Ecuații diferențiale liniare, Sisteme diferențiale liniare de ordinul întîi, Linii și hipersuprafețe de cîmp). Modelul de prezentare este relativ propriu, coerent cu restul lucrării. Se insistă atît pe introducerea riguroasă a conceptelor cît și pe metodologia de calcul, toate prezentate pe fondul de liniaritate specific cazurilor mai frecvente și mai bine cunoscute.*

În toată lucrarea exemplele și problemele care însoțesc textul de bază asigură o bună funcționalitate și garantează aprofundarea noțiunilor. Unele dintre acestea au conținut pur matematic, altele sînt împrumutate din disciplinele aplicate. Terminologia și notațiile au fost selectate cu grijă pentru a se ocoli dificultățile de înțelegere ce țin mai mult de formă decît de conținut.

Sîntem îndatorați autorilor citați în bibliografie, profesorilor, colegilor, studenților și familiilor noastre care ne-au influențat modul de a gîndi și ne-au ajutat la realizarea acestei lucrări.

martie 1982 **Autorii**

CUPRINS

1. ALGEBRĂ LINIARĂ

Cap. 1. Recapitulare: matrice şi determinanţi 11

Cap. 2. Spaţii vectoriale 15

1. Grupuri 15
2. Spaţii vectoriale 17
3. Subspaţii vectoriale 20
4. Dependenţă şi independenţă liniară 22
5. Bază şi dimensiune 23
6. Spaţii vectoriale euclidiene 27
7. Ortogonalitate 30
8. Procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt 32
9. Spaţii punctuale euclidiene 34
10. Probleme 36

Cap. 3. Transformări liniare 38

1. Proprietăţi generale 38
2. Nucleu şi imagine 40
3. Matricea unei transformări liniare 43
4. Endomorfisme particulare 45
5. Transformări liniare pe spaţii euclidiene 48
6. Izometrii 50
7. Probleme 52

Cap. 4. Valori şi vectori proprii 54

1. Valori şi vectori proprii 54
2. Polinom caracteristic 55
3. Forma diagonală 59
4. Forma Jordan 62
5. Spectrul endomorfismelor pe spaţii euclidiene 67
6. Polinoame de matrice. Funcţii de matrice 70
7. Probleme 73

Cap. 5. Forme biliniare şi pătratice 76

1. Forme biliniare 76
2. Forme pătratice 78
3. Reducerea formelor pătratice la expresia canonică 80
4. Signatura unei forme pătratice reale 85
5. Probleme 87

2. GEOMETRIE ANALITICĂ ÎN $\mathbb{E}_3$

Cap. 1. Vectori liberi 89

1. Vectori liberi 89
2. Adunarea 92
3. Înmulţirea cu un scalar 93
4. Coliniaritate şi coplanaritate 94
5. Proiecţie ortogonală 96
6. Produs scalar 97
7. Produs vectorial 99
8. Produs mixt 101
9. Probleme 102

Cap. 2. Dreapta şi planul în spaţiu 103

1. Reper cartezian 103
2. Dreapta în spaţiu 104
3. Planul în spaţiu 107
4. Probleme asupra dreptei şi planului 113
5. Probleme 115

Cap. 3. Schimbări de repere carteziene 116

1. Translaţia 116
2. Rotaţia 117
3. Probleme 119

Cap. 4. Conice 120

1. Noţiuni generale 120
2. Centrul unei conice 121
3. Reducerea la forma canonică 123
4. Intersecţia dintre o dreaptă şi o conică 128
5. Pol şi polară 130
6. Diametru conjugat cu o direcţie dată 131
7. Direcţii principale. Axele unei conice 133
8. Probleme 134

Cap. 5. Cuadrice 135

1. Sfera 135
2. Elipsoid, hiperboloid, paraboloid 137
3. Cuadrice 142
4. Reducerea la forma canonică 144
5. Intersecţia dintre o dreaptă şi o cuadrică 147
6. Intersecţia dintre un plan şi o cuadrică 148
7. Probleme 148

Cap. 6. Coordonate polare şi semipolare 149

1. Coordonate polare 149
2. Coordonate cilindrice 150
3. Coordonate sferice 151

3. GEOMETRIE DIFERENŢIALĂ

Cap. 1. Noţiuni introductive 152

1. Funcţii diferenţiabile 152
2. Vectori tangenţi. Cîmpuri vectoriale 154
3. Derivata covariantă 158
4. Probleme 161

Cap. 2. Curbe 161

Curbe în $\mathbb{R}^n$ 161

1. Definiţii şi exemple 161
2. Tangenta 164
3. Cîmpuri vectoriale pe o curbă 168
4. Ramuri infinite 170
5. Reprezentarea normală a unei curbe 173
6. Contactul a două curbe 175

Curbe în $\mathbb{R}^2$ 176

7. Tangenta şi normala 176
8. Curbe definite prin ecuaţii carteziene implicite 177
9. Forma unei curbe în vecinătatea unui punct al său 179
10. Trasarea curbelor plane 183
11. Formule Frenet şi elemente de teoria contactului 186
12. Curbe plane în coordonate polare 191

Curbe în $\mathbb{R}^3$ 192

13. Tangenta şi planul normal 192
14. Curbe definite prin ecuaţii carteziene implicite 193
15. Formule Frenet pentru curbe cu viteza unu 196
16. Formule Frenet pentru curbe cu viteza arbitrară 199
17. Aplicaţii ale formulelor Frenet 201
18. Probleme 205

Cap. 3. Suprafeţe 209

1. Noţiunea de suprafaţă 209
2. Curbe coordonate 213
3. Suprafeţe riglate 215
4. Suprafeţe de rotaţie 218
5. Calcul diferenţial pe suprafeţe 219
6. Cîmpuri normale pe suprafeţe 222
7. Proprietăţi topologice ale suprafeţelor 224
8. Aplicaţia Weingarten 229
9. Curbura normală 232
10. Curbura Gauss 237
11. Formele fundamentale ale unei suprafeţe 241

12. Formule de calcul 243
13. Curbe speciale pe o suprafaţă 246
14. Aria unei porţiuni de suprafaţă 248
15. Subvarietăţi ale lui $\mathbb{R}^n$ 250
16. Probleme 252

Cap. 4. Algebră şi analiză tensorială 256

1. Tensori 256
2. Cîmpuri tensoriale 260
3. Conexiune liniară 266
4. Metrici riemanniene 268
5. Operatori diferenţiali 270
6. Forme alternate 272
7. Forme diferenţiale alternate 274
8. Probleme 276

4. ECUAŢII DIFERENŢIALE

Notaţii şi terminologie 277

Cap. 1. Ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi 278

1. Ecuaţia diferenţială cu variabile separate 279
2. Ecuaţia diferenţială omogenă 280
3. Ecuaţia diferenţială liniară 281
4. Ecuaţia Bernoulli 283
5. Ecuaţia Riccati 283
6. Ecuaţii diferenţiale exacte 284
7. Ecuaţia Clairaut 287
8. Ecuaţia Lagrange 287
9. Probleme 288

Cap. 2. Probleme şi metode de rezolvare 289

1. Aflarea soluţiilor prin metode analitice 289
2. Probleme Cauchy 289
3. Metoda Euler 291
4. Metoda Runge-Kutta 295
5. Stabilitatea soluţiilor 298
6. Probleme la limită 299
7. Probleme 301

Cap. 3. Ecuaţii diferenţiale liniare 302

1. Generalităţi 302
2. Spaţiul vectorial al soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale liniare omogene . 303
3. Metoda variaţiei constantelor 305
4. Metoda seriilor de puteri 306
5. Ecuaţii diferenţiale liniare omogene cu coeficienţi constanţi 308
6. Cvasipolinoame 309
7. Ecuaţii Euler 312
8. Probleme 313

Cap. 4. Sisteme diferenţiale liniare de ordinul întîi 315

1. Generalităţi 315
2. Spaţiul vectorial al soluţiilor unui sistem diferenţial liniar omogen . . 315
3. Metoda variaţiei constantelor 317
4. Matricea exponenţială 319
5. Sisteme diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi 322
6. Probleme 326

Cap. 5. Linii şi hipersuprafeţe de cîmp 328

1. Linii de cîmp şi sisteme simetrice 328
2. Stabilitatea poziţiilor de echilibru 334
3. Hipersuprafeţe de cîmp şi ecuaţii liniare cu derivate parţiale 335
4. Metoda reţelei de integrare a ecuaţiilor cu derivate parţiale 338
5. Hipersuprafeţe ortogonale liniilor de cîmp şi ecuaţii Pfaff 340
6. Probleme 344

Bibliografie 347

1

ALGEBRĂ LINIARĂ

Capitolul 1

RECAPITULARE: MATRICE ȘI DETERMINANȚI

1.1. Fie $I_{m,n} = \{(i, j) \mid i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n\}$. Orice funcție A definită pe $I_{m,n}$ și cu valori într-un inel se numește *matrice* de tip $m \times n$. Valorile $A(i, j) = a_{ij}$ se numesc *elementele matricei* și tradițional ele sînt dispuse într-un tabel dreptunghiular cu m linii și n coloane

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

O matrice de tipul $m \times n$ se mai numește și *matrice dreptunghiulară* și prescurtat se notează prin $A = [a_{ij}]$.

O matrice de tipul $m \times 1$ se numește matrice (*vector*) *coloană*, iar o matrice de tipul $1 \times n$ se numește matrice (*vector*) *linie*. Dacă $m = n$, atunci matricea A se numește *pătratică*, iar n se numește *ordinul matricei*.

1.2. Matricea care se obține din A prin schimbarea liniilor în coloane (sau a coloanelor în linii) se numește *transpusa* lui A și se notează cu ${}^tA$.

1.3. Fie $\mathbb{K}$ unul dintre cîmpurile $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$, iar $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ mulțimea matricelor de tipul $m \times n$ cu elemente din $\mathbb{K}$. Adunarea matricelor și respectiv înmulțirea cu scalari se definesc ca la funcții; dacă $A = [a_{ij}]$ și $B = [b_{ij}]$ aparțin lui $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, atunci $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$ și respectiv $kA = [ka_{ij}]$, $k \in \mathbb{K}$.

Adunarea matricelor are proprietățile

$$A + B = B + A,$$

$$(A + B) + C = A + (B + C),$$

$$A + O = A,$$

$$A + (-A) = O,$$

unde O este *matricea zero*, iar $-A$ este *opusa* lui A.

Precizare. În cele ce urmează matricele au elemente din $\mathbb{K}$.

1.4. Dacă $A = [a_{ij}]$ este o matrice de tipul $m \times n$, iar $B = [b_{jk}]$ este o matrice de tipul $n \times p$, atunci prin *produsul* celor două matrice se înțelege matricea

$$AB = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk}\right]$$

de tipul $m \times p$. Înmulțirea matricelor are proprietățile

$$(AB)C = A(BC),$$

$$A(B + C) = AB + AC,$$

$$(B + C)D = BD + CD.$$

Matricele X și Y cu proprietatea $XY = YX$ vor fi numite *comutabile*.
Produsul dintre un scalar și o matrice are proprietățile :

$$1A = A,$$

$$(kl)A = k(lA),$$

$$(k + l)A = kA + lA,$$

$$k(A + B) = kA + kB.$$

1.5. O matrice pătratică A pentru care $A = {}^tA (A = -{}^tA)$ se numește *simetrică* (*antisimetrică*). Orice matrice pătratică poate fi scrisă în mod unic ca suma dintre o matrice simetrică și o matrice antisimetrică.

1.6. O matrice pătratică $A = [a_{ij}]$ care are proprietățile $a_{ij} = 0$, $i \neq j$ și $\exists\, l$ așa ca $a_{ll} \neq 0$ se numește *matrice diagonală*. O matrice diagonală în care $a_{ll} = 1$, $l = 1, 2, \ldots, n$, se numește matrice unitate și se notează cu I. Avem $IA = AI = A$.

1.7. O matrice pătratică care satisface condiția ${}^tAA = I$ se numește matrice ortogonală.

1.8. Dacă A este o matrice pătratică, atunci puterile naturale ale lui A se definesc inductiv :

$$A^\circ = I, \; A^n = AA^{n-1} \text{ pentru } n = 1, 2, \ldots$$

1.9. Fie mulțimea $J_n = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$. O aplicație bijectivă $\sigma : J_n \to J_n$ se numește *permutare* a mulțimii J_n și se notează prin

$$\sigma = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \ldots \alpha_n \\ \sigma(\alpha_1) & \sigma(\alpha_2) \ldots \sigma(\alpha_n) \end{pmatrix}$$

Signatura unei permutări σ se definește prin

$$\varepsilon_\sigma = \begin{cases} +1, \text{ dacă } \sigma \text{ este o permutare pară} \\ -1, \text{ dacă } \sigma \text{ este o permutare impară.} \end{cases}$$

1.10. *Simbolul lui Kronecker*,

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1, \text{ dacă } i = j \\ 0, \text{ dacă } i \neq j. \end{cases}$$

1.11. Presupunem că indicii $i_1, i_2, \ldots, i_n$ și $j_1, j_2, \ldots, j_n$ iau valori din mulțimea $\{1, 2, \ldots, m\}$, unde $m \geqslant n$. Definim *simbolul lui Kronecker generalizat* :

$$\delta^{i_1, i_2 \ldots i_n}_{j_1, j_2 \ldots j_n} = \begin{cases} 0, & \text{dacă întregii } (i_1, i_2, \ldots, i_n) \text{ sau } (j_1, j_2, \ldots, j_n) \text{ nu sînt distincți,} \\ 0, & \text{dacă întregii } (i_1, i_2, \ldots, i_n) \text{ și } (j_1, j_2, \ldots, j_n) \text{ sînt distincți dar mulțimile} \\ & \{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \text{ și } \{j_1, j_2, \ldots, j_n\} \text{ nu sînt egale} \\ \varepsilon_\sigma, & \text{dacă întregii } (i_1, i_2, \ldots, i_n) \text{ și } (j_1, j_2, \ldots, j_n) \text{ sînt distincți, iar mulțimile} \\ & \{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \text{ și } \{j_1, j_2, \ldots, j_n\} \text{ sînt egale, unde} \\ & \sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \ldots i_n \\ j_1 & j_2 \ldots j_n \end{pmatrix} \end{cases}$$

1.12. Cu ajutorul simbolului lui Kronecker generalizat se definește simbolul ε:

$$\varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_n} = \delta^{i_1 i_2 \ldots i_n}_{1\ 2 \ldots n}, \quad \varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} = \delta^{1\ 2 \ldots n}_{j_1 j_2 \ldots j_n},$$

și se constată că

$$\varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_n} \varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} = \delta^{i_1 i_2 \ldots i_n}_{j_1 j_2 \ldots j_n}.$$

1.13. Fie $A = [a_{ij}]$ o matrice pătratică cu elemente din cîmpul $\mathbb{K}$ (numere reale sau complexe). Elementul din $\mathbb{K}$ definit prin

$$\det A = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n = 1}^{n} \varepsilon^{j_1 j_2 \ldots j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$$

se numește *determinantul matricei* A și tradițional se notează prin $|a_{ij}|$ sau

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Vectorii $[a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, poartă numele de liniile *determinantului*, iar vectorii ${}^t[a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}]$ $j = 1, 2, \ldots, n$ poartă numele de *coloanele determinantului*.

Numărul n se numește *ordinul determinantului*.

1.14. Dacă A este o matrice pătratică și ${}^tA$ este transpusa sa, atunci $\det A = \det {}^tA$. De aceea orice proprietate referitoare la liniile unui determinant este adevărată și pentru coloane.

1.15. (1) Dacă elementele unei linii (coloane) sînt respectiv sume de cîte doi termeni, atunci determinantul se descompune într-o sumă de doi determinanți.

(2) Dacă elementele unei linii (coloane) se multiplică cu $t \in \mathbb{K}$, atunci determinantul se multiplică cu t. În general $\det (tA) = t^n \det A$, unde n este ordinul lui A și $t \in \mathbb{K}$.

(3) Dacă într-un determinant se schimbă două linii (coloane) între ele, atunci se schimbă și semnul determinantului.

Consecințe: (i) Un determinant este nul dacă: are două linii (coloane) egale sau are două linii (coloane) proporționale sau una din linii (coloane) este o combinație liniară de alte linii (coloane). (ii) Valoarea unui determinant nu se schimbă dacă : schimbăm liniile în coloane de același ordin sau la elementele unei linii (coloane) adăugăm combinații liniare formate cu elementele din celelalte linii (coloane).

1.16. (*Dezvoltările lui Laplace*). Fie determinantul $|a_{ij}|$ de ordinul n atașat matricei $A = [a_{ij}]$.

Determinantul de ordinul $n - 1$ care se obține suprimînd linia i și coloana j din $|a_{ij}|$ se numește *minorul elementului* a_{ij} și se notează cu minor a_{ij}. Numărul cof $a_{ij} = (-1)^{i+j}$ minor a_{ij} se numește *complementul algebric sau cofactorul elementului* a_{ij}.

Avem

$$\sum_{l=1}^{n} a_{pl} \operatorname{cof} a_{ql} = \delta_{pq} \det A, \quad \sum_{k=1}^{n} a_{kp} \operatorname{cof} a_{kq} = \delta_{pq} \det A.$$

1.17. Matricele pătratice A pentru care $\det A \neq 0$ ($\det A = 0$) se numesc *nesingulare* (*singulare*).

1.18. Fie A o matrice pătratică. Matricea A^{-1} care satisface condițiile $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ se numește *inversa* lui A.

O matrice pătratică A posedă o inversă dacă și numai dacă det $A \neq 0$. Această inversă se poate determina astfel: se calculează det $A \neq 0$; se face transpusa, ${}^tA$, și reciproca A^+ (= matricea ale cărei elemente sînt cofactorii elementelor lui ${}^tA$); $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^+$.

Inversa unei matrice are proprietățile:

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1}),\ (A^{-1})^{-1} = A,$$

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}, \text{ unde } k \in \mathbb{K} - \{0\},$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Cu ajutorul inversei se definesc puterile întregi, negative, ale unei matrice nesingulare:

$$A^{-n} = (A^{-1})^n,\ n = 1, 2, \ldots$$

1.19. Fie $A = [a_{ij}]$ o matrice de tipul $m \times n$ și p un număr natural $\leqslant \min\{m, n\}$. Prin suprimarea în matricea A a $(m - p)$ linii și $(n - p)$ coloane, se obține o matrice pătratică de ordinul p al cărui determinant se numește minor de ordinul p al matricei A.

Dacă A posedă un minor nenul de ordinul p, iar toți minorii de ordinul $p + 1$ sînt nuli sau nu există, atunci numărul p se numește *rangul* lui A. Rezultă:

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} {}^tA,$$

$$\operatorname{rang} AB \leqslant \min(\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B),$$

iar dacă B este o matrice pătratică nesingulară, atunci

$$\operatorname{rang} AB = \operatorname{rang} BA = \operatorname{rang} A.$$

1.20. Fie $A = [a_{ij}]$ o matrice de tipul $m \times n$. Următoarele operații se numesc *transformări elementare*.

(1) Schimbarea a două linii (coloane) între ele.

(2) Înmulțirea elementelor unei linii (coloane) cu un număr nenul.

(3) Adunarea la elementele unei linii (coloane) a elementelor corespondente din altă linie (coloană) înmulțite cu același număr nenul.

Matricele obținute din A prin transformări elementare au același rang ca și matricea A. Mai mult, în cazul în care A este o matrice pătratică nesingulară, inversa A^{-1} poate fi obținută cu ajutorul transformărilor elementare.

1.21. Fie $A = [a_{ij}]$ o matrice de numere reale sau complexe, de tipul $m \times n$, și $b_1, b_2, \ldots, b_m$ niște numere reale sau complexe date. O mulțime de ecuații de forma

$$(*) \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

se numește *sistem de m ecuații liniare cu n necunoscute* x_j. Printr-o *soluție* a sistemului se înțelege orice n-uplu $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ care verifică toate ecuațiile sistemului. Matricea A se numește *matricea coeficienților sistemului*.

Fie $B = {}^t[b_1, b_2, \ldots, b_n]$ și $X = {}^t[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Sistemul $(*)$ este echivalent cu ecuația matricială $(**)$ $AX = B$. Matricea $[A \mid B]$ se numește *matricea extinsă* a sistemului.

1.22. Sistemul $(*)$ este compatibil dacă și numai dacă rang A = rang $[A \mid B]$.

Dacă A este o matrice pătratică nesingulară, atunci $(**)$ are soluția $X = A^{-1}B$.

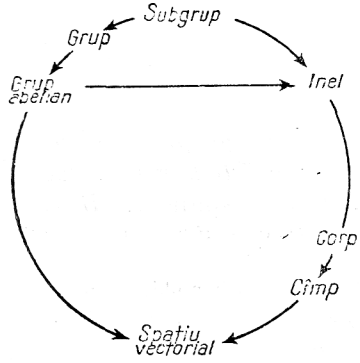
Capitolul 2

SPAȚII VECTORIALE

§ 1. Grupuri

Prin *structură algebrică* înțelegem o mulțime pe care s-au definit un număr finit de legi de compoziție și de relații împreună cu proprietățile lor. O lege de compoziție poate fi o operație binară, trinară, ..., *n*-ară.

Dependența structurilor algebrice cele mai des folosite este ilustrată schematic astfel



Înainte de a defini spațiul vectorial — structură algebrică ce ne propunem să o studiem în acest capitol — reamintim prin definiții și exemple noțiunile de grup și cîmp.

Fie G o mulțime nevidă. O funcție definită pe $G \times G$ și cu valori în G se numește *operație binară pe G*. O operație binară pe G se notează cu $*$, valoarea ei se notează cu $g_1 * g_2$ și se citește „g_1 compus cu g_2".

1.1. *Definiție. O mulțime G împreună cu o operație binară * pe G care satisface condițiile:*

(1) $\forall\, g_1, g_2, g_3 \in G,\ g_1*(g_2*g_3) = (g_1*g_2)*g_3,$

(2) $\exists\, e \in G,\ \forall\, g \in G,\ e*g = g*e = g,$

(3) $\forall\, g \in G,\ \exists\, g' \in G,\ g*g' = g'*g = e$

se numește grup.

Un grup se notează fie prin $(G, *)$, fie mai scurt prin G, caz în care operația binară se subînțelege din context.

Dacă $\forall g_1, g_2 \in G$, $g_1 * g_2 = g_2 * g_1$, atunci grupul G se numeşte *comutativ* (*abelian*).

Elementul e care satisface (2) se dovedeşte a fi unic şi se numeşte *element neutru*; elementul g' care satisface (3) se dovedeşte a fi unic determinat de g şi se numeşte *simetricul* lui g.

Dacă $*$ este o „adunare", grupul *aditiv* se notează $(G, +)$; atunci e se notează cu 0 şi se numeşte *zero*, iar g' se notează cu $-g$ şi se numeşte *opusul* lui g. Diferenţa $g_1 - g_2$ se defineşte ca fiind suma $g_1 + (-g_2)$.

Dacă $*$ este o „înmulţire", grupul *multiplicativ* se notează $(G, \cdot)$; atunci e se notează cu 1 şi se numeşte *unitate*, iar g' se notează cu g^{-1} şi se numeşte *inversul* lui g.

Exemple. Concretizînd mulţimea G şi specificînd operaţia binară obţinem grupuri particulare. Astfel pentru următoarele exemple se pot verifica uşor axiomele de grup

1) $(\mathbb{R}, +)$;

2) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$;

3) $(G, *)$, unde G est e mulţimea matricelor

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$ iar $*$ înmulţirea matricelor;

4) mulţimea bijecţiilor definite pe A şi cu valori în A formează un grup în raport cu compunerea funcţiilor.

1.2. *Definiţie. Fie $(G, *)$ un grup. O submulţime nevidă H a lui G se numeşte subgrup al lui G dacă $\forall g_1, g_2 \in H$, $g_1 * g_2' \in H$.*

Interpretînd definiţia putem spune că H este un subgrup al grupului $G, *)$ dacă şi numai dacă H este grup în raport cu $*$.

Exemplu. Fie $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ şi $*$ înmulţirea obişnuită. Se verifică uşor că (1) numerele raţionale formează un subgrup, (2) numerele reale pozitive formează un subgrup, (3) numerele iraţionale nu formează un subgrup.

1.3. *Definiţie. Fie $(G_1, *)$ şi $(G_2, \circ)$ două grupuri. O funcţie $\varphi : G_1 \to G_2$ care satisface $\varphi(g_1 * g_2) = \varphi(g_1) \circ \varphi(g_2)$, $\forall g_1, g_2 \in G_1$ se numeşte homomorfism. Un homomorfism bijectiv se numeşte izomorfism.*

De cele mai multe ori grupurile izomorfe se identifică.

Dacă $G_1 = G_2$ şi $* \equiv \circ$, atunci în loc de homomorfism spunem *endomorfism*, iar în loc de izomorfism spunem *automorfism*.

Exemplu. Grupul Cayley (grup finit cu şase elemente)

	E	A	B	C	D	F
E	E	A	B	C	D	F
A	A	E	D	F	B	C
B	B	F	E	D	C	A
C	C	D	F	E	A	B
D	D	C	A	B	F	E
F	F	B	C	A	E	D

este izomorf cu grupul permutărilor a trei obiecte (grupul simetric S_3),

$$E \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad D \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad F \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

și cu grupul următoarelor matrice

$$E \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A \to \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B \to \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$C \to \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad D \to \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad F \to \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(operația binară este înmulțirea matricelor). Pe de altă parte există un homomorfism de la grupul Cayley la grupul $(\{-1, 1\}, \cdot)$ și anume

$$\begin{array}{cccccc} E & A & B & C & D & F \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}$$

Compunînd acest homomorfism cu izomorfismul dintre S_3 și grupul Cayley se obține homomorfismul care asociază fiecărei permutări signatura sa.

1.4. *Definiție. O mulțime* $\mathbb{K}$ *împreună cu două aplicații ale lui* $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ *în* $\mathbb{K}$, *numite respectiv adunare și înmulțire, care satisfac condițiile:*

(1) *adunarea determină pe* $\mathbb{K}$ *o structură de grup comutativ,*

(2) *înmulțirea determină pe* $\mathbb{K} - \{0\}$ *o structură de grup,*

(3) *înmulțirea este distributivă față de adunare, se numește corp.* Un corp pentru care și înmulțirea este comutativă se numește *cîmp* (*corp comutativ*).

Un cîmp se notează $(\mathbb{K}; +, .)$ sau mai simplu $\mathbb{K}$.

Exemplu. Tripletele $(\mathbb{Q}; +, .)$, $(\mathbb{R}; +, .)$, $(\mathbb{C}; +, .)$ sînt cîmpuri; operațiile de adunare și înmulțire sînt cele obișnuite.

Precizare. În cele ce urmează vom folosi în special cîmpul numerelor reale $\mathbb{R}$ și cîmpul numerelor complexe $\mathbb{C}$.

§ 2. Spații vectoriale

Spațiul vectorial este una dintre cele mai importante structuri matematice care servește și disciplinelor aplicate.

Această structură constă dintr-un grup aditiv comutativ V, un cîmp $\mathbb{K}$ și o „înmulțire" definită pe $\mathbb{K} \times V$ cu valori în V care satisface patru axiome.

Notațiile pentru elementele lui V, respectiv $\mathbb{K}$, vor fi potrivite contextului.

2.1. *Definiție. Mulțimea V se numește spațiu vectorial peste cîmpul $\mathbb{K}$ dacă admite*

(1) *o structură de grup comutativ, notată aditiv,*

$$(v, w) \to v + w;$$

(2) *o funcție $f: \mathbb{K} \times V \to V$, $f(k, v) = kv$, astfel încît $\forall\, k, l \in \mathbb{K}$, $\forall\, v, w \in V$ să avem:*

$$1v = v,$$
$$k(lv) = (kl)v,$$
$$(k + l)v = kv + lv,$$
$$k(v + w) = kv + kw.$$

Un spațiu vectorial se notează fie prin tripletul $(V, \mathbb{K}, f)$, fie pe scurt prin V. Elementele lui V se numesc *vectori*, elementele lui $\mathbb{K}$ se numesc *scalari*, iar aplicația f se numește *înmulțirea cu scalari*.

Un spațiu vectorial peste cîmpul numerelor reale $\mathbb{R}$ se numește *spațiu vectorial real*. Un spațiu vectorial peste cîmpul numerelor complexe $\mathbb{C}$ se numește *spațiu vectorial complex*. Acestea sînt cele două situații întîlnite mai frecvent în disciplinele aplicate, motiv pentru care noi ne vom referi numai la ele. De aceea ori de cîte ori scriem simplu „spațiu vectorial" subînțelegem că el poate fi real sau complex.

Să prezentăm acum cîteva consecințe directe ale definiției spațiului vectorial, consecințe care constituie punctele de sprijin ale tehnicii calculatorii elementare.

2.2. Teoremă. Dacă V este un spațiu vectorial peste cîmpul $\mathbb{K}$, atunci $\forall\, v \in V$ și $\forall\, k \in \mathbb{K}$ au loc următoarele proprietăți:

(i) $0v = 0$,

(ii) $k0 = 0$,

(iii) $(-1)v = -v$.

Demonstrație. (i) Avem $v + 0v =$ (ținem seama de axioma $(2)_1$), $1v + 0v =$ (vezi axioma $(2)_3$), $(1 + 0)v =$ ($\mathbb{K}$ este un grup aditiv), $1v =$ (axioma $(2)_1$), v. Deoarece V este un grup, elementul neutru este unic și deci relația $v + 0v = v$ implică $0v = 0$.

(ii) și (iii) se demonstrează analog.

Pornind de la consecințele anterioare se pot justifica și relațiile:

$$-(kv) = (-k)v = k(-v),$$

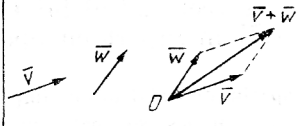
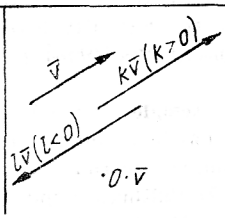
$$(k - l)v = kv + (-l)v = kv + (-lv) = kv - lv,$$

$$k(v - w) = k[v + (-1)w] = kv + (-k)w = kv + (-kw) = kv - kw,$$

$\forall\, k, l \in \mathbb{K}$ și $\forall\, v, w \in V$. Drept urmare, adunarea și scăderea elementelor din V, precum și înmulțirea cu scalari au formal proprietățile transformărilor echivalente de la expresiile algebrice elementare.

Alcătuim tabelul 1 pentru a exemplifica spații vectoriale mai des întîlnite. Precizăm mulțimile V și $\mathbb{K}$, adunarea din V și înmulțirea cu scalari, iar verificarea axiomelor o lăsăm pe seama cititorului.

Tabelul 1

Mulțimea V	Cîmpul $\mathbb{K}$	Adunarea din V	Înmulțirea cu scalari
$\mathbb{K}$	$\mathbb{K}$	Adunarea din $\mathbb{K} = V$	Înmulțirea în $\mathbb{K}$
$\mathbb{C}$ mulțimea numerelor complexe	$\mathbb{R}$ mulțimea numerelor reale	Adunarea din $\mathbb{C}$	Înmulțirea dintre un număr real și un număr complex
$\mathbb{K}^n = \underbrace{\mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}}_{n \text{ factori}}$	$\mathbb{K}$	$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ $x = y \Longleftrightarrow x_i = y_i$ $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$ $O = (0, 0, \cdots, 0)$ originea lui $\mathbb{K}^n$	$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $kx = (kx_1, kx_2, \cdots, kx_n)$
Denumire : spațiul vectorial aritmetic cu n dimensiuni			
V_3	$\mathbb{R}$	 $\bar{v} = \bar{w} \Longleftrightarrow$ au aceeași direcție, sens, lungime	
Denumire : spațiul vectorial al vectorilor liberi			
$\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ mulțimea matricelor de tipul $m \times n$ cu elemente din cîmpul $\mathbb{K}$	$\mathbb{K}$	Adunarea matricelor	Înmulțirea dintre un scalar și o matrice
Denumire : spațiul vectorial al matricelor de tipul $m \times n$			
Mulțimea soluțiilor unui sistem liniar omogen de m ecuații cu n necunoscute, cu coeficienți din $\mathbb{K}$	$\mathbb{K}$	Adunarea din $\mathbb{K}^n$, n = numărul necunoscutelor	$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $kx = (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n)$
Denumire : spațiul vectorial al soluțiilor sistemului $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0;\ i = 1, 2, \cdots, m$			
$F = \{f \mid f : S \to W\}$ S = mulțime nevidă W = spațiu vectorial peste cîmpul $\mathbb{K}$	$\mathbb{K}$	Adunarea funcțiilor	Înmulțirea unei funcții cu un scalar
Denumire : spațiul vectorial de funcții			
Mulțimea soluțiilor unei ecuații diferențiale ordinare, liniară și omogenă	$\mathbb{R}$	Adunarea funcțiilor	Înmulțirea unei funcții cu un scalar

§ 3. Subspații vectoriale

Fie V un spațiu vectorial peste cîmpul $\mathbb{K}$.

3.1. *Definiție. O submulțime nevidă W a lui V se numește subspațiu vectorial al lui V dacă*

(1) $\forall u, v \in W,\ u + v \in W$

(2) $\forall k \in \mathbb{K},\ \forall u \in W,\ ku \in W.$

Aceste condiții pot fi înlocuite prin condiția echivalentă

$$\forall u, v \in W,\ \forall k, l \in \mathbb{K},\ ku + lv \in W.$$

De asemenea, întrucît adunarea și înmulțirea cu scalari sînt restricții la W ale operațiilor de pe V, perechea $(W, \mathbb{K})$ satisface toate axiomele spațiului vectorial. Prin urmare putem da o definiție echivalentă, aceea că W este un subspațiu vectorial al lui V dacă și numai dacă W este un spațiu vectorial peste $\mathbb{K}$ în raport cu operațiile din V.

Exemple. 1) Fie V un spațiu vectorial peste cîmpul $\mathbb{K}$. Mulțimile $\{0\}$ și V sînt subspații vectoriale ale lui V. Acestea se numesc subspații *improprii*; oricare alt subspațiu al lui V se numește *propriu*.

2) Mulțimea n-uplurilor de forma $(0, x_2, \ldots, x_n)$ este un subspațiu vectorial al lui $\mathbb{K}^n$.

3) Mulțimea funcțiilor impare și mulțimea funcțiilor pare sînt respectiv subspații ale spațiului vectorial real al funcțiilor reale definite pe $(-a, a)$.

3.2. *Definiție. Fie V un spațiu vectorial peste cîmpul $\mathbb{K}$ și S o submulțime nevidă a sa. Un vector $v \in V$ de forma*

$$v = \sum_{i=1}^{p} k_i v_i, \text{ unde } v_i \in S,\ k_i \in \mathbb{K},$$

se numește combinație liniară finită de elemente din S.

3.3. Teoremă. Dacă S este o submulțime nevidă a lui V, atunci mulțimea tuturor combinațiilor liniare finite de elemente din S este un subspațiu vectorial al lui V.

Acest subspațiu se numește *subspațiul generat de submulțimea* S sau *acoperirea liniară a lui* S și se notează cu $L(S)$. Dacă S este mulțimea vidă, atunci prin definiție $L(S) = \{0\}$.

Demonstrație. Suma a două combinații liniare finite de elemente din S este o combinație liniară finită de elemente din S. Produsul dintre un scalar $k \in \mathbb{K}$ și o combinație liniară finită de elemente din S este o combinație liniară finită de elemente din S.

Evident diferite submulțimi de vectori din V pot să genereze același subspațiu. De exemplu mulțimile $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$, $\left\{1, \frac{t}{1!}, \frac{t^2}{2!}, \ldots, \frac{t^n}{n!}\right\}$, $\{1, (1-t), (1-t)^2, \ldots, (1-t)^n\}$ generează spațiul vectorial al funcțiilor polinomiale care au cel mult gradul n, iar mulțimile $\{1, t, t^2, \ldots, t^n, \ldots\}$,

$\left\{1, \frac{t}{1!}, \frac{t^2}{2!}, \ldots, \frac{t^n}{n!}, \ldots\right\}$, $\{1, (1-t), (1-t)^2, \ldots, (1-t)^n, \ldots\}$ generează spațiul vectorial al tuturor funcțiilor polinomiale.

3.4. Teoremă. Dacă W_1 și W_2 sînt două subspații ale spațiului vectorial V, atunci

(1) *mulțimea* $W_1 + W_2 = \{v = v_1 + v_2 | v_1 \in W_1, v_2 \in W_2\}$, numită *suma* dintre W_1 și W_2, este un subspațiu vectorial al lui V;

(2) intersecția $W_1 \cap W_2$ este un subspațiu vectorial al lui V;

(3) reuniunea $W_1 \cup W_2$ nu este un subspațiu vectorial al lui V.

Demonstrație. (1) Fie $u, v \in W_1 + W_2$, adică $u = u_1 + u_2$, $v = v_1 + v_2$, unde $u_1, v_1 \in W_1$ și $u_2, v_2 \in W_2$. Deoarece $u_1 + v_1 \in W_1$ și $u_2 + v_2 \in W_2$, rezultă că vectorul $u + v = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2)$ aparține lui $W_1 + W_2$. Fie $k \in \mathbb{K}$. Deoarece $ku_1 \in W_1$ și $ku_2 \in W_2$ rezultă că vectorul $ku = (ku_1) + (ku_2)$ aparține lui $W_1 + W_2$.

(2) Fie $u, v \in W_1 \cap W_2$. Rezultă $u, v \in W_1$ și $u, v \in W_2$. Dar W_1 și W_2 sînt subspații vectoriale. Deci $\forall k, l \in \mathbb{K}$, $ku + lv \in W_1$ și $ku + lv \in W_2$, adică $ku + lv \in W_1 \cap W_2$.

(3) Fie $v_1 \in W_1$ și $v_1 \notin W_2$, $v_2 \notin W_1$ și $v_2 \in W_2$. Rezultă $v_1 + v_2 \notin W_1$, $v_1 + v_2 \notin W_2$ și deci $v_1 + v_2 \notin W_1 \cup W_2$.

Exemplu. Fie subspațiile W și U generate respectiv de vectorii $w_1 = (1,5)$, $w_2 = (-2, -10)$, $w_3 = (3,15)$ și $u_1 = (-1, -4)$, $u_2 = (-1,2)$, $u_3 = (2,0)$. Să se construiască subspațiile $W + U$ și $W \cap U$.

Soluție. Subspațiul sumă $W + U$ este acoperirea liniară a vectorilor $w_1, w_2, w_3, u_1, u_2, u_3$, adică $v \in W + U$ este de forma

$$v = k_1w_1 + k_2w_2 + k_3w_3 + k_4u_1 + k_5u_2 + k_6u_3.$$

Subspațiul $W \cap U$ conține acei vectori pentru care

$$\alpha_1w_1 + \alpha_2w_2 + \alpha_3w_3 = \beta_1u_1 + \beta_2u_2 + \beta_3u_3.$$

Folosind operațiile cu vectori obținem sistemul

$$\alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = -\beta_1 - \beta_2 + 2\beta_3$$

$$5\alpha_1 - 10\,\alpha_2 + 15\,\alpha_3 = -4\,\beta_1 + 2\beta_2.$$

Întrucît rangul matricei sistemului este unu, conform teoremei lui Roché, compatibilitatea este asigurată de anularea determinantului caracteristic $\beta_1 + 7\beta_2 - 10\,\beta_3 = 0$. Obținem $\beta_1 = -7\lambda + 10\,\mu$, $\beta_2 = \lambda$, $\beta_3 = \mu$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Atunci $(-7\lambda + 10\,\mu)\,u_1 + \lambda u_2 + \mu u_3 = (6\lambda - 8\,\mu, 30\lambda - 40\,\mu) \in W \cap U$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

3.5. Teoremă. Fie W_1 și W_2 două subspații vectoriale și $v \in W_1 + W_2$. Descompunerea $v = v_1 + v_2$ este unică dacă și numai dacă $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Demonstrație. Fie $v = v_1 + v_2 = v_1' + v_2'$. Deoarece $v_1, v_1' \in W_1$ și $v_2, v_2' \in W_2$ vectorul $u = v_1 - v_1' = v_2' - v_2$ este conținut în $W_1 \cap W_2$. De aceea $W_1 \cap W_2 = \{0$ implică $v_1 = v_1'$, $v_2 = v_2'$, adică unicitatea descompunerii.

Reciproc, unicitatea implică $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, deoarece în caz contrar orice vector nenul $w \in W_1 \cap W_2$ ar avea cel puțin două descompuneri $w = w + 0 = 0 + w$.

3.6. *Definiție. Fie W_1 și W_2 două subspații vectoriale ale lui V. Dacă $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, atunci suma $W_1 + W_2$ se numește sumă directă și se notează cu $W_1 \oplus W_2$. Dacă în plus $W_1 \oplus W_2 = V$, atunci W_1 și W_2 se numesc subspații suplimentare.*

Exemplu. Subspațiul funcțiilor pare și respectiv impare sînt suplimentare în spațiul vectorial real al funcțiilor reale definite pe $(-a, a)$ întrucît intersecția conține numai funcția zero și $f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$, $\forall x \in (-a, a)$, $\forall f$ adică orice funcție $f: (-a, a) \to \mathbb{R}$ este suma dintre o funcție pară și una impară.

Evident noțiunile de sumă și sumă directă se pot extinde la cazul unui număr finit de subspații vectoriale.

§ 4. Dependență și independență liniară

Fie V un spațiu vectorial peste cîmpul $\mathbb{K}$ și S o submulțime de elemente din V.

4.1. *Definiție. Mulțimea S se numește liniar dependentă dacă există o mulțime finită de elemente distincte din S, să zicem $v_1, v_2, \ldots, v_p$ și scalarii $k_1, k_2, \ldots, k_p$ cel puțin unul diferit de zero, astfel încît $\sum_{i=1}^{p} k_i v_i = 0$.*

Mulțimea S se zice liniar independentă dacă nu este liniar dependentă, adică dacă pentru orice alegere a elementelor $v_i \in S$ și a scalarilor $k_i \in \mathbb{K}$, relația $\sum_{i=1}^{p} k_i v_i = 0$ implică $k_1 = k_2 = \ldots = k_p = 0$.

Facem observația că mulțimea S poate fi o mulțime finită sau infinită. De asemenea subliniem și faptul că deși liniar dependența și liniar independența sînt proprietăți specifice unor mulțimi de vectori, adeseori se vorbește direct despre *vectori liniar dependenți*, respectiv *vectori liniar independenți*.

Exemple.

1) $\{v \mid v \neq 0\}$ este liniar independentă; $\{0\}$ este liniar dependentă.

2) Dacă $0 \in S$, atunci S este liniar dependentă. Dacă în S există un vector care se poate exprima ca un multiplu scalar al unui alt vector, atunci S este liniar dependentă.

3) Fie $v_1(t) = e^t$, $v_2(t) = e^{-t}$, $v_3(t) = \operatorname{sh} t$. Deoarece $e^t - e^{-t} - 2 \operatorname{sh} t = 0$, mulțimea $\{v_1, v_2, v_3\}$ este liniar dependentă.

4.2. Teoremă. Fie $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\} \subset V$ o mulțime liniar independentă și $L(S)$ acoperirea liniară a lui S. Orice mulțime de $p+1$ elemente din $L(S)$ este liniar dependentă.

Demonstrație. Fie $w_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} v_j$, $i = 1, 2, \ldots, p+1$ vectori arbitrari care aparțin lui $L(S)$. Relația $k_1 w_1 + k_2 w_2 + \ldots + k_{p+1} w_{p+1} = 0$ conduce la $\sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{p+1} k_i a_{ij} \right) v_j = 0$ și întrucît $v_j, j = 1, 2, \ldots, p$ sînt liniar indepen-

denţi obţinem $k_1a_{1j} + k_2a_{2j} + \ldots + k_{p+1}a_{p+1j} = 0$, $j = 1, 2, \ldots, p$. Acest sistem omogen cu p ecuaţii şi $p + 1$ necunoscute admite şi soluţii nebanale. Prin urmare w_i sînt liniar dependenţi.

§ 5. Bază şi dimensiune

Fie $\boldsymbol{V}$ un spaţiu vectorial peste cîmpul $\mathbb{K}$.

5.1. *Definiţie. O mulţime $\boldsymbol{B}$ de vectori din $\boldsymbol{V}$ se numeşte bază pentru $\boldsymbol{V}$ dacă $\boldsymbol{B}$ este liniar independentă şi generează pe $\boldsymbol{V}$.*

Utilizînd axioma alegerii se poate demonstra că orice spaţiu vectorial diferit de $\{0\}$ admite o bază [21].

Spaţiul vectorial $\boldsymbol{V}$ se numeşte *finit dimensional* dacă are o bază finită sau dacă $\boldsymbol{V} = \{0\}$. În caz contrar $\boldsymbol{V}$ se numeşte *infinit dimensional.*

5.2. Teoremă. Fie $\boldsymbol{V}$ un spaţiu vectorial finit dimensional. Oricare două baze ale lui $\boldsymbol{V}$ au acelaşi număr de elemente.

Demonstraţie. Fie $\boldsymbol{B}$ şi $\boldsymbol{B}'$ două baze ale lui $\boldsymbol{V}$. Fie n numărul elementelor din $\boldsymbol{B}$ şi n' numărul elementelor din $\boldsymbol{B}'$. Dacă $\boldsymbol{B}$ este independentă şi generează spaţiul $\boldsymbol{V}$, teorema 4.2 (orice mulţime formată din $n + 1$ vectori este dependentă) implică $n' \leqslant n$. Acelaşi raţionament pentru mulţimea $\boldsymbol{B}'$ conduce la $n \leqslant n'$; deci $n = n'$.

Teorema 5.2 justifică următoarea *definiţie*:

$$\textit{numărul } \dim \boldsymbol{V} = \begin{cases} n, & \textit{dacă } \boldsymbol{V} \textit{ posedă o bază formată din } n \textit{ elemente} \\ 0, & \textit{dacă } \boldsymbol{V} = \{0\} \end{cases}$$

se numeşte dimensiunea lui $\boldsymbol{V}$. Un spaţiu vectorial cu dimensiunea n se numeşte *n-dimensional* şi se notează cu $\boldsymbol{V}_n$.

Exemple. Fie $\mathbb{K}^n$ spaţiul vectorial aritmetic. Vectorii $e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ determină o bază $\boldsymbol{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Să arătăm că $\boldsymbol{B}$ este independentă; relaţia $k_1e_1 + k_2e_2 + \ldots + k_ne_n = 0$ este echivalentă cu $(k_1, k_2, \ldots, k_n) = (0, 0, \ldots, 0)$, adică $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$. Pe de altă parte $\forall\, x \in \mathbb{K}^n$, avem $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$, deci $\boldsymbol{B}$ generează pe $\boldsymbol{V}$.

2) Spaţiul vectorial $\mathbb{K}_n[X]$ al tuturor polinoamelor de grad $\leqslant n$ are dimensiunea $n + 1$. Într-adevăr observăm că $\boldsymbol{B} = \{1, X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ este independentă, $k_0 + k_1X + k_2X^2 + \ldots + k_nX^n = 0 \Rightarrow k_0 = k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$ şi orice polinom de grad $\leqslant n$ este o combinaţie liniară finită de elemente din $\boldsymbol{B}$.

3) Spaţiul vectorial $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ al matricelor dreptunghiulare are dimensiunea mn. O bază este mulţimea $\boldsymbol{B} = \{E_{ij}, 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n\}$, E_{ij} fiind matricea care are elementul 1 la intersecţia liniei i cu coloana j, celelalte elemente fiind nule.

4) Fie $\boldsymbol{V}$ un spaţiu vectorial complex. Spaţiul vectorial real ${}^{\mathbb{R}}\boldsymbol{V}$ care coincide cu $\boldsymbol{V}$ ca grup aditiv şi în care înmulţirea cu un număr real este definită ca în $\boldsymbol{V}$ se numeşte *trecerea în real* a lui $\boldsymbol{V}$.

În particular, prin trecerea în real a spaţiului n-dimensional $\mathbb{C}^n$ se obţine spaţiul real de dimensiune $2n$, notat ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$. Baza $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, ie_1, ie_2, \ldots, ie_n\}$ din ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n$ provine din trecerea în real a bazei $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ din $\mathbb{C}^n$.

5) Fie $\mathbb{K}[X]$ spaţiul vectorial al tuturor polinoamelor în nedeterminata X. Polinoamele $1, X, X^2, \ldots, X^n, \ldots$ constituie o bază a lui $\mathbb{K}[X]$ şi deci $\dim \mathbb{K}[X] = \infty$.

5.3. Teoremă. Pentru orice spaţiu vectorial n-dimensional $\boldsymbol{V}_n$ sînt adevărate următoarele afirmaţii:

1) O mulţime de vectori liniar independenţi din $\boldsymbol{V}_n$ este o submulţime a unei baze din $\boldsymbol{V}_n$.

2) Orice mulţime formată din n vectori liniar independenţi este o bază a lui $\boldsymbol{V}_n$.

Demonstraţie. 1) Dacă $\boldsymbol{S} = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ este o mulţime liniar independentă din $\boldsymbol{V}_n$, atunci sau $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{S}) = \boldsymbol{V}_n$, şi deci $\boldsymbol{S}$ este o bază, sau $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{S})$ este o submulţime proprie a lui $\boldsymbol{V}_n$. În al doilea caz există $v \in \boldsymbol{V}_n - \boldsymbol{L}(\boldsymbol{S})$ astfel încît $\boldsymbol{S}' = \{v_1, v_2, \ldots, v_p, v\}$ este independentă.

Dacă $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{S}') = \boldsymbol{V}_n$, atunci $\boldsymbol{S}'$ este o bază ce conţine pe $\boldsymbol{S}$, iar dacă $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{S}')$ este o submulţime proprie a lui $\boldsymbol{V}_n$, atunci se reia raţionamentul făcut pentru $\boldsymbol{S}$. Repetînd raţionamentul trebuie să ajungem la o bază, după un număr finit de paşi, întrucît dimensiunea spaţiului este finită.

În concluzie, mulţimea $\boldsymbol{S}$ poate fi prelungită sau completată pînă la o bază din $\boldsymbol{V}_n$.

2) Fie $\boldsymbol{S}$ o submulţime liniar independentă care conţine n vectori din $\boldsymbol{V}_n$. Prima parte a teoremei arată că $\boldsymbol{S}$ este o submulţime a unei baze $\boldsymbol{B}$ a lui $\boldsymbol{V}_n$, iar teorema 5.2 arată că baza $\boldsymbol{B}$ trebuie să aibă n elemente. Deci $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{B}$.

Spaţiile vectoriale finit dimensionale au un profit deosebit de pe urma prezenţei bazelor întrucît în acest caz există posibilitatea introducerii şi utilizării coordonatelor fără a se ieşi din contextul combinaţiilor liniare finite specific algebrei vectoriale. Precizăm însă că explicitarea teoriei coordonatelor impune în mod necesar ordonarea elementelor unei baze şi de aceea, în cele ce urmează, printr-o *bază într-un spaţiu vectorial finit dimensional se va înţelege o mulţime finită, ordonată, liniar independentă, care generează spaţiul respectiv.*

Fie $\boldsymbol{V}_n$ un spaţiu vectorial n-dimensional şi fie $\boldsymbol{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază în acest spaţiu.

5.4. Teoremă. Orice vector $v \in \boldsymbol{V}_n$ admite o exprimare unică de forma $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ (numită *descompunerea* lui v după vectorii bazei).

Demonstraţie. Deoarece $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{L}(\boldsymbol{B})$, orice vector $v \in \boldsymbol{V}$ poate fi scris ca o combinaţie liniară de vectorii bazei, adică $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

Presupunem că vectorul v ar admite şi o altă exprimare $v = \sum_{i=1}^{n} x_i' e_i$.

Prin scădere obţinem $0 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i') e_i$. Întrucît vectorii e_i sînt liniar independenţi, din definiţia 4.1 rezultă $x_i - x_i' = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ sau $x_i = x_i'$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Numerele x_i se numesc *coordonatele vectorului v în raport cu baza $\boldsymbol{B}$*, iar bijecţia $f : \boldsymbol{V}_n \to \mathbb{K}^n$ definită prin $v \to (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se numeşte *sistem de coordonate* pe $\boldsymbol{V}_n$.

Uneori vom prefera identificarea $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$; în acest caz $kv = (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n)$ şi dacă $w = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ atunci $v + w = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$.

5.5. Teoremă. Dacă $\boldsymbol{W}$ şi $\boldsymbol{U}$ sînt două subspaţii ale spaţiului vectorial $\boldsymbol{V}_n$, atunci

$$\dim \boldsymbol{W} + \dim \boldsymbol{U} = \dim (\boldsymbol{W} + \boldsymbol{U}) + \dim(\boldsymbol{W} \cap \boldsymbol{U}).$$

Verificăm valabilitatea acestei teoreme pentru subspaţiile date în exemplul teoremei 3.4.

Dimensiunea subspaţiului $\boldsymbol{W} + \boldsymbol{U}$ coincide cu rangul matricei

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & 2 \\ 5 & -10 & 15 & -4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Obţinem $\dim (\boldsymbol{W} + \boldsymbol{U}) = 2$.

Un vector oarecare din subspaţiul $\boldsymbol{W} \cap \boldsymbol{U}$ s-a găsit ca fiind de forma $(6\lambda - 8\mu,\ 30\lambda - 40\mu)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, astfel încît $\dim(\boldsymbol{W} \cap \boldsymbol{U}) = 1$. Întrucît $\dim \boldsymbol{W} = 1$, $\dim \boldsymbol{U} = 2$, teorema 5.5 se verifică.

Fie $\boldsymbol{V}_n$ un spaţiu vectorial raportat la baza $\boldsymbol{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Dacă $v_1, v_2, \ldots, v_p \in \boldsymbol{V}_n$, atunci

$$v_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}e_i,\ v_2 = \sum_{i=1}^{n} a_{i2}e_i,\ \ldots,\ v_p = \sum_{i=1}^{n} a_{ip}e_i.$$

Acestor relaţii li se ataşează matricea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{np} \end{bmatrix}$$

numită *matricea de trecere de la vectorii* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ la vectorii $v_1, v_2, \ldots$ $\ldots, v_p$. Evident, vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_p$ pot fi identificaţi cu coloanele matricei A. De asemenea se ştie că rang A = rang${}^tA$.

5.6. Teoremă. Rangul matricei A este egal cu numărul maxim al vectorilor coloană liniar independenţi.

Demonstraţie. Ipoteza rang $A = r$, adică

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} \\ \ldots & & \ldots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0,$$

implică liniar independenţa vectorilor coloană $v_1, \ldots, v_r$. Fie coloana v_l, unde $r \leqslant l \leqslant p$, şi determinanţii

$$D_i = \left|\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1r} & a_{1l} \\ \ldots & & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} & a_{rl} \\ \hline a_{i1} & \ldots & a_{ir} & a_{il} \end{array}\right|,\ i=1, 2, \ldots, n.$$

Fiecare dintre aceşti determinanţi este nul deoarece pentru $i \leqslant r$, D_i are două linii identice, iar pentru $i > r$, ordinul lui D_i este mai mare decît r. Dezvoltînd pe D_i după ultima linie găsim

$$a_{i1}A_1 + \ldots + a_{ir}A_r + a_{il}D = 0,$$

adică

$$a_{il} = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j a_{ij}, \quad \lambda_j = \frac{A_j}{D}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Aceste relaţii scalare sînt echivalente cu relaţia vectorială $v_l = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j v_j$, $r < l \leqslant p$, adică cu faptul că fiecare coloană v_l este o combinaţie liniară de primele r coloane ale matricei A.

5.7. Consecinţă. Fie $\boldsymbol{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază a lui $\boldsymbol{V}_n$. Mulţimea $\boldsymbol{B}' = \left\{e'_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}e_i,\ j = 1, \ldots, n\right\}$ este o altă bază a lui $\boldsymbol{V}_n$ dacă şi numai dacă det $[c_{ij}] \neq 0$.

Schimbarea bazei. Fie $\boldsymbol{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ şi $\boldsymbol{B}' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$ două baze distincte în spaţiul vectorial $\boldsymbol{V}_n$. Notăm cu $C = [c_{ij}]$ matricea pătratică ale cărei coloane sînt coordonatele vectorilor bazei $\boldsymbol{B}'$ în raport cu baza $\boldsymbol{B}$, adică *matricea de trecere* de la baza $\boldsymbol{B}$ la baza $\boldsymbol{B}'$.

Fie x_i respectiv x'_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ coordonatele aceluiaşi vector v în raport cu baza $\boldsymbol{B}$ respectiv $\boldsymbol{B}'$. Prin urmare $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ respectiv $v = \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j$. Prelucrăm ultima relaţie, $v = \sum_{j=1}^{n} x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} c_{ij}e_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x'_j\right)e_i$. Rezultă $x_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x'_j$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Aceste relaţii caracterizează *transformarea coordonatelor* la o schimbare a bazei; matriceal se scrie $X = CX'$, unde X, X' sînt matricele coloană $X = {}^t[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, respectiv $X' = {}^t[x'_1, x'_2, \ldots, x'_n]$.

Spaţii vectoriale izomorfe. Fie $\boldsymbol{V}$ şi $\boldsymbol{W}$ două spaţii vectoriale peste cîmpul $\mathbb{K}$. O aplicaţie $\mathscr{T} : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ care satisface condiţiile

$$\mathscr{T}(u + v) = \mathscr{T}(u) + \mathscr{T}(v), \quad \forall\, u, v \in \boldsymbol{V}$$

$$\mathscr{T}(ku) = k\mathscr{T}(u), \quad \forall\, u \in \boldsymbol{V}, \ \forall\, k \in \mathbb{K}$$

se numeşte *transformare liniară.*

5.8. *Definiţie. O transformare liniară bijectivă se numeşte izomorfism.* Un sistem de coordonate pe $\boldsymbol{V}_n$ este un izomorfism canonic între $\boldsymbol{V}_n$ şi $\mathbb{K}^n$.

5.9. Teoremă. Două spaţii vectoriale $\boldsymbol{V}$ şi $\boldsymbol{W}$ peste cîmpul $\mathbb{K}$, de dimensiuni finite, sînt izomorfe dacă şi numai dacă au aceeaşi dimensiune.

Demonstrație. Presupunem că $\boldsymbol{V}_n$ și $\boldsymbol{W}_m$ sînt izomorfe, adică există o transformare liniară bijectivă $\mathscr{T}: \boldsymbol{V}_n \to \boldsymbol{W}_m$. Evident $\mathscr{T}(0) = 0$. Fie $\boldsymbol{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază a lui $\boldsymbol{V}_n$. Mulțimea $\mathscr{T}(\boldsymbol{B}) = \{\mathscr{T}(e_1), \mathscr{T}(e_2), \ldots, \mathscr{T}(e_n)\} \subset \subset \boldsymbol{W}_m$ este liniar independentă, fapt dovedit de următorul șir de implicații: $k_1\mathscr{T}(e_1) + k_2\mathscr{T}(e_2) + \ldots + k_n\mathscr{T}(e_n) = 0 \Rightarrow \mathscr{T}(k_1e_1 + k_2e_2 + \ldots + k_ne_n) = 0 \Rightarrow k_1e_1 + k_2e_2 + \ldots + k_ne_n = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$. Pe de altă parte $\forall\, w \in \boldsymbol{W}_m$, $\exists\, v = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i \in \boldsymbol{V}_n$ astfel încît $\mathscr{T}(v) = w$. Rezultă $w = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathscr{T}(e_i)$ și deci $\mathscr{T}(\boldsymbol{B})$ generează pe $\boldsymbol{W}_m$, adică $n = m$.

Reciproc, fie $\boldsymbol{V}_n$ și $\boldsymbol{W}_n$. Utilizînd sistemele de coordonate $f: \boldsymbol{V}_n \to \mathbb{K}^n$, $g: \boldsymbol{W}_n \to \mathbb{K}^n$, găsim că $\mathscr{T} = g^{-1} \circ f: \boldsymbol{V}_n \to \boldsymbol{W}_n$ este un izomorfism.

§ 6. Spații vectoriale euclidiene

Adăugăm la structura de spațiu vectorial o nouă noțiune, aceea de produs scalar, cu ajutorul căreia putem defini lungimile, unghiurile, ortogonalitatea etc.

6.1. *Definiție. Fie* $\boldsymbol{V}$ *un spațiu vectorial complex. O aplicație* $(,)$ *definită pe* $\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V}$ *și cu valori în* $\mathbb{C}$ *care are proprietățile:*

$$(v, w) = \overline{(w, v)}$$

$$(u, v + w) = (u, v) + (u, w)$$

$$k(v, w) = (kv, w)$$

$$(v, v) \geqslant 0\,; \quad (v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0,$$

$u, v, w \in \boldsymbol{V}$, $k \in \mathbb{C}$, *se numește produs scalar pe* $\boldsymbol{V}$.

Axiomele precedente au următoarele consecințe imediate:

$$(v, kw) = \bar{k}(v, w),$$

$$(u + v, w) = (u, w) + (v, w).$$

6.2. Teoremă. Dacă spațiul vectorial complex $\boldsymbol{V}$ este dotat cu un produs scalar, atunci este satisfăcută inegalitatea Cauchy-Schwarz

$$|(v, w)|^2 \leqslant (v, v)(w, w),$$

cu egalitate dacă și numai dacă v și w sînt liniar dependenți.

Demonstrație. Dacă $v = 0$ sau $w = 0$, demonstrația este banală. Presupunem că vectorii v și w sînt nenuli și notăm $z = kv + lw$, unde k și l sînt numere complexe pe care le vom preciza ulterior. Proprietățile produsului scalar implică $0 \leqslant (z, z) = (kv + lw, kv + lw) = k\bar{k}(v, v) + k\bar{l}(v, w) + \bar{k}l(w, v) + l\bar{l}(w, w)$, cu egalitate dacă și numai dacă $z = 0$.

Fie $k = (w, w) > 0$; $\bar{k} = k$ deoarece k este real. Prin simplificare cu k, inegalitatea precedentă devine

$$(w, w)(v, v) + \bar{l}(v, w) + l\overline{(v, w)} + l\bar{l} \geqslant 0.$$

Fie $l = -(v, w)$ și deci $\bar{l} = -\overline{(v, w)} = -(w, v)$. Inegalitatea devine

$$(w, w)(v, v) \geqslant (v, w)(w, v) = |(v, w)|^2.$$

Dacă V este un spațiu vectorial real, atunci în definiția precedentă $\mathbb{C}$ se înlocuiește cu $\mathbb{R}$, axioma $(v, w) = \overline{(w, v)}$ se înlocuiește cu $(v, w) = (w, v)$, consecința $(v, kw) = \bar{k}(v, w)$ devine $(v, kw) = k(v, w)$, iar inegalitatea Cauchy-Schwarz se scrie $(v, w)^2 \leqslant (v, v)(w, w)$.

6.3. *Definiție. Un spațiu vectorial (real sau complex) pe care s-a definit un produs scalar se numește spațiu vectorial euclidian (real sau complex).*

Exemple de spații vectoriale euclidiene canonice. 1) Fie $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ și $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ doi vectori oarecare din spațiul vectorial aritmetic $\mathbb{R}^n$. Funcția reală definită prin

$$(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$$

este un produs scalar pe $\mathbb{R}^n$.

2) Analog $\mathbb{C}^n$ este un spațiu vectorial euclidian în raport cu

$$(x, y) = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + \ldots + x_n\bar{y}_n.$$

3) Spațiul vectorial real al tuturor funcțiilor cu valori reale, continue pe un interval $[a, b]$, este un spațiu euclidian real în raport cu aplicația definită prin

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\, g(x)\mathrm{d}x.$$

6.4. Teoremă. Fie V un spațiu vectorial euclidian. Funcția $\| \ \| : V \to \mathbb{R}_+$ definită prin $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$ este o normă pe V, adică satisface relațiile

$$\|v\| > 0 \text{ pentru } v \neq 0, \ \|0\| = 0,$$

$$\|kv\| = |k|\,\|v\|, \ k = \text{scalar}$$

$$\|v + w\| \leqslant \|v\| + \|w\| \text{ (inegalitatea triunghiului).}$$

Norma din această teoremă se numește *norma euclidiană*.

Demonstrație. Presupunem că V este un spațiu vectorial complex. Inegalitatea $(v, v) \geqslant 0$ implică $\|v\| \geqslant 0$, cu egalitate dacă și numai dacă v este vectorul nul. De asemenea pentru $k \in \mathbb{C}$ și $v \in V$ găsim $\|kv\| = \sqrt{(kv, kv)} = \sqrt{k\bar{k}(v, v)} = \sqrt{|k|^2(v, v)} = |k|\sqrt{(v, v)} = |k|\,\|v\|$, adică și a doua proprietate este satisfăcută. Proprietatea a treia se demonstrează

ţinînd seama că $(v, w) + \overline{(v, w)} = 2\,\mathrm{Re}(v, w) \leqslant 2|(v, w)|$ şi folosind inegalitatea Cauchy-Schwarz transcrisă în forma $|(v, w)| \leqslant \|v\|\,\|w\|$. Într-adevăr, $\|v + w\|^2 = (v + w, v + w) = (v, v) + (v, w) + \overline{(v, w)} + (w, w) \leqslant \|v\|^2 + 2\|v\|\,\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2$.

Primele două proprietăţi ale normei asigură că orice element v din $\boldsymbol{V}$ poate fi scris în forma $v = \|v\|e$, unde $\|e\| = 1$. Vectorul e cu proprietatea $\|e\| = 1$ se numeşte *versor*. Evident, versorul asociat unui vector nenul este $e = \dfrac{1}{\|v\|} v$.

Fie $\boldsymbol{V}$ un spaţiu vectorial euclidian real. Pe submulţimea $\boldsymbol{V} - \{0\}$, inegalitatea Cauchy-Schwarz, $|(v, w)| \leqslant \|v\|\,\|w\|$, se transcrie

$$-1 \leqslant \frac{(v, w)}{\|v\|\|w\|} \leqslant 1.$$

Această observaţie justifică următoarea definiţie.

6.5. *Definiţie. Fie $\boldsymbol{V}$ un spaţiu vectorial euclidian real şi v, w doi vectori nenuli din $\boldsymbol{V}$. Numărul $\theta \in [0, \pi]$ definit de egalitatea*

$$\cos\theta = \frac{(v, w)}{\|v\|\|w\|}$$

se numeşte unghiul dintre v şi w.

Denumiri. Un spaţiu vectorial dotat cu o normă se numeşte *spaţiu vectorial normat.* Un spaţiu vectorial normat în care norma provine dintr-un produs scalar se numeşte *spaţiu prehilbertian.* Un spaţiu prehilbertian complet (în sensul că orice şir Cauchy de elemente din spaţiu este un şir convergent) se numeşte *spaţiu Hilbert.*

6.6. Teoremă. Fie $\boldsymbol{V}$ un spaţiu vectorial normat. Funcţia reală definită prin $\mathrm{d}(u, v) = \|u - v\|$ este o distanţă (metrică) pe $\boldsymbol{V}$, adică satisface relaţiile

$$\mathrm{d}(u, v) \geqslant 0;\ \mathrm{d}(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v,$$

$$\mathrm{d}(u, v) = \mathrm{d}(v, u)$$

$$\mathrm{d}(u, v) \leqslant \mathrm{d}(u, w) + \mathrm{d}(w, v),\ \forall\, u, v, w \in \boldsymbol{V}.$$

Demonstraţia este simplă şi o lăsăm drept temă pentru cititori. Dacă norma este euclidiană, atunci distanţa definită cu ajutorul ei se numeşte *distanţă euclidiană.*

În general o mulţime oarecare înzestrată cu o funcţie distanţă (metrică) se numeşte *spaţiu metric.* Teorema 6.6 arată că orice spaţiu vectorial normat este un spaţiu metric.

Exemplu. Fie $\boldsymbol{P}_2$ spaţiul vectorial real al funcţiilor polinomiale reale de grad cel mult doi înzestrat cu produsul scalar $(\ ,\ ) : \boldsymbol{P}_2 \times \boldsymbol{P}_2 \to \mathbb{R}$ definit prin $(p, q) = a_0b_0 + 2a_1b_1 + a_2b_2$, $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$.

În acest spațiu se consideră vectorii $p_1(x) = 2 + x + 5x^2$, $p_2(x) = 2 + x - x^2$, $p_3(x) = 4 + x + 5x^2$, $p_4(x) = 3 + 3x + 5x^2$ și se cere să se găsească un vector p_0 echidistant acestora ; să se calculeze această distanță.

Soluție. Fie $p_0(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$; coeficienții c_0, c_1, c_2 se stabilesc din egalitățile $\|p_1 - p_0\| = \|p_2 - p_0\| = \|p_3 - p_0\| = \|p_4 - p_0\|$; obținem $c_0 = 3$, $c_1 = \frac{15}{8}$, $c_2 = 2$.

Distanța cerută este $d = \|p_1 - p_0\| = \sqrt{(p_1 - p_0,\ p_1 - p_0)} = \sqrt{(2-3)^2 + 2\left(1 - \frac{15}{8}\right)^2 + (5-2)^2} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{41}{2}}$.

§ 7. Ortogonalitate

Ortogonalitatea este una dintre cele mai importante relații dintre vectorii unui spațiu vectorial euclidian.

7.1. *Definiție. Fie V un spațiu vectorial euclidian. Doi vectori din V se numesc ortogonali dacă produsul lor scalar este nul. O submulțime $S \subset V$ se numește ortogonală dacă vectorii săi sînt ortogonali doi cîte doi, adică $(v, w) = 0$, $\forall v, w \in S$, $v \neq w$. O mulțime ortogonală se numește ortonormată dacă fiecare element al său are norma egală cu unitatea.*

7.2. Teoremă. Orice mulțime ortogonală dintr-un spațiu vectorial euclidian V formată din elemente nenule este liniar independentă. Dacă $\dim V = n$, atunci orice mulțime ortogonală care conține n elemente nenule este o bază a lui V.

Demonstrație. Fie $S \subset V - \{0\}$ o mulțime ortogonală, iar $k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_pv_p$ o oarecare combinație liniară finită de elemente din S. Ipoteza $k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_pv_p = 0$ implică

$$k_1(v_j, v_1) + k_2(v_j, v_2) + \ldots + k_p(v_j, v_p) = 0,\ j = \text{fixat din } \{1, 2, \ldots p\}.$$

Punînd pe rînd $j = 1, 2, \ldots, p$ și ținînd seama de ortogonalitate rezultă $k_1(v_1, v_1) = 0$, $k_2(v_2, v_2) = 0, \ldots, k_p(v_p, v_p) = 0$. Pe de altă parte ipoteza $v_j \neq 0$ implică $(v_j, v_j) > 0$ și deci $k_1 = k_2 = \ldots = k_p = 0$, adică S este liniar independentă.

Demonstrarea ultimei părți a teoremei rezultă imediat din teorema 5.3,2).

Pentru studiul spațiilor vectoriale euclidiene este comod să se lucreze cu baze ortonormate. Conform definiției 7.1 baza $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subset V_n$ este ortonormată dacă

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } i = j \\ 0 & \text{dacă } i \neq j \end{cases}$$

Simbolul δ_{ij} se numește *simbolul lui Kronecker.*

Exemplu. În spațiul vectorial $C^0([0, 2\pi])$ al funcțiilor reale, continue pe intervalul $[0, 2\pi]$ în care definim produsul scalar prin aplicația $(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)\, g(x)\mathrm{d}x$, considerăm următoarea sub-

mulțime infinită de funcții trigonometrice $S=\{f_0, f_1, f_2, \ldots\}$ unde $f_0(x) = 1$, $f_{2n-1}(x)=\cos nx$, $f_{2n}(x)=\sin nx$, $n = 1, 2, \ldots$ Întrucît $(f_m, f_n) = 0$, $m \neq n$ urmează că S este o mulțime ortogonală; datorită ortogonalității funcțiilor și faptului că S nu conține elementul nul al spațiului $C^0[0, 2\pi]$), urmează că S este independentă. Împărțind fiecare funcție prin norma sa, $\|f_0\|=$ $= \sqrt{(f_0, f_0)} = \sqrt{\int_0^{2\pi} dx} = \sqrt{2\pi}$, $\|f_{2n-1}\| = \sqrt{\int_0^{2\pi} \cos^2 nx dx} = \sqrt{\pi}$, $\|f_{2n}\| = \sqrt{\int_0^{2\pi} \sin^2 nx dx} =$ $= \sqrt{\pi}$, obținem mulțimea ortonormată $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ unde $\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\varphi_{2n-1}(x)=\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}$, $\varphi_{2n}(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}$.

Observație. Mulțimea ortogonală S ne ajută să construim seria Fourier a unei funcții periodice.

7.3. *Definiție. Fie V un spațiu vectorial euclidian. Vectorul $\frac{(v, w)}{(w, w)} w$, unde $v, w \in V$, $w \neq 0$, se numește proiecția vectorului v pe w, iar numărul $\frac{(v, w)}{(w, w)}$ se numește mărimea algebrică a proiecției lui v pe w.*

7.4. Teoremă. Fie spațiul vectorial euclidian V_n. Dacă $B=\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ este o bază ortogonală a lui V și $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, atunci $x_i = \frac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)}$. În particular, dacă B este o bază ortonormată, atunci $x_i = (v, e_i)$.

Demonstrație. Conform teoremei 5.4, orice vector $v \in V_n$ se scrie unic ca o combinație liniară de vectorii bazei, adică $v = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$. Înmulțim scalar cu vectorul e_i, $i = 1, 2, \ldots, n$; $(v, e_i) = \sum_{j=1}^{n} x_j(e_j, e_i) = x_i(e_i, e_i)$; rezultă $x_i = \frac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)}$, adică coordonata x_i este mărimea algebrică a proiecției lui v pe e_i.

Dacă baza este ortonormată, $(e_i, e_i) = 1$ și rezultă $x_i = (v, e_i)$. Prin urmare oricare ar fi vectorul $v \in V_n$, raportat la o bază ortonormată, se scrie unic $v = \sum_{i=1}^{n} (v, e_i)e_i$. Coordonatele $x_i = (v, e_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ale vectorului v se numesc *coordonate euclidiene.*

7.5. Teoremă. Dacă V_n este un spațiu vectorial euclidian complex n-dimensional și $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ este o bază ortonormată, atunci $(v, w) = \sum_{j=1}^{n} x_j \bar{y}_j$, unde $x_j = (v, e_j)$, $y_j = (w, e_j)$. În particular, $\|v\|^2 =$ $= \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2$.

Demonstrație. Prin ipoteză $(e_j, e_k) = \delta_{jk}$ și $v= \sum_{j=1}^{n} x_j e_j, w= \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$. Ținînd

seama de proprietățile produsului scalar

$$(v, w) = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j, \sum_{k=1}^{n} y_k e_k\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_j \bar{y}_k (e_j, e_k) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_j \bar{y}_k \delta_{jk} = \sum_{j=1}^{n} x_j \bar{y}_j.$$

Fie V un spațiu vectorial euclidian și S o submulțime a sa.

7.6. *Definiție. Un element al lui V se zice ortogonal lui S dacă este ortogonal pe fiecare element din S. Mulțimea tuturor vectorilor ortogonali lui S se numește „S ortogonal" și se notează cu $S^{\perp}$.*

Se observă că $S^{\perp}$ este un subspațiu vectorial al lui V, indiferent dacă S este sau nu un subspațiu al lui V. În cazul cînd S este un subspațiu vectorial $S^{\perp}$ se numește *complementul ortogonal al lui S*.

7.7. Teoremă. Dacă V este un spațiu vectorial euclidian și W_n este un subspațiu n-dimensional al lui V, atunci $V = W_n \oplus W_n^{\perp}$. Mai mult, dacă $v \in V$, $w \in W_n$ și $w^{\perp} \in W_n^{\perp}$, atunci este satisfăcută teorema lui Pitagora $\|v\|^2 = \|w\|^2 + \|w^{\perp}\|^2$.

Demonstrație. Fie $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază ortonormată a lui W_n și $w = \sum_{i=1}^{n} (v, e_i)e_i$ *proiecția* lui $v \in V$ pe subspațiul W_n. Punînd $w^{\perp} = v - w$ rezultă :

$$(w^{\perp}, w) = (v, w) - (w, w) = \left(v, \sum_{i=1}^{n} (v, e_i)e_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} (v, e_i)e_i, \sum_{j=1}^{n} (v, e_j)e_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (v, e_i)^2 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (v, e_i)(v, e_j)\,(e_i, e_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (v, e_i)^2 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (v, e_i)(v, e_j)\delta_{ij} = 0$$

și deci $w^{\perp} \in W^{\perp}$. Exprimarea unică $v = w + w^{\perp}$ arată că $V = W_n \oplus W_n^{\perp}$.

Teorema lui Pitagora : $\|v\|^2 = (v, v)^2 = (w + w^{\perp}, w + w^{\perp}) = (w, w) + 2(w, w^{\perp}) + (w^{\perp}, w^{\perp}) = \|w\|^2 + \|w^{\perp}\|^2$.

§ 8. Procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt

Fie V un spațiu vectorial euclidian. Ne propunem să arătăm că din orice mulțime liniar independentă de vectori din V se poate construi o mulțime ortonormată (mulțime ortogonală ale cărei elemente au norma 1). În acest sens—prin demonstrațiile teoremelor care urmează—vom pune în evidență *procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt.*

8.1. Teoremă. Dacă V este un spațiu vectorial euclidian cu dimensiunea n, iar $v_1, v_2, \ldots, v_n$ este o bază a lui V, atunci există o bază ortonormată $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ astfel încît mulțimile $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ și $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ generează același subspațiu $U_k \subset V$ pentru fiecare $k = 1, 2, \ldots, n$.

Demonstrație. Mai întîi construim o mulțime ortogonală și apoi îi normăm elementele. Mulțimea ortogonală $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ se construiește din $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ în felul următor:

1) Se ia $w_1 = v_1$. 2) Se pune $w_2 = v_2 + kw_1$. Vectorul w_2 nu este zero deoarece v_1 și v_2 sînt liniar independenți. Se determină k din condiția ca w_2 să fie ortogonal lui w_1, adică $0 = (w_2, w_1) = (v_2 + kw_1, w_1)$. Rezultă $k = -\dfrac{(v_2, w_1)}{(w_1, w_1)}$. Deci $w_2 = v_2 - \dfrac{(v_2, w_1)}{(w_1, w_1)} w_1$, adică vectorul w_2 se obține scăzînd din v_2 proiecția lui v_2 pe w_1. 3) Vectorul w_3 este definit prin $w_3 = v_3 + k_1 w_1 + k_2 w_2$; el este nenul ca urmare a faptului că v_1, v_2, v_3 sînt liniar independenți. Scalarii k_1, k_2 sînt determinați din condițiile ca w_3 să fie ortogonal lui w_1 și lui w_2, adică

$$0 = (w_3, w_1) = (v_3, w_1) + k_1(w_1, w_1)$$

$$0 = (w_3, w_2) = (v_3, w_2) + k_2(w_2, w_2)$$

Găsim

$$k_1 = -\frac{(v_3, w_1)}{(w_1, w_1)}, \quad k_2 = -\frac{(v_3, w_2)}{(w_2, w_2)}$$

și deci

$$w_3 = v_3 - \frac{(v_3, w_1)}{(w_1, w_1)} w_1 - \frac{(v_3, w_2)}{(w_2, w_2)} w_2,$$

adică w_3 se obține scăzînd din v_3 proiecțiile lui v_3 pe w_1 și pe w_2.

Repetăm schema precedentă pînă obținem o mulțime de n vectori ortogonali $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$. Mulțimea ortonormată se găsește definind

$$e_i = \frac{w_i}{\|w_i\|}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Pentru final se poate arăta că $U_k = L(\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}) = L(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\})$.

Exemplu. Fie $\mathbb{R}^3$ spațiul euclidian canonic cu trei dimensiuni. Să se găsească o bază ortonormată pentru subspațiul generat de vectorii $x_1 = (1, 1, -1)$, $x_2 = (3, -1, -1)$, $x_3 = (0, -1, 1)$.

Soluție. Utilizînd procedeul Gram-Schmidt, construim o mulțime ortogonală $\{y_1, y_2, y_3\}$ formată din vectorii nenuli

$$y_1 = x_1 = (1, 1, -1)$$

$$y_2 = x_2 - \frac{(x_2, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1 = (3, -1, -1) - \frac{3}{3}(1, 1, -1) = (2, -2, 0)$$

$$y_3 = x_3 - \frac{(x_3, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1 - \frac{(x_3, y_2)}{(y_2, y_2)} y_2 = (0, -1, 1) - \frac{(-2)}{3}(1, 1, -1) - \frac{2}{8}(2, -2, 0) =$$

$$= \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right).$$

Împărţim fiecare vector din baza ortogonală prin norma sa şi obţinem o bază ortonormată

$$\frac{y_1}{\|y_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \frac{y_2}{\|y_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0\right), \frac{y_3}{\|y_3\|} = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right).$$

Teorema 8.1 se generalizează în felul următor.

8.2. Teoremă. Fie V un spaţiu vectorial euclidian, fie $\{v_1, v_2, \ldots\} \subset V$ o mulţime finită sau infinită şi $L(v_1, \ldots, v_k)$ subspaţiul generat de primii k vectori. Atunci există o mulţime $\{w_1, w_2, \ldots\} \subset V$ cu următoarele proprietăţi, pentru fiecare $k \in \mathbb{N}$,

1) vectorul w_k este ortogonal pe $L(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1})$,

2) $L(w_1, \ldots, w_k) = L(v_1, \ldots, v_k)$,

3) $w_1, w_2, \ldots$ sînt unic determinaţi abstracţie făcînd de un factor scalar.

În loc de demonstraţie ne mulţumim cu un mic comentariu. Vectorii $w_1, w_2, \ldots, w_k$ au expresiile

$$w_1 = v_1, w_{r+1} = v_{r+1} - \sum_{i=1}^{n} \frac{(v_{r+1}, w_i)}{(w_i, w_i)} w_i, \; r = 1, 2, \ldots, k-1,$$

care se dovedesc bune pentru fiecare $k \in \mathbb{N}$. Evident aceşti vectori sînt construiţi astfel încît w_{r+1} să fie ortogonal cu $w_1, w_2, \ldots, w_r$ adică vectorul w_{r+1} se obţine scăzînd din v_{r+1} proiecţiile lui v_{r+1} pe vectorii $w_1, w_2, \ldots, w_r$. Din mulţimea ortogonală $\{w_1, w_2, \ldots\}$ se obţine mulţimea ortonormată $\left\{\frac{w_1}{\|w_1\|}, \frac{w_2}{\|w_2\|}, \ldots\right\}$.

Exemplu. Fie P spaţiul vectorial al tuturor funcţiilor polinomiale reale definite pe $[-1, 1]$ înzestrat cu produsul scalar $(v, w) = \int_{-1}^{1} v(t)\, w(t) dt$. Baza acestui spaţiu este alcătuită din vectorii $v_n(t) = t^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Ortogonalizînd această bază cu procedeul Gram-Schmidt, obţinem polinoamele Legendre, $w_1(t) = t$, $w_2(t) = t^2 - \frac{1}{3}$, $w_3(t) = t^3 - \frac{3}{5} t, \ldots, w_n(t) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n, \ldots$

§ 9. Spaţii punctuale euclidiene

9.1. Fie $V = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \ldots\}$ un spaţiu vectorial euclidian. O mulţime $\mathbb{E} = \{A, B, C, \ldots\}$ se numeşte spaţiu punctual euclidian dacă există o funcţie $f: \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to V$ astfel încît

(i) $f(A, B) + f(B, C) = f(A, C)$, $A, B, C \in \mathbb{E}$,

(ii) funcţiile parţiale $f_A : \mathbb{E} \to V$ definite prin $f_A(B) = f(A, B)$ sînt bijective.

V se numește *spațiu director*; elementele lui V se numesc *vectori directori*; elementele lui $\mathbb{E}$ se numesc *puncte*; f se numește *funcție de structură afină*.

Spațiul punctual euclidian $\mathbb{E}$ se numește *real (complex)* dacă V este un spațiu vectorial real (complex). *Dimensiunea* lui $\mathbb{E}$ se definește ca fiind dimensiunea lui V. Un spațiu punctual euclidian de dimensiune n va fi notat cu $\mathbb{E}_n$.

9.2. Pentru orice punct $A \in \mathbb{E}$ și orice vector $\bar{v} \in V$ există un singur punct $B \in \mathbb{E}$ astfel încît $\bar{v} = f(A, B)$.

9.3. Există spații punctuale euclidiene care nu sînt spații vectoriale. Orice spațiu vectorial euclidian V este un spațiu punctual euclidian deoarece funcția $f: V \times V \to V$ definită prin $f(\bar{u}, \bar{v}) = \bar{u} - \bar{v}$ satisface (i) și (ii).

9.4. Fie $\mathbb{E}$ un spațiu punctual euclidian, V spațiul vectorial euclidian asociat și f funcția de structură afină. O pereche ordonată (A, B) de puncte din $\mathbb{E}$ se numește *vector tangent la* $\mathbb{E}$ în punctul A *(segment orientat, vector legat)*. Punctul A se numește *originea* sau *punctul de aplicație* al vectorului tangent, iar B se numește extremitatea sa. Valoarea $f(A, B)$ se numește *partea vectorială* a lui (A, B). Dacă O este originea lui $\mathbb{E}$, atunci (O, B) se numește *vector de poziție* al punctului B.

Mulțimea tuturor vectorilor tangenți la $\mathbb{E}$ în punctul A se numește *spațiu tangent la* $\mathbb{E}$ *în punctul* A și se notează cu $T_A\mathbb{E}$. Această mulțime este un spațiu vectorial euclidian izomorf cu V.

Doi vectori tangenți (A, B) și (C, D) se numesc egali dacă au aceeași parte vectorială $f(A, B) = f(C, D)$ și același punct de aplicație, $A = C$. Doi vectori (A, B) și (C, D) care au aceeași parte vectorială, $f(A, B) = f(C, D)$, dar care au puncte de aplicație diferite, $A \neq C$, se numesc *paraleli*.

Mulțimea tuturor vectorilor tangenți la $\mathbb{E}$ paraleli cu un vector tangent dat se numește *vector liber* și se identifică cu un vector director (element al lui V).

9.5. Un vector legat (A, B) se notează cu $\overrightarrow{AB}$ sau cu $\vec{v}$ dacă $f(A, B) = \vec{v}$; un vector liber se notează fie prin $\overrightarrow{AB}$, dacă $\overrightarrow{AB}$ este un segment orientat din mulțimea numită vector liber, fie prin $\bar{v}$ dacă $f(A, B) = \bar{v}$.

9.6. Fie $\mathbb{E}$ un spațiu punctual euclidian. Funcția $d: \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}_+$ definită prin $d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB})}$ este o distanță pe $\mathbb{E}$.

9.7. Fie Σ o mulțime închisă din $\mathbb{E}_n$, fie A un punct oarecare din $\mathbb{E}_n$ și B un punct oarecare din Σ. Marginea inferioară

$$d = d(A, \Sigma) = \inf_{B \in \Sigma} d(A, B)$$

se numește *distanța de la A la Σ*. Aceasta este de fapt minimul funcției $B \to d(A, B)$.

Fie Σ_1 și Σ_2 două mulțimi închise din $\mathbb{E}_n$, fie A un punct oarecare din Σ_1 și B un punct oarecare din Σ_2. Marginea inferioară

$$d = d(\Sigma_1, \Sigma_2) = \inf_{A \in \Sigma_1,\, B \in \Sigma_2} d(A, B)$$

se numește *distanța de la Σ_1 la Σ_2*. Dacă Σ_1 este compactă și dacă $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$, atunci $d = d(\Sigma_1, \Sigma_2)$ este minimul funcției $(A, B) \to d(A, B)$.

9.8. Fie $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ o bază ortonormată a spațiului director V și O originea spațiului punctual euclidian $\mathbb{E}_n$. Ansamblul $\mathcal{R} = \{O, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)\}$ se numește *reper cartezian* în $\mathbb{E}_n$.

Coordonatele $(x_1, \ldots, x_n)$ ale vectorului de poziție $\overrightarrow{OM} = x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n$ se numesc *coordonatele carteziene ale punctului M* în raport cu $\mathcal{R}$.

Fie $A(x_1, \ldots, x_n)$ și $B(y_1, \ldots, y_n)$. Rezultă $\overrightarrow{AB} = (y_1 - x_1)\vec{e}_1 + \ldots + \ldots + (y_n - x_n)\vec{e}_n$, $d(A, B) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}$.

§ 10. Probleme

1. Fie mulțimea $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pe care definim operațiile (1) $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^3$, (2) $kx = (kx_1, 0, kx_3)$, $\forall\, k \in \mathbb{R}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^3$, (3) $kx = (kx_1, kx_2, x_3)$, $\forall\, k \in \mathbb{R}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^3$.

Formează $\mathbb{R}^3$ un spațiu vectorial real față de operațiile (1) și (2)? Dar față de (1) și (3)?

2. Să se arate că mulțimea tuturor șirurilor convergente cu elemente din $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sau $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) formează un spațiu vectorial peste $\mathbb{K}$ în raport cu adunarea a două șiruri și înmulțirea dintre un număr și un șir.

3. Să se stabilească dacă mulțimea tuturor funcțiilor reale de clasă C^k pe $U \subset \mathbb{R}^n$ este un spațiu vectorial real în raport cu adunarea funcțiilor și înmulțirea dintre un număr și o funcție.

4. Idem pentru mulțimea funcțiilor integrabile pe $[a, b]$.

5. Fie V un spațiu vectorial real. Pe $V \times V$ definim operațiile

$$(u, v) + (x, y) = (u + x,\ v + y)$$

$$(a + ib)(u, v) = (au - bv,\ bu + av),\ a + ib \in \mathbb{C}.$$

Să se arate că $V \times V$ este un spațiu vectorial peste $\mathbb{C}$ (acest spațiu se numește *complexificatul* lui V și îl notăm cu ${}^{\mathbb{C}}V$).

6. Să se stabilească dacă mulțimile

$$A = \{p \in \mathbb{R}_n[X] \mid \exists\, q \in \mathbb{R}_n[X] \text{ a.î. } p(x) = q(x + 1) - q(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}\}$$

$$B = \{p \in \mathbb{R}_n[X] \mid p(x) = p(x + 1),\ \forall\, x \in \mathbb{R}\}$$

sînt subspații vectoriale ale spațiului vectorial al polinoamelor cu coeficienți reali, de grad cel mult n.

7. Să se cerceteze dacă vectorul $v = (1, -2, 0, 3)$ este o combinație liniară a vectorilor $u_1 = (3, 9, -4, -2)$, $u_2 = (2, 3, 0, -1)$, $u_3 = (2, -1, 2, 1)$.

8. Dîndu-se subspațiile W și U generate respectiv de vectorii $w_1 = (2, 3, 11, 5)$, $w_2 = (1, 1, 5, 2)$, $w_3 = (0, 1, 1, 1)$; $u_1 = (2, 1, 3, 2)$, $u_2 = (1, 1, 3, 4)$, $u_3 = (5, 2, 6, 2)$, să se arate că aceste subspații sînt suplimentare și să se găsească descompunerea vectorului $v = (2, 0, 0, 3)$ pe aceste subspații.

9. Să se stabilească care dintre următoarele submulțimi ale lui $C^\infty(\mathbb{R})$ sînt liniar dependente, respectiv liniar independente $\{1, \cos 2x, \cos^2 x\}$, $\{e^x, e^{-x}, \operatorname{ch} x\}$, $\{e^x, xe^x, \ldots, x^{n-1}e^x\}$.

Fie $f_1, f_2, \ldots, f_n \in C^\infty(\mathbb{R})$. Determinantul $w = \det [f_j^{(i-1)}]$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, se numește *wronskianul* funcțiilor $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Să se arate că $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ este liniar dependentă dacă și numai dacă wronskianul este nul.

10. Fie $\mathbb{K}[X]$ spațiul vectorial al tuturor polinoamelor în nedeterminata X. Să se arate că $\{1, X, X^2, \ldots, X^n, \ldots\}$ este o mulțime liniar independentă.

11. Să se găsească o bază a sumei și o bază a intersecției subspațiilor vectoriale W și U generate respectiv de vectorii

$$w_1 = (1, 2, 1),\ w_2 = (2, 3, 1),\ w_3 = (3, 1, 1)$$

$$u_1 = (0, 4, 1),\ u_2 = (1, 0, -2),\ u_3 = (1, 0, 3)$$

12. Să se stabilească dimensiunea subspațiului $\mathscr{A} \subset \mathscr{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$

$$\mathscr{A} = \left\{ A \mid A = \begin{bmatrix} x & 0 & y \\ u & v & 0 \end{bmatrix},\ y = u - 3v,\ x, y, u, v \in \mathbb{R} \right\}$$

și să se găsească o bază.

13. Să se determine coordonatele vectorului $x = (0, 0, 1, 1)$ în baza $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$; $e_1 = (1, 1, 0, 1)$, $e_2 = (2, 1, 3, 1)$, $e_3 = (1, 1, 0, 0)$, $e_4 = (0, 1, -1, -1)$.

14. Fie V_5 spațiul vectorial real al polinoamelor în $\cos x$ care au cel mult gradul 4. Să se scrie transformarea de coordonate care permite trecerea de la baza $B = \{1, \cos x, \cos^2 x, \cos^3 x, \cos^4 x\}$ la baza $B' = \{1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \cos 4x\}$ și să se găsească inversa acestei transformări.

15. Fie spațiul vectorial complex n-dimensional $\mathbb{C}^n$ și fie ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n$ trecerea în real a lui $\mathbb{C}^n$. Știind că oricărui vector $z = (a_1 + ib_1, a_2 + ib_2, \ldots, a_n + ib_n)$ din $\mathbb{C}^n$ îi corespunde vectorul $(a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n)$ din ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n$, să se stabilească vectorul din ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n$ care este asociat lui iz.

Dacă $\mathbb{C}^n$ este înzestrat cu produsul scalar $(z, w) = \alpha_1\bar{\beta}_1 + \alpha_2\bar{\beta}_2 + \ldots + \alpha_n\bar{\beta}_n$, unde $z = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $w = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, să se stabilească ce produs scalar se induce în ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n$.

16. Să se arate că aplicațiile $(\ ,\ ) : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ definite prin formulele (*) $(p, q) = \sum_{j=0}^{n} a_j b_j$, (**) $(p, q) = \sum_{j=0}^{n} (j!)^2 a_j b_j$, unde $p = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j$, $q = \sum_{j=0}^{n} b_j X^j$, sînt respectiv produse scalare.

Să se calculeze unghiul dintre polinoamele p și q, față de produsul scalar (*), respectiv (**), unde $p = 4 + X^2$, $q = 2 - 3X - 2X^2$.

17. Fie spațiul vectorial euclidian real $C^0([0, 4])$ în care produsul scalar este dat de $(f, g) = \int_0^4 f(x)\, g(x)\mathrm{d}x$; să se scrie inegalitatea lui Cauchy-Schwarz și să se calculeze $d(f, g)$, $\|g\|$, unde

$$f(x) = 1,\ g(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 2] \\ 4 - x, & x \in (2, 4]. \end{cases}$$

18. În spațiul euclidian canonic $\mathbb{R}^3$, fie vectorul $v = (14, -3, -6)$ și submulțimea $S = \{a_1, a_2, a_3\}$, unde $a_1 = (-3, 0, 7)$, $a_2 = (1, 4, 3)$, $a_3 = (2, 2, -2)$. Să se găsească proiecția ortogonală w a lui v pe $L(S)$ și vectorul $w^{\perp}$.

19. Fie $\mathbb{R}^4$ spațiul vectorial euclidian canonic cu patru dimensiuni. Să se găsească o bază ortonormată pentru subspațiul generat de vectorii $x_1 = (0, 1, 1, 0)$, $x_2 = (0, 4, 0, 1)$, $x_3 = (1, -1, 1, 0)$, $x_4 = (1, 3, 0, 1)$.

20. Fie spațiul vectorial euclidian $C^0([0, 1])$ în care produsul scalar este definit prin aplicația $(f, g) = \int_0^1 f(x)\, g(x)\mathrm{d}x$. Să se ortonormeze mulțimea $\{2, 2 + x, (2 + x)^2, (2 + x)^3\}$.

Capitolul 3

TRANSFORMĂRI LINIARE

§ 1. Proprietăţi generale

Fie V şi W două spaţii vectoriale peste cîmpul $\mathbb{K}$.

1.1. *Definiţie. O funcţie* $\mathcal{T} : V \to W$ *cu proprietăţile*

$$\mathcal{T}(x + y) = \mathcal{T}(x) + \mathcal{T}(y), \qquad \forall\, x, y \in V,$$
$$\mathcal{T}(kx) = k\mathcal{T}(x), \qquad \forall\, k \in \mathbb{K},\ \forall\, x \in V$$

se numeşte transformare liniară (operator liniar sau homomorfism de spaţii vectoriale).

Precizare: uneori în loc de $\mathcal{T}(x)$ se scrie $\mathcal{T}x$.

Restricţia unei transformări liniare la un subspaţiu vectorial al lui V este tot o transformare liniară, dar restricţia unei transformări liniare la o submulţime a lui V care nu este subspaţiu vectorial nu mai este o transformare liniară. Orice transformare liniară definită pe un subspaţiu vectorial al unui spaţiu vectorial V poate fi prelungită la o transformare liniară definită pe V.

O transformare liniară $\ell : V \to \mathbb{K}$ (cîmpul $\mathbb{K}$ este considerat ca spaţiu vectorial aritmetic cu o dimensiune peste $\mathbb{K}$) se numeşte *formă liniară.*

1.2. Teoremă. Funcţia $\mathcal{T} : V \to W$ este o transformare liniară dacă şi numai dacă

$$\mathcal{T}(kx + ly) = k\mathcal{T}(x) + l\mathcal{T}(y), \qquad \forall\, k, l \in \mathbb{K},\ x, y \in V.$$

Demonstraţie. Dacă $\mathcal{T} : V \to W$ este liniară, atunci conform definiţiei 1.1 avem $\mathcal{T}(kx + ly) = \mathcal{T}(kx) + \mathcal{T}(ly) = k\mathcal{T}(x) + l\mathcal{T}(y)$ şi deci condiţia din teoremă este satisfăcută.

Reciproc, condiţia din teoremă împreună cu ipoteza $k = l = 1$ dă $\mathcal{T}(x + y) = \mathcal{T}(x) + \mathcal{T}(y)$, iar împreună cu ipoteza $l = 0$ implică $\mathcal{T}(kx) = k\mathcal{T}(x)$.

Exemple. 1) Fie aplicaţia $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definită prin

$$\mathcal{T}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_1 + x_2).$$

Succesiv avem $\mathcal{T}((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) = \mathcal{T}(x_1 + y_1,\ x_2 + y_2) = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ x_1 + y_1 + x_2 + y_2) = (x_1, x_2, x_1 + x_2) + (y_1, y_2, y_1 + y_2) = \mathcal{T}(x_1, x_2) + \mathcal{T}(y_1, y_2)$, $\forall\, (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Analog, $\mathcal{T}(k(x_1, x_2)) = \mathcal{T}(kx_1, kx_2) = (kx_1, kx_2, kx_1 + kx_2) = k(x_1, x_2,\ x_1 + x_2) = k\mathcal{T}(x_1, x_2)$, $\forall\, k \in \mathbb{R}$, $\forall\, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

2) Fie $\mathbb{K}[X]$ spaţiul vectorial al polinoamelor în nedeterminata X cu coeficienţi din $\mathbb{K}$. Derivata $D : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ este o transformare liniară.

1.3. Teoremă. Fie $\mathcal{T} : V \to W$ o transformare liniară.

1) $\mathcal{T}(0) = 0$.

2) Dacă U este un subspaţiu vectorial al lui V, atunci $\mathcal{T}(U)$ este un subspaţiu vectorial al lui W.

3) Dacă vectorii $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$ sînt liniar dependenţi, atunci şi vectorii $\mathcal{T}(x_1), \mathcal{T}(x_2), \ldots, \mathcal{T}(x_n) \in W$ sînt liniar dependenţi.

Demonstrație. 1) Relația $\mathcal{T}(kx) = k\mathcal{T}(x)$, $\forall\, k \in \mathbb{K}$, $\forall\, x \in V$ implică $\mathcal{T}(0) = 0\mathcal{T}(0) = 0$.

2) Fie $u, v \in \mathcal{T}(U)$ și $k, l \in \mathbb{K}$. Existența elementelor x, $y \in V$ astfel încît $u = \mathcal{T}(x)$, $v = \mathcal{T}(y)$, împreună cu liniaritatea lui $\mathcal{T}$ implică $ku + lv = k\mathcal{T}(x) + l\mathcal{T}(y) = \mathcal{T}(kx + ly) \in \mathcal{T}(U)$. De aceea $\mathcal{T}(U)$ este un subspațiu vectorial al lui W.

3) Temă.

Fie $\mathcal{L}(V, W)$ mulțimea tuturor transformărilor liniare definite pe V și cu valori în W. *Egalitatea* transformărilor liniare, *adunarea* și *înmulțirea cu scalari* se definesc ca la funcții; dacă $\mathcal{S}$, $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(V, W)$, atunci

$$\mathcal{S} = \mathcal{T} \Leftrightarrow \mathcal{S}(x) = \mathcal{T}(x), \qquad \forall\, x \in V,$$

$$(\mathcal{S} + \mathcal{T})(x) = \mathcal{S}(x) + \mathcal{T}(x), \qquad \forall\, x \in V,$$

$$(k\mathcal{S})(x) = k\mathcal{S}(x), \qquad \forall\, k \in \mathbb{K},\ \forall\, x \in V.$$

În raport cu aceste operații mulțimea $\mathcal{L}(V, W)$ este un spațiu vectorial peste cîmpul $\mathbb{K}$.

Elementele lui $\mathcal{L}(V, V)$ se numesc *endomorfisme* ale lui V.

Spațiul vectorial $\mathcal{L}(V, \mathbb{K})$ al tuturor formelor liniare definite pe V și cu valori în $\mathbb{K}$ se numește *dualul lui* V. O parte a dualului lui $\mathcal{L}(V, \mathbb{K})$ se identifică cu V, fiind izomorfe.

1.4. Teoremă. Fie V_n și W două spații vectoriale peste cîmpul $\mathbb{K}$, fie $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază a lui V_n, iar $w_1, w_2, \ldots, w_n$, n vectori arbitrari din W.

1) Există o transformare liniară unică $\mathcal{T} : V_n \to W$ care satisface $\mathcal{T}(e_i) = w_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

2) Dacă vectorii $w_1, w_2, \ldots, w_n$ sînt liniar independenți, atunci transformarea liniară $\mathcal{T}$ determinată de condițiile $\mathcal{T}(e_i) = w_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ este injectivă.

Demonstrație. 1) Fie $x \in V_n$, adică $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Regula $x \to \mathcal{T}(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i$ definește o funcție $\mathcal{T} : V_n \to W$, cu proprietatea $\mathcal{T}(e_i) = w_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Să arătăm că $\mathcal{T}$ este o transformare liniară. Pentru aceasta observăm că dacă $y \in V_n$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, atunci $kx + ly = \sum_{i=1}^{n} (kx_i + ly_i)e_i \in V_n$, $\forall\, k, l \in \mathbb{K}$ și $\mathcal{T}(kx + ly) = \sum_{i=1}^{n} (kx_i + ly_i)w_i = k\sum_{i=1}^{n} x_i w_i + l\sum_{i=1}^{n} y_i w_i = k\mathcal{T}(x) + l\mathcal{T}(y)$.

Unicitatea lui $\mathcal{T}$ se demonstrează prin reducere la absurd.

2) Fie $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ doi vectori oarecare din V_n. Ipotezele $\mathcal{T}(e_i) = w_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\mathcal{T}(x) = \mathcal{T}(y)$ implică $\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)w_i = 0$. Aceasta împreună cu liniar independența vectorilor $w_1, w_2, \ldots, w_n$ dă $x_i = y_i$, adică $x = y$.

Compunerea a două transformări liniare, definită ca la funcţii, este numită *înmulţire* (*produs*) şi are ca rezultat tot o transformare liniară. Evident compunerea nu este comutativă, dar este asociativă.

Compunerea poate fi combinată cu operaţiile algebrice de adunare şi înmulţire cu scalari:

1) dacă $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ sînt transformări liniare pentru care au sens $\mathcal{A} + \mathcal{B}$, $\mathcal{A}\mathcal{B}$, şi $\mathcal{B}\mathcal{C}$, atunci $\forall\, k, l \in \mathbb{K}$,

$$(k\mathcal{A} + l\mathcal{B})\mathcal{C} = k\mathcal{A}\mathcal{C} + l\mathcal{B}\mathcal{C}$$

2) dacă $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ sînt transformări liniare pentru care au sens $\mathcal{A} + \mathcal{B}$, $\mathcal{C}\mathcal{A}$ şi $\mathcal{C}\mathcal{B}$, atunci $\forall\, k, l \in \mathbb{K}$,

$$\mathcal{C}(k\mathcal{A} + l\mathcal{B}) = k\mathcal{C}\mathcal{A} + l\mathcal{C}\mathcal{B}.$$

Fie $\mathcal{T}$ un endomorfism al lui $\boldsymbol{V}$. Puterile naturale ale lui $\mathcal{T}$ se definesc inductiv:

$$\mathcal{T}^0 = \mathcal{J}, \quad \mathcal{T}^n = \mathcal{T}\mathcal{T}^{n-1}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

unde $\mathcal{J}$ este identitatea.

Fie $\mathcal{T} : \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{V}$ o transformare liniară *bijectivă* (*inversabilă*). Inversa $\mathcal{T}^{-1} : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{U}$ este tot o transformare liniară. În plus dacă $\mathcal{T} : \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{V}$ şi $\mathcal{S} : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ sînt transformări liniare bijective, atunci $\mathcal{S} \circ \mathcal{T} : \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{W}$ este o transformare liniară bijectivă şi $(\mathcal{S} \circ \mathcal{T})^{-1} = \mathcal{T}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1}$.

O transformare liniară bijectivă se numeşte *izomorfism* de spaţii vectoriale (vezi Cap. 2 § 5).

§ 2. Nucleu şi imagine

Fie $\boldsymbol{V}$ şi $\boldsymbol{W}$ două spaţii vectoriale peste cîmpul $\mathbb{K}$, iar $\mathcal{T} : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ o transformare liniară.

2.1. *Definiţie* (fig. 1). *Mulţimea*

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{T}) = \{x \mid x \in \boldsymbol{V},\ \mathcal{T}(x) = 0\} \subset \boldsymbol{V}$$

se numeşte nucleul lui $\mathcal{T}$.

Mulţimea $\mathrm{Im}(\mathcal{T}) = \mathcal{T}(\boldsymbol{V}) \subset \boldsymbol{W}$ *se numeşte imaginea lui* $\boldsymbol{V}$ *prin* $\mathcal{T}$.

2.2. Teoremă. Fie $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W})$.

1) Nucleul lui $\mathcal{T}$ este un subspaţiu vectorial al lui $\boldsymbol{V}$.

2) Imaginea lui $\boldsymbol{V}$ prin $\mathcal{T}$ este un subspaţiu vectorial al lui $\boldsymbol{W}$

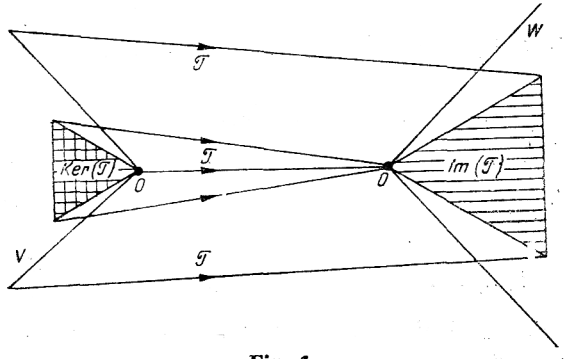


Fig. 1

Demonstrație. 1) Fie $x, y \in \mathrm{Ker}\mathcal{T}$, adică $\mathcal{T}(x) = 0$, $\mathcal{T}(y) = 0$. Liniaritatea lui $\mathcal{T}$ implică $\mathcal{T}(kx + ly) = 0$, $\forall\, k, l \in \mathbb{K}$, și deci $kx + ly \in \mathrm{Ker}(\mathcal{T})$, $\forall\, k, l \in \mathbb{K}$.

2) Temă!

Exemplu. Pentru $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\mathcal{T}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_1 + x_2)$ găsim $\mathrm{Ker}(\mathcal{T}) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | (x_1, x_2, x_1 + x_2) = (0, 0, 0)\} = \{(0, 0)\}$, $\mathrm{Im}(\mathcal{T}) = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 / \exists\, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, (x_1, x_2, x_1 + x_2) = (y_1, y_2, y_3)\} = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 / y_1 + y_2 = y_3\}$. Se observă că $\mathcal{T}$ este injectivă, dar nu este surjectivă.

2.3. Teoremă. Dacă $\mathcal{T} : V \to W$ este o transformare liniară, atunci următoarele afirmații sînt echivalente.

(1) $\mathcal{T}$ este injectivă.

(2) $\mathcal{T} : V \to \mathcal{T}(V)$ este inversabilă.

(3) $\mathrm{Ker}(\mathcal{T}) = \{0\}$.

Demonstrație. Echivalența dintre (1) și (2) este evidentă. De aceea este suficient să dovedim că (1) este echivalentă cu (3).

Fie $\mathrm{Ker}(\mathcal{T}) = \{0\}$. Ipoteza $\mathcal{T}(x) = \mathcal{T}(y)$ împreună cu liniaritatea lui $\mathcal{T}$ implică $\mathcal{T}(x - y) = 0$, adică $x - y \in \mathrm{Ker}(\mathcal{T})$. Astfel $x - y = 0$, adică $x = y$ și deci $\mathcal{T}$ este injectivă.

Presupunem că $\mathcal{T}$ este injectivă. Această ipoteză împreună cu proprietatea generală $\mathcal{T}(0) = 0$ implică $\mathrm{Ker}(\mathcal{T}) = \{0\}$.

2.4. Teoremă. Dacă V este finit dimensional, atunci și spațiul vectorial $\mathrm{Im}(\mathcal{T})$ este finit dimensional și

$$\dim \mathrm{Ker}(\mathcal{T}) + \dim \mathrm{Im}(\mathcal{T}) = \dim V.$$

Dimensiunea nucleului lui $\mathcal{T}$ se numește *defectul* lui $\mathcal{T}$, iar dimensiunea imaginii lui V prin $\mathcal{T}$ se numește *rangul* lui $\mathcal{T}$.

Demonstrație. Fie $n = \dim V$ și $p = \dim \mathrm{Ker}(\mathcal{T})$. Cazul $p = 0$ este lăsat pentru cititor. Dacă $p \geqslant 1$, alegem o bază $\{e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n\}$ în V astfel încît $\{e_1, \ldots, e_p\}$ să fie o bază în $\mathrm{Ker}(\mathcal{T})$. Pentru orice $y \in \mathrm{Im}(\mathcal{T})$ există un $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in V$ astfel încît $y = \mathcal{T}(x) = \mathcal{T}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathcal{T}(e_i) = x_{p+1}\mathcal{T}(e_{p+1}) + \ldots + x_n \mathcal{T}(e_n)$, deoarece $\mathcal{T}(e_1) = 0, \ldots, \mathcal{T}(e_p) = 0$. Rezultă că $\mathcal{T}(e_{p+1}), \ldots, \mathcal{T}(e_n)$ generează pe $\mathrm{Im}(\mathcal{T})$. Să arătăm că acești vectori sînt liniar independenți: din $k_{p+1}\mathcal{T}(e_{p+1}) + \ldots + k_n \mathcal{T}(e_n) = 0$ găsim $\mathcal{T}(k_{p+1}e_{p+1} + \ldots + k_n e_n) = 0$, adică $k_{p+1}e_{p+1} + \ldots + k_n e_n \in \mathrm{Ker}(\mathcal{T})$ sau $k_{p+1}e_{p+1} + \ldots + k_n e_n = k_1 e_1 + \ldots + k_p e_p$; liniar independența bazei din V implică $k_1 = \ldots = k_p = k_{p+1} = \ldots = k_n = 0$.

În concluzie spațiul vectorial $\mathrm{Im}(\mathcal{T})$ este finit dimensional și $\dim \mathrm{Im}(\mathcal{T}) = \dim V - \dim \mathrm{Ker}(\mathcal{T})$.

Exemple. 1) Pentru endomorfismul $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definit prin $\mathcal{T}(x) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ avem $\mathrm{Ker}(\mathcal{T}) = \{x / \mathcal{T}(x) = 0\}$. Din $\mathcal{T}(x) = 0$ obținem sistemul $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ care se reduce la ecuația $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ ceea ce arată că sistemul este dublu nedeterminat și are soluția $(x_1, x_2, x_3 = -x_1 - x_2)$. În concluzie orice vector $x \in \mathrm{Ker}(\mathcal{T})$ are forma $x = (x_1, x_2, -x_1 - x_2) = x_1(1, 0, -1) + x_2(0, 1, -1)$. Vectorii $e_1 = (1, 0, -1)$ și $e_2 = (0, 1, -1)$ sînt liniar independenți și generează pe $\mathrm{Ker}(\mathcal{T})$ așa încît ei formează o bază în $\mathrm{Ker}(\mathcal{T})$. Deci $\dim \mathrm{Ker}(\mathcal{T}) = 2$.

Din definiția subspațiului $\mathrm{Im}(\mathcal{T})$ conchidem că orice vector din $\mathrm{Im}(\mathcal{T})$ are coordonatele egale așa încît orice doi vectori din această mulțime sînt liniar dependenți. Deci $\dim \mathrm{Im}(\mathcal{T}) = 1$. Evident $\dim \mathrm{Im}(\mathcal{T}) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathrm{Ker}(\mathcal{T}) = 3 - 2 = 1$.

2) Fie $\boldsymbol{V}$ spațiul vectorial al tuturor funcțiilor reale continue pe $[a, b]$ și endomorfismul $\mathcal{T} : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ definit prin $g = \mathcal{T}(f)$ unde $g(x) = \int_a^b f(t) \cos (x - t) \mathrm{d}t$, $x \in [a, b]$. Să determinăm $\mathrm{Ker}(\mathcal{T})$. Anume condiția $\mathcal{T}(x) = 0$ implică $g(x) = 0$ adică $\int_a^b f(t) \cos (x - t) \mathrm{d}t = 0$, $\forall\, x \in [a, b]$. Ori această condiție este echivalentă cu $\left(\int_a^b f(t) \cos t \,\mathrm{d}t\right) \cos x + \left(\int_a^b f(t) \sin t \,\mathrm{d}t\right) \sin x = 0$, $\forall\, x \in [a, b]$ ceea ce înseamnă că $\int_a^b f(t) \cos t \,\mathrm{d}t = 0$, $\int_a^b f(t) \sin t \,\mathrm{d}t = 0$.

Deci $\mathrm{Ker}(\mathcal{T})$ conține acele funcții f care sînt ortogonale funcțiilor cos și sin.

2.5. Teoremă. Presupunem că $\mathcal{T} : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ este o transformare liniară, iar $\dim \boldsymbol{V} = n$. Atunci următoarele afirmații sînt echivalente.

(1) $\mathcal{T}$ este injectivă.

(2) Dacă $e_1, \ldots, e_p \in \boldsymbol{V}$ sînt vectori liniar independenți, atunci și $\mathcal{T}(e_1), \ldots, \mathcal{T}(e_p) \in \mathcal{T}(\boldsymbol{V}) \subset \boldsymbol{W}$ sînt vectori liniar independenți.

(3) $\dim \mathcal{T}(\boldsymbol{V}) = n$.

(4) Dacă $\{e_1, \ldots, e_n\}$ este o bază pentru $\boldsymbol{V}$, atunci $\{\mathcal{T}(e_1), \ldots, \mathcal{T}(e_n)\}$ este o bază pentru $\mathcal{T}(\boldsymbol{V})$.

Demonstrație. Cea mai simplă justificare este dovedirea implicațiilor (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1).

Admitem că $\mathcal{T}$ este injectivă, iar $e_1, \ldots, e_p \in \boldsymbol{V}$ sînt vectori liniar independenți. Relația $k_1 \mathcal{T}(e_1) + \ldots + k_p \mathcal{T}(e_p) = 0$ implică $\mathcal{T}(k_1 e_1 + \ldots + k_p e_p) = 0$, adică $k_1 e_1 + \ldots + k_p e_p \in \mathrm{Ker}(\mathcal{T}) = \{0\}$. Deci $k_1 e_1 + \ldots + k_p e_p = 0$ și prin urmare $k_1 = \ldots = k_p = 0$. Astfel (1) $\Rightarrow$ (2).

Dacă (2) este adevărată $\forall\, p \leqslant n$, iar $\{e_1, \ldots, e_n\}$ este o bază în $\boldsymbol{V}$, atunci vectorii $\mathcal{T}(e_1), \ldots, \mathcal{T}(e_n)$ sînt liniar independenți. De aceea $\dim \mathcal{T}(\boldsymbol{V}) \geqslant n$. Pe de altă parte teorema 2.4 arată că $\dim \mathcal{T}(\boldsymbol{V}) \leqslant n$. Rămîne că $\dim \mathcal{T}(\boldsymbol{V}) = n$, adică (2) $\Rightarrow$ (3).

Fie (3) și $\{e_1, \ldots, e_n\}$ o bază în $\boldsymbol{V}$. Pentru orice $y \in \mathcal{T}(\boldsymbol{V})$ există $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \boldsymbol{V}$ astfel încît $y = \mathcal{T}(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathcal{T}(e_i)$. De aceea $\{\mathcal{T}(e_1), \ldots, \mathcal{T}(e_n)\}$ generează pe $\mathcal{T}(\boldsymbol{V})$. Aceasta împreună cu $\dim \mathcal{T}(\boldsymbol{V}) = n$ implică faptul că $\{\mathcal{T}(e_1), \ldots, \mathcal{T}(e_n)\}$ este o bază a lui $\mathcal{T}(\boldsymbol{V})$. Deci (3) $\Rightarrow$ (4).

Dacă (4) este adevărată, atunci $\mathcal{T}(x) = 0$ implică $x = 0$ și deci $\mathrm{Ker}(\mathcal{T}) = \{0\}$, adică (4) $\Rightarrow$ (1).

2.6. Teoremă. O transformare liniară injectivă $\mathcal{T} : \boldsymbol{V}_n \to \boldsymbol{W}_n$ este bijectivă.

Demonstrație. Presupunem că $\mathcal{T}$ este injectivă, adică $\mathrm{Ker}(\mathcal{T}) = \{0\}$. Relațiile $\dim \mathrm{Ker}(\mathcal{T}) = 0$, $\dim \boldsymbol{V} = \dim \mathrm{Ker}(\mathcal{T}) + \dim \mathrm{Im}(\mathcal{T})$ implică $\dim \mathrm{Im}(\mathcal{T}) = n$. Aceasta împreună cu $\mathrm{Im}(\mathcal{T}) \subset \boldsymbol{W}_n$ implică $\mathrm{Im}(\mathcal{T}) = \boldsymbol{W}_n$, adică $\mathcal{T}$ este și surjectivă.

Exemple. 1) Transformarea liniară $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definită prin $\mathcal{T}(x) = (x_1 + x_2 - 2x_3, x_2, x_1 - x_3)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ este bijectivă. Într-adevăr $\mathcal{T}$ fiind un endomorfism este suficient să arătăm că este injectiv. Din $\mathcal{T}(x) = 0$ rezultă sistemul liniar și omogen $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$, $x_2 = 0$, $x_1 - x_3 = 0$, care admite numai soluția banală $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. În concluzie $\operatorname{Ker}\mathcal{T} = \{0\}$. Pentru a determina transformarea inversă notăm $\mathcal{T}(x) = y$, unde $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Obținem sistemul liniar $x_1 + x_2 - 2x_3 = y_1$, $x_2 = y_2$, $x_1 - x_3 = y_3$ cu soluția $x_1 = y_2 - y_1 + 2y_3$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_2 - y_1 + y_3$. Deci $\mathcal{T}^{-1}(x) = (x_2 - x_1 + 2x_3, x_2, x_2 - x_1 + x_3)$.

2) Endomorfismul $\mathcal{T} : V \to V$ cu proprietatea că $\mathcal{T}^2 - \mathcal{T} + \mathcal{J} = \mathcal{O}$ este inversabil. Într-adevăr dacă $\mathcal{T}(x_1) = \mathcal{T}(x_2)$, $x_1, x_2 \in V$ avem și $\mathcal{T}^2(x_1) = \mathcal{T}^2(x_2)$ și atunci, din $\mathcal{T}^2(x_1) - \mathcal{T}(x_1) + x_1 = 0$ și $\mathcal{T}^2(x_2) - \mathcal{T}(x_2) + x_2 = 0$, rezultă $x_1 = x_2$; deci $\mathcal{T}$ este injectiv.

Notînd $x = y - \mathcal{T}(y)$ rezultă $\mathcal{T}(x) = \mathcal{T}(y) - \mathcal{T}^2(y)$. Din condiția $\mathcal{T}^2 - \mathcal{T} + \mathcal{J} = \mathcal{O}$ avem $\mathcal{J} = \mathcal{T} - \mathcal{T}^2$ așa încît $y = \mathcal{T}(y) - \mathcal{T}^2(y)$. Cele două egalități implică $y = \mathcal{T}(x)$ adică $\mathcal{T}(V) = V$, ceea ce înseamnă că $\mathcal{T}$ este surjectiv. Cum $\mathcal{T}$ este injectiv și surjectiv rezultă că $\mathcal{T}$ este bijectiv.

§ 3. Matricea unei transformări liniare

Fie V_n și W_m două spații vectoriale finit dimensionale peste cîmpul $\mathbb{K}$ și $\mathcal{T} : V_n \to W_m$ o transformare liniară.

3.1. Teoremă. Dacă $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ este o bază a lui V_n, iar $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ este o bază a lui W_m, atunci există o matrice și numai una $T = [t_{ij}]$ de tipul $m \times n$ astfel încît $\mathcal{T}(e_j) = \sum_{i=1}^{m} t_{ij} w_i$. În plus, dacă $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ are imaginea $\mathcal{T}(x) = \sum_{i=1}^{m} y_i w_i$, atunci $y_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_j$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Notînd $X = {}^t[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, $Y = {}^t[y_1, y_2, \ldots, y_m]$ obținem scrierea matriceală $Y = TX$ a lui $\mathcal{T}$.

Demonstrație. Teorema 1.4 arată că $\mathcal{T}$ este unic determinată de valorile $\mathcal{T}(e_j) \in W_m$. Pe de altă parte fiecărui vector $\mathcal{T}(e_j)$, $j =$ fixat, i se atașează coordonatele sale $(t_{1j}, t_{2j}, \ldots, t_{mj})$ în raport cu baza $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$. Deci $\mathcal{T}(e_j) = \sum_{i=1}^{m} t_{ij} w_i$, $j = 1, 2, \ldots, n$, matricea $T = [t_{ij}]$ ale cărei coloane au drept elemente coordonatele vectorilor $\mathcal{T}(e_1), \mathcal{T}(e_2), \ldots, \mathcal{T}(e_n)$ în raport cu baza $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ fiind unic determinată.

Fie $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \in V$. Rezultă $\mathcal{T}(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathcal{T}(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} t_{ij} w_i \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_j \right) w_i$. Ținînd seama de $\mathcal{T}(x) = \sum_{i=1}^{m} y_i w_i$, găsim $y_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_j$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

T se numește *matricea asociată* transformării liniare $\mathcal{T}$ în raport cu perechea de baze considerate. Vom scrie $T = m(\mathcal{T})$.

Exemplu. Fie $\mathcal{T} : V_3 \to V_3$ endomorfismul definit prin $\mathcal{T}(\bar{v}) = \bar{v} \times \bar{a}$, $\bar{a}$ fixat (vezi Geometria analitică). Ne propunem să determinăm o bază în V_3 față de care matricea lui $\mathcal{T}$ să fie de forma

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\|\bar{a}\|^2 & 0 \end{bmatrix}$$

Pentru aceasta considerăm baza formată din vectorii $\bar{e}_1 = \bar{a}$, $\bar{e}_2 \in \mathrm{Im}(\mathscr{T})$, $\bar{e}_3 = \bar{e}_2 \times \bar{a}$. Renumerotînd, obținem baza formată de vectorii $\bar{f}_1 = \bar{e}_1$, $\bar{f}_2 = \bar{e}_3$, $\bar{f}_3 = \bar{e}_2$ în care $\mathscr{T}(\bar{f}_1) = \mathscr{T}(\bar{e}_1) = \bar{e}_1 \times \bar{a} = \bar{a} \times \bar{a} = \bar{0} = 0 \cdot \bar{f}_1 + 0 \cdot \bar{f}_2 + 0 \cdot \bar{f}_3$, $\mathscr{T}(\bar{f}_2) = \mathscr{T}(\bar{e}_3) = \bar{e}_3 \times \bar{a} = (\bar{e}_2 \times \bar{a}) \times \bar{a} = \bar{a}(\bar{a}, \bar{e}_2) - \bar{e}_2(\bar{a}, \bar{a}) = -(\bar{a}, \bar{a})\bar{e}_2 = -\|\bar{a}\|^2 \bar{f}_3 = 0 \cdot \bar{f}_1 + 0 \cdot \bar{f}_2 - \|\bar{a}\|^2 \bar{f}_3$ deoarece $\bar{e}_2 \in \mathrm{Im}(\mathscr{T})$ implică $(\bar{a}, \bar{e}_2) = 0$; $\mathscr{T}(\bar{f}_3) = \mathscr{T}(\bar{e}_2) = \bar{e}_2 \times \bar{a} = \bar{e}_3 = \bar{f}_2 = 0 \cdot \bar{f}_1 + 1 \cdot \bar{f}_2 + 0 \cdot \bar{f}_3$. Avînd în vedere definiția matricei unui endomorfism într-o bază rezultă că baza căutată este $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\}$.

Fie $\mathscr{L}(\boldsymbol{V}_n, \boldsymbol{W}_m)$ mulțimea tuturor transformărilor liniare de la $\boldsymbol{V}_n$ la $\boldsymbol{W}_m$ și $\mathscr{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ mulțimea tuturor matricelor de tipul $m \times n$ cu elemente din $\mathbb{K}$. Funcția $m : \mathscr{L}(\boldsymbol{V}_n, \boldsymbol{W}_m) \to \mathscr{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ definită prin $\mathscr{T} \to T$ (în raport cu baze fixate în $\boldsymbol{V}_n$ respectiv $\boldsymbol{W}_m$) este un izomorfism de spații vectoriale. De aceea spațiul vectorial $\mathscr{L}(\boldsymbol{V}_n, \boldsymbol{W}_m)$ are dimensiunea mn.

Izomorfismul m are proprietățile:

1) $m(\mathscr{S}\mathscr{T}) = m(\mathscr{S})m(\mathscr{T})$, dacă $\mathscr{S}\mathscr{T}$ are sens;

2) $\mathscr{S} : \boldsymbol{V}_n \to \boldsymbol{V}_n$ este inversabilă dacă și numai dacă $m(\mathscr{S})$ este inversabilă și $m(\mathscr{S}^{-1}) = (m(\mathscr{S}))^{-1}$.

Fie $\boldsymbol{V}_n$ un spațiu vectorial n-dimensional peste cîmpul $\mathbb{K}$ și $\mathscr{T} : \boldsymbol{V}_n \to \boldsymbol{V}_n$ o transformare liniară (endomorfism). Fixînd baze diferite în $\boldsymbol{V}_n$, lui $\mathscr{T}$ i se asociază matrice pătratice diferite.

3.2. Teoremă. Matricele A și B, pătratice de ordinul n, cu elemente din $\mathbb{K}$, reprezintă aceeași transformare liniară $\mathscr{T} : \boldsymbol{V}_n \to \boldsymbol{V}_n$ dacă și numai dacă există o matrice nesingulară C astfel încît $B = C^{-1}AC$. Matricea C este de fapt matricea de trecere de la baza veche la baza nouă.

Demonstrație. Fie $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ și $\{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$ două baze în $\boldsymbol{V}_n$, iar $C = [c_{ij}]$ matricea de trecere de la prima bază la a doua, adică $e'_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} e_i$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Fie $\mathscr{T} : \boldsymbol{V}_n \to \boldsymbol{V}_n$ o transformare liniară. Notăm cu $A = [a_{ij}]$ matricea atașată lui $\mathscr{T}$ în raport cu prima bază, adică $\mathscr{T}(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$, $j = 1, 2, \ldots, n$, și cu $B = [b_{ij}]$ matricea atașată lui $\mathscr{T}$ în raport cu a doua bază, adică $\mathscr{T}(e'_j) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} e'_i$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Relațiile $\mathscr{T}(e'_j) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} e'_i = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \left(\sum_{k=1}^{n} c_{ki} e_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} c_{ki} b_{ij} \right) e_k$, $\mathscr{T}(e'_j) = \mathscr{T}\left(\sum_{i=1}^{n} c_{ij} e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} \mathscr{T}(e_i) = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki} c_{ij} \right) e_k$ implică $\sum_{i=1}^{n} c_{ki} b_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} c_{ij}$ sau altfel scris $CB = AC$. Rezultă $B = C^{-1}AC$. Cu acestea teorema devine evidentă.

Exemplu. Fie $\mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ două endomorfisme definite prin $\mathscr{T}_1(x) = (x_4, x_2, x_3, x_1)$ respectiv $\mathscr{T}_2(x) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, 0, 0, 0)$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$. Să se determine matricea sumei $\mathscr{T} = \mathscr{T}_1 + \mathscr{T}_2$ în raport cu baza determinată de vectorii $f_1 = (1, -1, 2, 3)$, $f_2 = (2, 1, 1, 0)$, $f_3 = (3, -2, 0, 0)$, $f_4 = (4, 0, 0, 0)$.

Deoarece $\mathscr{T}(x) = (\mathscr{T}_1 + \mathscr{T}_2)(x) = (x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4, x_2, x_3, x_1)$ rezultă că pentru baza canonică $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ a lui $\mathbb{R}^4$ avem $\mathscr{T}(e_1) = (1, 0, 0, 1)$, $\mathscr{T}(e_2) = (1, 1, 0, 0)$, $\mathscr{T}(e_3) = (1, 0, 1, 0)$ și $\mathscr{T}(e_4) = (2, 0, 0, 0)$. Matricea lui

$\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$ în această bază este

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

și avînd în vedere că matricea de trecere de la baza canonică la baza formată de vectorii f_i, $i = 1, 2, 3, 4$ este

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

rezultă că matricea lui $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$ în baza formată de vectorii f_i, este

$$B = C^{-1}AC = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 1 & 4/3 \\ 4/3 & -1/3 & -2 & -8/3 \\ 1 & -1 & -1/2 & -2 \\ 1/2 & 7/4 & 11/8 & 7/2 \end{bmatrix}$$

La același rezultat se ajunge dacă scriem matricele T_1 și T_2 ale lui $\mathcal{T}_1$ și $\mathcal{T}_2$.

Matricele $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ se numesc *asemenea* dacă există o matrice nesingulară $C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ astfel încît $B = C^{-1}AC$. Asemănarea matricelor este o relație de echivalență pe $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, fiecare clasă de echivalență corespunzînd la un endomorfism $\mathcal{T}$ al lui V_n.

1) Deoarece C este nesingulară, matricele B și A au același rang; acest număr este de fapt *rangul endomorfismului* $\mathcal{T}$.

2) Deoarece $\det B = \det(C^{-1}AC) = (\det C^{-1})(\det A)(\det C) = \det A$, toate matricele dintr-o clasă de echivalență au același determinant. Această observație permite să definim *determinantul unui endomorfism* al lui V_n ca fiind determinantul matricei asociate în raport cu o bază fixată.

§ 4. Endomorfisme particulare

Fie V un spațiu vectorial peste cîmpul $\mathbb{K}$ și $\mathcal{L}(V, V)$ mulțimea tuturor endomorfismelor lui V. Mulțimea $\mathcal{L}(V, V)$ este (1) un spațiu vectorial peste cîmpul $\mathbb{K}$ în raport cu adunarea endomorfismelor și cu înmulțirea dintre un scalar și un endomorfism, (2) un inel în raport cu adunarea endomorfismelor și cu produsul (compunerea) endomorfismelor.

4.1. *Definiție. Fie V un spațiu vectorial peste cîmpul $\mathbb{K}$. Endomorfismul $\mathcal{F} : V \to V$ se numește*

1) *automorfism dacă este bijectiv*;

2) *proiecţie dacă* $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F}$;

3) *involuţie sau structură produs dacă* $\mathcal{F}^2 = \mathcal{J}$, *unde* $\mathcal{J}$ *este transformarea identitate*;

4) *structură complexă dacă* $\mathcal{F}^2 = -\mathcal{J}$;

5) *endomorfism nilpotent de indice* p *dacă* $\mathcal{F}^p = \mathcal{O}$, *unde* $p = 2, 3, \ldots$, *iar* $\mathcal{O}$ *este transformarea zero. Un endomorfism nilpotent de indice 2 şi de rang maxim posibil se mai numeşte structură tangentă.*

Submulţimea lui $\mathcal{L}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{V})$ ale cărei elemente sînt automorfismele lui $\boldsymbol{V}$ este notată cu $\mathcal{GL}(\boldsymbol{V})$. Această submulţime nu este un subspaţiu vectorial al spaţiului vectorial $\mathcal{L}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{V})$ deoarece suma a două automorfisme poate să nu fie un automorfism. În schimb $\mathcal{GL}(\boldsymbol{V})$ este un grup în raport cu produsul (compunerea) automorfismelor. Grupul $\mathcal{GL}(\boldsymbol{V})$ se numeşte *grupul liniar general.*

Exemplu. Dacă $\mathcal{F} : \boldsymbol{V}_n \to \boldsymbol{V}_n$ are proprietatea că $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F} - \mathcal{J}$ atunci $\mathcal{F}$ este un automorfism. Într-adevăr fie $A = [a_{ij}]$ matricea asociată lui $\mathcal{F}$ în raport cu o bază din $\boldsymbol{V}_n$. Relaţia $\mathcal{F}^2 - \mathcal{F} + \mathcal{J} = \mathcal{O}$ este echivalentă cu egalitatea matriceală $-A^2 + A - I = 0$ sau $A(I - A) = (I - A)A = I$ ceea ce arată că $I - A$ este inversa lui A şi deci $\mathcal{F}$ este un automorfism.

4.2. Teoremă. Dacă $\mathcal{F} : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ este o proiecţie, atunci

$$\boldsymbol{V} = \mathrm{Ker}(\mathcal{F}) \oplus \mathrm{Im}(\mathcal{F}).$$

Demonstraţie. Fie $v \in \boldsymbol{V}$, $\mathcal{F}(v) \in \mathrm{Im}(\mathcal{F})$ şi $w = v - \mathcal{F}(v) \in \boldsymbol{V}$. Rezultă $\mathcal{F}(w) = \mathcal{F}(v - \mathcal{F}(v)) = \mathcal{F}(v) - \mathcal{F}^2(v) = 0$, adică $w \in \mathrm{Ker}(\mathcal{F})$. Deci $\boldsymbol{V} = \mathrm{Ker}(\mathcal{F}) + \mathrm{Im}(\mathcal{F})$.

Să arătăm că $\mathrm{Ker}(\mathcal{F}) \cap \mathrm{Im}(\mathcal{F}) = \{0\}$: fie $u \in \mathrm{Ker}(\mathcal{F}) \cap \mathrm{Im}(\mathcal{F})$. Apartenenţa $u \in \mathrm{Im}(\mathcal{F})$ implică existenţa lui $v \in \boldsymbol{V}$ astfel încît $u = \mathcal{F}(v)$; apartenenţa $u \in \mathrm{Ker}(\mathcal{F})$ implică $0 = \mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(v)) = \mathcal{F}(v) = u$.

Denumirea de proiecţie provine din interpretarea geometrică a relaţiei $\boldsymbol{V} = \mathrm{Ker}(\mathcal{F}) \oplus \mathrm{Im}(\mathcal{F})$; fiind dat $v \in \boldsymbol{V}$, există un singur vector $w \in \mathrm{Ker}(\mathcal{F})$ şi un singur vector $u \in \mathrm{Im}(\mathcal{F})$ astfel încît $v = w + u$, unde $\mathcal{F}(w) = 0$ şi $\mathcal{F}(u) = u$. Geometric, $\mathcal{F}$ proiectează (fig. 2) vectorul $v \in \boldsymbol{V}$ pe subspaţiul $\mathrm{Im}(\mathcal{F})$ de-a lungul subspaţiului $\mathrm{Ker}(\mathcal{F})$.

Dacă $\mathcal{F}$ este o proiecţie, atunci şi $\mathcal{J} - \mathcal{F}$ este o proiecţie. În plus se poate arăta că

$$\boldsymbol{V} = \mathrm{Ker}(\mathcal{J} - \mathcal{F}) \oplus \mathrm{Im}(\mathcal{J} - \mathcal{F}), \quad \mathrm{Ker}(\mathcal{J} - \mathcal{F}) = \mathrm{Im}(\mathcal{F}), \quad \mathrm{Im}(\mathcal{J} - \mathcal{F}) = \mathrm{Ker}(\mathcal{F}).$$

Din acestea se observă că restricţia lui $\mathcal{F}$ la $\mathrm{Im}(\mathcal{F})$ este identitatea pe $\mathrm{Im}(\mathcal{F})$, iar restricţia lui $\mathcal{J} - \mathcal{F}$ la $\mathrm{Ker}(\mathcal{F})$ este identitatea pe $\mathrm{Ker}(\mathcal{F})$.

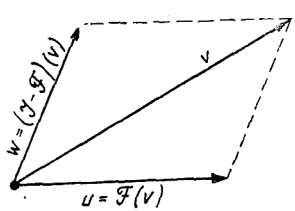


Fig. 2

Exemplu. Fie $\mathcal{F} : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ un endomorfism pe $\boldsymbol{V}$. Să arătăm că endomorfismul $\mathcal{F}_1 = 2\mathcal{F} - \mathcal{J}$ este o involuţie dacă şi numai dacă $\mathcal{F}$ este o proiecţie. Dacă $\mathcal{F}$ este o proiecţie, atunci $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F}$. Rezultă $\mathcal{F}_1^2 = 4\mathcal{F}^2 - 4\mathcal{F} + \mathcal{J} = \mathcal{J}$ ceea ce înseamnă că $\mathcal{F}_1$ este o involuţie. Reciproc, relaţia $\mathcal{F}_1^2 = \mathcal{J}$ implică $\mathcal{F}^2 = \frac{1}{4}\mathcal{F}_1^2 + \frac{1}{2}\mathcal{F}_1 + \frac{1}{4}\mathcal{J} = \frac{1}{2}(\mathcal{F}_1 + \mathcal{J}) = \mathcal{F}$ şi deci $\mathcal{F}$ este o proiecţie.

Teorema 4.2 se generalizează în felul următor.

4.3. Teoremă. Dacă $\mathscr{F}_i : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, $i = 1, 2, \ldots, p$, sînt proiecţii cu proprietăţile $\mathscr{F}_i \mathscr{F}_j = \mathcal{O}$ pentru $i \neq j$ şi $\sum_{i=1}^{p} \mathscr{F}_i = \mathcal{I}$, atunci

$$\boldsymbol{V} = \mathrm{Im}(\mathscr{F}_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Im}(\mathscr{F}_p).$$

4.4. Teoremă. Un spaţiu vectorial finit dimensional $\boldsymbol{V}$ admite o structură complexă dacă şi numai dacă dimensiunea sa este pară.

Demonstraţie. Presupunem $\dim \boldsymbol{V} = n = 2m$. Fie $\{e_1, e_2, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_{2m}\}$ o bază a lui $\boldsymbol{V}$. Definim o transformare liniară $\mathscr{F}$ prin

$$\mathscr{F}(e_i) = e_{m+i}, \quad \mathscr{F}(e_{m+i}) = -e_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Avem $\mathscr{F}^2(e_\alpha) = -e_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$ şi deci $\mathscr{F}^2 = -\mathcal{I}$, adică $\mathscr{F}$ este o structură complexă.

Reciproc, fie $\mathscr{F}$ o structură complexă pe $\boldsymbol{V}$. Dacă alegem un vector nenul x_1 din $\boldsymbol{V}$, atunci se poate arăta că vectorii x_1, $\mathscr{F}(x_1)$ sînt liniar independenţi. De asemenea, luînd din $\boldsymbol{V}$ un alt vector x_2 cu proprietatea că $x_1, x_2, \mathscr{F}(x_1)$ sînt liniar independenţi, deducem uşor că vectorii $x_1, x_2, \mathscr{F}(x_1), \mathscr{F}(x_2)$ sînt liniar independenţi. Continuînd acest procedeu obţinem o bază a lui $\boldsymbol{V}$ care conţine un număr par de vectori, adică $\dim \boldsymbol{V} = n = 2m$.

Observaţie. Matricea ataşată structurii complexe $\mathscr{F} : \boldsymbol{V}_{2m} \to \boldsymbol{V}_{2m}$ în raport cu baza $\{x_1, \ldots, x_m, \mathscr{F}(x_1), \ldots, \mathscr{F}(x_m)\}$ este

$$\begin{bmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{bmatrix}$$

4.5. Teoremă. Dacă $\mathscr{T} \in \mathscr{L}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{V})$ este un endomorfism nilpotent de indice p şi $x_0 \in \boldsymbol{V}$, $x_0 \neq 0$ aşa încît $\mathscr{F}^{p-1}(x_0) \neq 0$, atunci vectorii x_0, $\mathscr{T}(x_0), \ldots, \mathscr{T}^{p-1}(x_0)$ sînt liniar independenţi.

Demonstraţie. Fie combinaţia liniară $\sum_{i=1}^{p-1} k_i \mathscr{T}^i(x_0) = 0$, $k_i \in \mathbb{K}$, $i = 0, 1, \ldots, p-1$ şi fie j primul indice pentru care k_j ar fi nenul. Atunci împărţind prin k_j obţinem $(*)\mathscr{T}^j(x_0) = \sum_{i=j+1}^{p-1} l_i \mathscr{T}^i(x_0) = \mathscr{T}^{j+1}\left(\sum_{i=j+1}^{p-1} l_i \mathscr{T}^{i-j-1}(x_0)\right) = \mathscr{T}^{j+1}(y)$ unde am notat $y = \sum_{i=j+1}^{p-1} l_i \mathscr{T}^{i-j-1}(x_0)$ iar $l_i = \dfrac{k_i}{k_j}$, $i = j+1, \ldots, p-1$.

Luînd $j = p-1$, avem $\mathscr{T}^{p-1}(x_0) = \mathscr{T}^{p-j-1}(\mathscr{T}^j(x_0)) \overset{*}{=} \mathscr{T}^{p-j-1}(\mathscr{T}^{j+1}(y)) = \mathscr{T}^p(y) = 0$, deoarece prin ipoteză $\mathscr{T}$ este un endomorfism nilpotent de indice p. Ori $\mathscr{T}^{p-1}(x_0) = 0$ contrazice alegerea lui x_0. Rezultă $k_0 = k_1 = \ldots = k_{p-1} = 0$.

Observaţii. 1) O altă demonstraţie pentru teorema 4.5 este dată în [48], Cap. 1, § 3, problema 38.

2) Se poate arăta că dacă $\boldsymbol{L}(S)$ este acoperirea liniară a mulţimii $S = \{x_0, \mathscr{T}(x_0), \ldots, \mathscr{T}^{p-1}(x_0)\}$, atunci există un subspaţiu $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{V}$, invariant faţă de $\mathscr{T}$, aşa încît $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U} \oplus \boldsymbol{L}(S)$.

4.6. Teoremă. Dacă $\mathscr{T} : \boldsymbol{V}_n \to \boldsymbol{V}_n$ este un endomorfism, atunci există două subspaţii vectoriale $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{V}_n$, invariante faţă de $\mathscr{T}$, aşa încît

1) $\boldsymbol{V}_n = \boldsymbol{U} \oplus \boldsymbol{W}$,

2) restricţia $\mathscr{T}/\boldsymbol{U}$ *este nilpotentă*,

3) restricţia $\mathscr{T}/\boldsymbol{W}$ *este inversabilă*, dacă $\boldsymbol{W} \neq \{0\}$.

Demonstraţie. Fie $\boldsymbol{N}_k = \mathrm{Ker}(\mathscr{T}^k)$ şi $\boldsymbol{R}_k = \mathrm{Im}(\mathscr{T}^k)$, $k \in \mathbb{N}$. Se poate arăta că $\boldsymbol{N}_k$ şi $\boldsymbol{R}_k$ sînt subspaţii invariante faţă de $\mathscr{T}$ şi că există un $p \in \mathbb{N}$,

minim, așa încît $N_1 \subset N_2 \subset \ldots \subset N_p = N_{p+1} = \ldots$ și $R_1 \supset R_2 \supset \ldots \ldots \supset R_p = R_{p+1} = \ldots$ Într-adevăr dacă $x \in R_k$ și $y \in V_n$ așa încît $\mathcal{T}^k(y) = x$ atunci $\mathcal{T}(x) = \mathcal{T}^k(\mathcal{T}(y)) \in R_k$ adică $\mathcal{T}(R_k) \subset R_k$. Analog $\mathcal{T}(N_k) \subset \subset N_{k-1} \subset N_k$.

În continuare să arătăm că dacă $N_p = N_{p+1}$, rezultă $N_p = N_{p+q}$, $\forall\, q \in \mathbb{N}$. Într-adevăr, dacă $x \in N_{p+q}$ rezultă $\mathcal{T}^{p+q}(x) = 0$ sau $\mathcal{T}^{p+1}(\mathcal{T}^{q-1}(x)) = 0$ și ipoteza $N_p = N_{p+1}$ implică $\mathcal{T}^p(\mathcal{T}^{q-1}(x)) = 0$ sau $\mathcal{T}^{p+q-1}(x) = 0$. Continuînd procedeul obținem $\mathcal{T}^p(x) = 0$, ceea ce înseamnă că $x \in N_p$; deci $N_{p+q} \subset N_p$. Aceasta împreună cu $N_p \subset N_{p+q}$ implică $N_p = N_{p+q}$. Analog se dovedește pentru R_p. Rezultă $U = N_p$ și $W = R_p$.

Să arătăm că $V_n = U \oplus W$. Deoarece $\dim V_n = \dim N_p + \dim R_p$ rămîne să dovedim că $U \cap W = \{0\}$. Într-adevăr, dacă $x \in U \cap W$, rezultă $x \in U$ și $x \in W$, adică $\mathcal{T}^p(x) = 0$ și $x = \mathcal{T}^p(y)$; deci $\mathcal{T}^{2p}(y) = 0$ și cum $N_{2p} = N_{p+p} = N_p$ rezultă $\mathcal{T}^p(y) = 0$ ceea ce implică $x = 0$.

Să dovedim în continuare că $\mathcal{T}/U$ este nilpotent de indice p, iar $\mathcal{T}/W$ este inversabil. Deoarece $\mathcal{T}^p(N_p) = \{0\}$ rezultă că $\mathcal{T}/U$ este nilpotent de indice p. Apartenența $x \in W$ dă $x = \mathcal{T}^p(y)$, deoarece $W = R_p$. Relația $\mathcal{T}(x) = 0$ implică $\mathcal{T}(\mathcal{T}^p(y)) = 0$ sau $\mathcal{T}^{p+1}(y) = 0$, adică $\mathcal{T}^p(y) = 0$ și deci $x = 0$. Rezultă $\operatorname{Ker}(\mathcal{T}/W) = \{0\}$, adică $\mathcal{T}/W$ este inversabil.

Exemple. 1) Endomorfismul $D: \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ definit prin $D(p) = p'$, unde p' este derivata lui p, este un endomorfism nilpotent de indice $n+1$. Într-adevăr, p fiind un polinom de grad cel mult n, derivata de ordinul $n+1$ este identic nulă.

2) Endomorfismul $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definit prin matricea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

este un endomorfism nilpotent de indice 2. Într-adevăr se constată că $A^2 = 0$.

§5. Transformări liniare pe spații euclidiene

Fie V și W două spații vectoriale complexe și euclidiene al căror produs scalar îl notăm la fel. Fie $\mathcal{T}: V \to W$ o transformare liniară.

5.1 *Definiție. Transformarea liniară $\mathcal{T}^*: W \to V$ definită prin $(x, \mathcal{T}y) = (\mathcal{T}^*x, y)$, $\forall\, x \in W$, $\forall\, y \in V$ se numește adjuncta lui $\mathcal{T}$.*

Un endomorfism $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(V, V)$ se numește

1) *hermitian* dacă $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$,

2) *antihermitian* dacă $\mathcal{T} = -\mathcal{T}^*$.

5.2. Teoremă. Endomorfismul $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(V, V)$ este hermitian dacă și numai dacă produsul scalar $(x, \mathcal{T}x)$ *este real* $\forall\, x \in V$.

Demonstrație. Dacă $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$, atunci $(x, \mathcal{T}x) = (\mathcal{T}x, x) = \overline{(x, \mathcal{T}x)}$ (bara înseamnă conjugatul complex). Deci $(x, \mathcal{T}x)$ este real $\forall\, x \in V$. Reciproc, dacă $(x, \mathcal{T}x)$ este real, atunci $(x, \mathcal{T}x) = \overline{(x, \mathcal{T}x)} = \overline{(\mathcal{T}^*x, x)} = (x, \mathcal{T}^*x)$.

Așadar, $(x, (\mathcal{T} - \mathcal{T}^*)x) = 0$, $\forall\, x \in V$ și deci $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$.

Exemplu. Fie $\mathcal{T} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definit prin $\mathcal{T}(x) = (x_1 + ix_2, -ix_1 + x_2)$, $x = (x_1, x_2)$. Avem $(\mathcal{T}x, x) = (x_1 + ix_2)\bar{x}_1 + (-ix_1 + x_2)\bar{x}_2 = |x_1|^2 + ix_2\bar{x}_1 - ix_1\bar{x}_2 + |x_2|^2 = |x_1|^2 + ix_2\bar{x}_1 +$

$+\overline{(ix_2\bar{x}_1)}+|x_2|^2$ care este real (deoarece $z+\bar{z}\in\mathbb{R}$, dacă $z\in\mathbb{C}$). Astfel $\mathcal{T}$ este un endomorfism hermitian.

5.3. Teoremă. Fie $\mathcal{T}, \mathcal{S}\in\mathcal{L}(V, V)$ hermitieni şi $k\in\mathbb{R}$. Atunci
1) $k\mathcal{T}+\mathcal{S}$ este hermitian
2) dacă $\mathcal{T}$ este inversabil, atunci şi $\mathcal{T}^{-1}$ este hermitian
3) $\mathcal{T}\mathcal{S}$ este hermitian $\Leftrightarrow \mathcal{T}\mathcal{S}=\mathcal{S}\mathcal{T}$.

Demonstraţie. 1) este evidentă avînd în vedere că $(\mathcal{T}+\mathcal{S})^*=\mathcal{T}^*+\mathcal{S}^*$ şi $(k\mathcal{T})^*=k\mathcal{T}^*$. 2) rezultă din $(\mathcal{T}^{-1})^*=(\mathcal{T}^*)^{-1}=\mathcal{T}^{-1}$. 3) $\mathcal{T}\mathcal{S}$ hermitian implică $(\mathcal{T}\mathcal{S})^*=\mathcal{T}\mathcal{S}$. Dar $(\mathcal{T}\mathcal{S})^*=\mathcal{S}^*\mathcal{T}^*=\mathcal{S}\mathcal{T}$ deoarece $\mathcal{T}$ şi $\mathcal{S}$ sînt hermitieni. Deci $\mathcal{T}\mathcal{S}=\mathcal{S}\mathcal{T}$. Reciproca este evidentă.

5.4. *Definiţie. O transformare liniară $\mathcal{T}: V\to W$ se numeşte unitară dacă păstrează produsul scalar, adică $(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y)=(x, y)$, $\forall\, x, y\in V$.*

5.5. Teoremă. Transformarea liniară $\mathcal{T}: V\to W$ este unitară dacă şi numai dacă $\|\mathcal{T}x\|=\|x\|$, $\forall\, x\in V$.

Demonstraţie. Dacă $\mathcal{T}$ este unitară, atunci $(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y)=(x, y)$, $\forall\, x, y\in V$; în particular pentru $y=x$ avem $(\mathcal{T}x, \mathcal{T}x)=(x, x)$, adică $\|\mathcal{T}x\|^2=\|x\|^2$ şi deci $\|\mathcal{T}x\|=\|x\|$. Reciproc dacă $\|\mathcal{T}x\|=\|x\|$, $\forall\, x\in V$, atunci folosind egalitatea $(x, y)=\frac{1}{4}[\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2]$ avem $(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y)=\frac{1}{4}[\|\mathcal{T}(x+y)\|^2-\|\mathcal{T}(x-y)\|^2+i\|\mathcal{T}(x+iy)\|^2-i\|\mathcal{T}(x-iy)\|^2]=(x, y)$. Deci $\mathcal{T}$ este unitară.

Observaţie. Condiţia $(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y)=(x, y)$ este echivalentă cu $\mathcal{T}\mathcal{T}^*=\mathcal{T}^*\mathcal{T}=\mathcal{J}$; deci putem spune că $\mathcal{T}$ este unitar dacă şi numai dacă $\mathcal{T}\mathcal{T}^*=\mathcal{T}^*\mathcal{T}=\mathcal{J}$.

5.6. Teoremă. Orice transformare unitară $\mathcal{T}: V\to W$ este injectivă.

Demonstraţie. Dacă $\mathcal{T}$ este unitară atunci $\|\mathcal{T}x\|=\|x\|$. Deci $(\mathcal{T}x, \mathcal{T}x)=(x, x)$ şi dacă $\mathcal{T}x=0$ rezultă $(\mathcal{T}x, \mathcal{T}x)=0$ adică $(x, x)=0$ care implică $x=0$. Rezultă $\operatorname{Ker}\mathcal{T}=\{0\}$ şi deci $\mathcal{T}$ este injectivă.

Presupunem că V şi W sînt n-dimensionale şi că în fiecare s-a fixat o bază ortonormată. Transformării liniare $\mathcal{T}: V\to W$ i se ataşează matricea T. Matricea $T^*={}^t\bar{T}$ ataşată lui $\mathcal{T}^*$ se numeşte *adjuncta* matricei T.

Dacă $T={}^t\bar{T}$, atunci matricea pătratică T se numeşte *hermitică* iar dacă $T=-{}^t\bar{T}$, atunci matricea pătratică T se numeşte *antihermitică*. O matrice pătratică T cu proprietatea $TT^*=I$, unde I este matricea unitate, se numeşte matrice *unitară*.

5.7. Teoremă. Un endomorfism $\mathcal{T}: V_n\to V_n$ este hermitian dacă şi numai dacă matricea lui într-o bază ortonormată este hermitică.

Demonstraţie. Fie $\{e_1, \ldots, e_n\}\subset V_n$ baza ortonormată faţă de care matricea lui $\mathcal{T}$ este $T=[t_{ij}]$. Fie $\mathcal{T}$ hermitian. Din $\mathcal{T}e_j=\sum_{k=1}^{n}t_{kj}e_k$, prin înmulţire scalară cu e_i, obţinem $(\mathcal{T}e_j, e_i)=\sum_{k=1}^{n}t_{kj}(e_k, e_i)=t_{ij}$ şi analog $(\mathcal{T}^*e_j, e_i)=t_{ij}$. Dar $(\mathcal{T}^*e_j, e_i)=(e_j, \mathcal{T}e_i)=\overline{(\mathcal{T}e_i, e_j)}=\bar{t}_{ji}$. Deci $t_{ij}^*=\bar{t}_{ji}$ şi cum $\mathcal{T}^*=\mathcal{T}$ rezultă $t_{ij}=\bar{t}_{ji}$ adică $T={}^t\bar{T}$. Reciproc dacă $T={}^t\bar{T}$ avem $(x, \mathcal{T}x)=\left(\sum_{j=1}^{n}x_je_j, \sum_{j=1}^{n}x_j\mathcal{T}e_j\right)=\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2(e_j, \mathcal{T}e_j)=\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2\left(e_j, \sum_{k=1}^{n}t_{kj}e_k\right)=$

$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |x_j|^2 \bar{t}_{kj}(e_j, e_k) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |x_j|^2 t_{jk}(e_j, e_k) = \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 t_{jj} = (\overline{x, \mathcal{T}x})$ adică $(x, \mathcal{T}x) \in \mathbb{R}$ şi deci $\mathcal{T}$ este hermitian.

Condiţia ca baza să fie ortonormată este esenţială şi vom ilustra acest lucru prin exemplul următor.

Exemplu. Fie $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definit prin matricea $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ în baza $f_1 = (1, 0)$, $f_2 = (1, 1)$. Deoarece ${}^t\overline{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \neq A$ matricea A nu este hermitică şi totuşi $\mathcal{T}$ este hermitian. Să găsim matricea lui $\mathcal{T}$ în baza canonică a lui $\mathbb{R}^2$, $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ care este o bază ortonormată. Avem $f_1 = e_1$, $f_2 = e_1 + e_2$. Deci $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ este matricea de trecere aşa încît matricea lui $\mathcal{T}$ în baza canonică, pe care o notăm prin B, este $B = C^{-1}AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = {}^t\overline{B}$.

Observaţie. Un endomorfism $\mathcal{T} : V_n \to V_n$ este unitar dacă şi numai dacă matricea lui în raport cu o bază ortonormată a spaţiului este unitară.

Exemplu. Endomorfismul $\mathcal{T} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definit prin $\mathcal{T}(x) = (x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha,\ x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha)$, $x = (x_1, x_2)$, $\alpha \in [0, 2\pi]$ este un endomorfism unitar deoarece matricea lui $\mathcal{T}$ în baza canonică ortonormată $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ este unitară. Într-adevăr $T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$, iar $T^* = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ şi deci $TT^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$.

În continuare presupunem că V şi W sînt două spaţii vectoriale reale şi euclidiene al căror produs scalar îl notăm la fel. Fie $\mathcal{T} : V \to W$ o transformare liniară.

5.8. *Definiţie. Transformarea liniară $\mathcal{T}^* : W \to V$ definită prin $(x, \mathcal{T}y) = (\mathcal{T}^*y, x)$, $\forall\, x \in W$, $\forall\, y \in V$ se numeşte transpusa lui $\mathcal{T}$. Endomorfismul $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(V, V)$ se numeşte:*

1) *simetric dacă $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$*

2) *antisimetric dacă $\mathcal{T} = -\mathcal{T}^*$.*

5.9. *Definiţie. Transformarea liniară $\mathcal{T} : V \to W$ se numeşte ortogonală dacă păstrează produsul scalar, adică $(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) = (x, y)$, $\forall\, x, y \in V$ echivalentă cu condiţia ca $\|\mathcal{T}x\| = \|x\|$, $\forall\, x \in V$.*

Dacă admitem V şi W finit dimensionale şi că în fiecare s-a fixat o bază ortonormată atunci transformării $\mathcal{T} : V \to W$ i se ataşează matricea T iar lui $\mathcal{T}^*$ matricea ${}^tT$. Unui endomorfism simetric îi corespunde o matrice simetrică, iar unui endomorfism antisimetric îi corespunde o matrice antisimetrică. Unui endomorfism ortogonal îi corespunde o matrice ortogonală.

Observaţie. Transformările simetrice respectiv antisimetrice au proprietăţi analoage proprietăţilor transformărilor hermitiene respectiv antihermitiene. Transformările ortogonale au proprietăţi analoage proprietăţilor transformărilor unitare.

§ 6. Izometrii

Fie V un spaţiu vectorial euclidian real. Transformările ortogonale pe V au proprietăţile: păstrează distanţa euclidiană şi au drept punct fix originea.

Să introducem acum o altă funcţie pe V care păstrează distanţa euclidiană.

6.1. *Definiție. Funcția* $\mathcal{T} : V \to V$ *definită prin* $\mathcal{T}(x) = x + a$, $a \in V$, $a =$ fixat, *se numește translația de vector* a.

Se observă că translația prin 0 este identitatea pe V.

6.2. Teoremă. 1) Dacă $\mathcal{T}_1$ este translația de vector a_1 și $\mathcal{T}_2$ este translația de vector a_2, atunci $\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$ este translația de vector $a_1 + a_2$.

2) Dacă $\mathcal{T}$ este translația de vector a, atunci $\mathcal{T}^{-1}$ există și este translația de vector $-a$.

Demonstrație. 1) Fie $\mathcal{T}_1$ translația de vector a_1 și $\mathcal{T}_2$ translația de vector a_2. Produsul $\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2$ este translația de vector $a_1 + a_2$. Analog $\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$ este translația prin $a_2 + a_1$ și deci $\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$.

2) $\mathcal{T} \circ \mathcal{T}^{-1} = \mathrm{id}$ pe V.

Rezultă că produsul definește pe mulțimea tuturor translațiilor lui V o structură de grup comutativ (*grupul translațiilor*). Acest grup este izomorf cu grupul aditiv comutativ V.

6.3. Teoremă. Translația păstrează distanța euclidiană adică $\mathrm{d}(\mathcal{T}(x), \mathcal{T}(y)) = \mathrm{d}(x, y)$, $\forall\, x, y \in V$.

Demonstrație. $\mathrm{d}(\mathcal{T}(x), \mathcal{T}(y)) = \|(y + a) - (x + a)\| = \|y - x\| = \mathrm{d}(x, y)$, $\forall\, x, y \in V$.

6.4. *Definiție. O funcție surjectivă* $\mathcal{F} : V \to V$ *care păstrează distanța euclidiană, adică* $\mathrm{d}(\mathcal{F}(x), \mathcal{F}(y)) = \mathrm{d}(x, y)$, $\forall\, x, y \in V$, *se numește izometrie.*

Transformările ortogonale și translațiile sînt izometrii. De asemenea se dovedește ușor că produsul a două izometrii este o izometrie.

6.5. Teoremă. O izometrie $\mathcal{F} : V \to V$ cu proprietatea $\mathcal{F}(0) = 0$ este o transformare ortogonală.

Demonstrație. Să arătăm că $\mathcal{F}$ păstrează normele:

$$\|x\| = \|x - 0\| = \mathrm{d}(0, x) = \mathrm{d}(\mathcal{F}(0), \mathcal{F}(x)) = \mathrm{d}(0, \mathcal{F}(x)) = \|\mathcal{F}(x) - 0\| = \\ = \|\mathcal{F}(x)\|, \ \forall\, x \in V.$$

Utilizînd acest rezultat putem dovedi că $\mathcal{F}$ păstrează produsul scalar:

$$\mathrm{d}(\mathcal{F}(x), \mathcal{F}(y)) = \mathrm{d}(x, y) \Leftrightarrow \|\mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(x)\| = \|y - x\| \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(x), \mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(x)) = (y - x, y - x) \Leftrightarrow (\mathcal{F}(x), \mathcal{F}(y)) = \\ = (x, y), \ \forall\, x, y.$$

Rămîne să dovedim că orice izometrie care păstrează produsul scalar este o transformare liniară:

$$(\mathcal{F}(x), \mathcal{F}(y)) = (x, y) \Rightarrow (\mathcal{F}(kx), \mathcal{F}(y)) = (kx, y) = k(x, y) = \\ = k(\mathcal{F}(x), \mathcal{F}(y)) = (k\mathcal{F}(x), \mathcal{F}(y)) \Rightarrow (\mathcal{F}(kx) - k\mathcal{F}(x), \mathcal{F}(y)) = 0,$$

$\forall\, \mathcal{F}(y)$, $\forall\, k \in \mathbb{R}$. Facem $\mathcal{F}(y) = \mathcal{F}(kx) - k\mathcal{F}(x)$ și rezultă $\mathcal{F}(kx) - k\mathcal{F}(x) = 0$, adică $\mathcal{F}$ este omogenă.

$$(\mathcal{F}(x + y), \mathcal{F}(z)) = (x + y, z) = (x, z) + (y, z) = (\mathcal{F}(x), \mathcal{F}(z)) + \\ + (\mathcal{F}(y), \mathcal{F}(z)) = (\mathcal{F}(x) + \mathcal{F}(y), \mathcal{F}(z)) \Rightarrow (\mathcal{F}(x + y) - \mathcal{F}(x) - \\ - \mathcal{F}(y), \mathcal{F}(z)) = 0, \ \forall\, \mathcal{F}(z).$$ Deci $\mathcal{F}(x + y) - \mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(y) = 0$, adică $\mathcal{F}$ este aditivă.

6.6. Teoremă. Dacă $\mathcal{F}$ este o izometrie, atunci există o translație $\mathcal{T}$ și o transformare ortogonală $\mathcal{R}$ astfel încît $\mathcal{F} = \mathcal{T} \circ \mathcal{R}$.

Demonstrație. Fie $\mathcal{T}$ translația prin $\mathcal{F}(0)$ și $\mathcal{T}^{-1}$ translația prin $-\mathcal{F}(0)$. Funcția $\mathcal{T}^{-1} \circ \mathcal{F}$ este o izometrie care păstrează pe 0. Conform teoremei 6.5,

izometria $\mathcal{T}^{-1} \circ \mathcal{F}$ este o transformare ortogonală $\mathcal{R}$. Deci $\mathcal{T}^{-1} \circ \mathcal{F} = \mathcal{R}$ sau $\mathcal{F} = \mathcal{T} \circ \mathcal{R}$.

Compunerea definește pe mulțimea tuturor izometriilor lui V o structură de grup.

Presupunem $\dim V = n$. Dacă $\{e_1, \ldots, e_n\}$ este o bază ortonormată și $\mathcal{R}$ este o transformare ortogonală pe V, atunci și $\{\mathcal{R}(e_1), \ldots, \mathcal{R}(e_n)\}$ este o bază ortonormată. Reciproc, dacă în V sînt date două baze ortonormate, atunci există o singură transformare ortogonală care ne duce de la una la alta.

Fie $\mathcal{F} = \mathcal{T} \circ \mathcal{R}$ o izometrie pe spațiul n-dimensional V. Dacă $\det \mathcal{R} = +1$, atunci $\mathcal{F}$ se numește *izometrie pozitivă*, iar dacă $\det \mathcal{R} = -1$ atunci $\mathcal{F}$ se numește *izometrie negativă*.

Exemplu. Punctele $M(x, y, z)$ raportate la triedrul tridreptunghic $Oxyz$ verifică ecuația $g(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 4yz - 6x + 14y + 4z + 1 = 0$.

Ne propunem să găsim ecuația verificată de coordonatele (x', y', z') ale acestor puncte față de triedrul $O'x'y'z'$ obținut din cel inițial printr-o translație în punctul $O'(3, -1, -2)$.

Deoarece formulele care dau translația sînt $x = x' + 3$, $y = y' - 1$, $z = z' - 2$, înlocuind în ecuația dată găsim $x'^2 + 3y'^2 + 4y'z' - 9 = 0$. Ecuația dată în enunț este ecuația generală a unei cuadrice cu centru ; punctul O' reprezintă centrul de simetrie al cuadricei. Ecuația cuadricei raportată la sistemul translatat $O'x'y'z'$ s-a simplificat deoarece au dispărut termenii liniari, iar termenul liber a căpătat valoarea $g(3, -1, -2,) = -9$.

§ 7. Probleme

1. Să se cerceteze care din funcțiile $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definite prin

$$\mathcal{T}(x) = a, \ a \in \mathbb{R}^3, \text{ fixat}$$
$$\mathcal{T}(x) = x + a$$
$$\mathcal{T}(x) = \lambda x, \ \lambda \in \mathbb{R}$$
$$\mathcal{T}(x) = (x_1, x_2, x_3^2), \ x = (x_1, x_2, x_3)$$
$$\mathcal{T}(x) = (x_3, x_1, x_2)$$
$$\mathcal{T}(x) = (x_3, x_1, x_2 + k), \ k \in \mathbb{R}, \ k \neq 0$$
$$\mathcal{T}(x) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3, 3x_1 - x_2 + 3x_3, 4x_1 + 7x_2 + 8x_3)$$

sînt transformări liniare.

2. Fie $\mathbb{R}_n[X]$ spațiul vectorial real al polinoamelor de grad $\leqslant n$. Să se arate că funcția $\mathcal{T} : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ definită prin $\mathcal{T}p(x) = p(x + 2) - p(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ este o transformare liniară.

3. Fie spațiul vectorial $V = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid f \in \mathbb{C}^0([a, b])\}$. Să se arate că primitiva $P : V \to V$ definită prin $g = P(f)$, cu $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ pentru $a \leqslant x \leqslant b$ este liniară.

4. Fie spațiile vectoriale $V = \{f : (a, g) \to \mathbb{R} \mid f \text{ derivabilă}\}$, $W = \{g : (a, b) \to \mathbb{R}\}$. Să se arate că derivata $D : V \to W$ definită prin $g = D(f) = f'$ este o transformare liniară. Să se determine Ker (D).

5. Pe spațiul vectorial real al funcțiilor polinomiale de grad cel mult n, notat P_n, se definește funcția $p(x) \to \mathcal{T}(p(x)) = x \int_0^1 tp(t)\,dt$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Să se arate că $\mathcal{T}$ este o transformare liniară și să se determine Ker $(\mathcal{T})$ și Im $(\mathcal{T})$.

6. În $\mathbb{R}^3$ se consideră vectorii $x = (3, 2, -1)$, $y = (1, -2, 1)$, $z = (1, 0, 2)$. 1) Să se arate că există o singură formă liniară $\ell : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ astfel încît $\ell(x) = -8$, $\ell(y) = 0$, $\ell(z) = 6$.

2) Să se determine o bază a subspațiului Ker (ℓ).

7. Fie $\mathcal{T} : V_3 \to V_3$ funcția definită prin egalitatea $\mathcal{T}(\bar{v}) = \bar{v} \times \bar{a}$, $\bar{a}$ fixat. 1) Să se arate că $\mathcal{T}$ este o transformare liniară.

2) Să se găsească Ker $(\mathcal{T})$ și Im $(\mathcal{T})$ și să se arate că Ker $(\mathcal{T}) \oplus$ Im $(\mathcal{T}) = V_3$.

8. Să se determine matricea asociată transformării liniare, în raport cu baza canonică a spațiului, în cazurile

1) $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}^3$, $\mathcal{T}(x) = (ix_1, ix_2, ix_3)$

2) $\mathcal{T} : \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}(A) = {}^tA$

3) $\mathcal{T} : \mathbb{C} \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$, $\mathcal{T}(x) = \begin{bmatrix} x & ix \\ -ix & x \end{bmatrix}$

9. În spațiul vectorial real al tuturor funcțiilor reale fiecare dintre mulțimile $\{\sin x, \cos x\}$, $\{e^{2x} \sin 3x, e^{2x} \cos 3x\}$, $\{1, 1 - x, 1 - x - e^x\}$ este liniar independentă și generează un subspațiu V finit dimensional.

Utilizînd mulțimile date ca baze pentru V, să se găsească matricea atașată operatorului de derivare $D : V \to V$.

10. Să se determine matricele transformărilor liniare $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ în raport cu baza formată din vectorii $f_1 = (1, 2, 3)$, $f_2 = (2, 1, 3)$, $f_3 = (1, 1, 1)$ cunoscînd că

$$1)\ T_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad 2)\ T_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & -6 \\ -2 & 2 & -6 \end{bmatrix}, \quad 3)\ T_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

sînt matricele transformărilor respective în raport cu baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$.

11. Fie V un spațiu vectorial real, ${}^{\mathbb{C}}V$ complexificatul său și $\mathcal{T} : V \to V$ un endomorfism. Funcția ${}^{\mathbb{C}}\mathcal{T} : {}^{\mathbb{C}}V \to {}^{\mathbb{C}}V$ definită prin ${}^{\mathbb{C}}\mathcal{T}(u, v) = (\mathcal{T}u, \mathcal{T}v)$, sau altfel scris ${}^{\mathbb{C}}\mathcal{T}(u + iv) = \mathcal{T}u + i\mathcal{T}v$, se numește *complexificatul* lui $\mathcal{T}$.

1) Să se arate că ${}^{\mathbb{C}}\mathcal{T}$ este o transformare liniară care are proprietățile

$$\begin{aligned} &{}^{\mathbb{C}}(k\mathcal{T}) = k\,{}^{\mathbb{C}}\mathcal{T}, \quad k \in \mathbb{R} \\ &{}^{\mathbb{C}}(\mathcal{S} + \mathcal{T}) = {}^{\mathbb{C}}\mathcal{S} + {}^{\mathbb{C}}\mathcal{T} \\ &{}^{\mathbb{C}}(\mathcal{S}\mathcal{T}) = {}^{\mathbb{C}}\mathcal{S}\,{}^{\mathbb{C}}\mathcal{T} \\ &({}^{\mathbb{C}}\mathcal{T})^{-1} = {}^{\mathbb{C}}(\mathcal{T}^{-1}), \text{ dacă } \mathcal{T} \text{ este inversabilă.} \end{aligned}$$

2) Fie $\{e_1, \ldots, e_n\}$ o bază a lui V_n și $\{(e_1, 0), \ldots, (e_n, 0)\}$ baza corespunzătoare din ${}^{\mathbb{C}}V$. Să se verifice că matricea ${}^{\mathbb{C}}T$ atașată lui ${}^{\mathbb{C}}\mathcal{T}$ este egală cu matricea T atașată lui $\mathcal{T}$.

12. Fie $\mathcal{T} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ o transformare liniară. Se numește *reprezentarea reală* a transformării $\mathcal{T}$, transformarea reală ${}^{\mathbb{R}}\mathcal{T} : {}^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n \to {}^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^m$ care coincide punctual cu $\mathcal{T}$, unde ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n$, ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^m$ sînt trecerile în real ale spațiilor $\mathbb{C}^n$ și $\mathbb{C}^m$. Știind că $\mathcal{T} : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ este transformarea liniară definită prin $\mathcal{T}(x) = (x_1 + ix_2, x_1 + x_3, ix_3)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$, să se determine matricea reprezentării reale a lui $\mathcal{T}$ în baza $\{f_1, f_2, f_3\}$ unde $f_1 = (0, i, 1)$, $f_2 = (0, 0, i)$, $f_3 = (i, -2, 2)$.

13. Să se arate că transformările liniare asociate matricelor

$$T_1 = \begin{bmatrix} 27 & 18 & 27 \\ -21 & -14 & -21 \\ -12 & -8 & -12 \end{bmatrix} \quad \text{și} \quad T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sînt proiecţii.

14. Fie V_2 spaţiul vectorial al segmentelor orientate cu originea O identificat cu mulţimea punctelor din plan şi fie $\mathcal{T}: V_2 \to V_2$ transformarea liniară definită prin $\mathcal{T}(\vec{a}) = \vec{b}$, $\mathcal{T}(\vec{b}) = \vec{c}$ unde $A(\vec{a})$ şi $B(\vec{b})$ sînt două puncte fixe necoliniare cu $O(0)$, iar $C(\vec{c})$ un punct din plan. Să se determine $C(\vec{c})$ astfel încît

1) $\mathcal{T}$ să fie o proiecţie,
2) $\mathcal{T}$ să fie o involuţie.

15. Să se arate că matricea $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ este o matrice nilpotentă de ordinul trei.

16. Fie $\mathcal{T}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ endomorfismul care transformă vectorii $v_1 = (0, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (1, 1, 1)$ în vectorii $w_1 = (1, 2, 1)$, $w_2 = (3, 1, 2)$, $w_3 = (7, -1, 4)$. Să se determine matricea lui $\mathcal{T}^*$, transpusa lui $\mathcal{T}$, în baza ortonormată $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.

17. Fie $\mathcal{T}: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ endomorfismul definit prin matricea $T = \begin{bmatrix} 3 + 2i & 2 - 2i \\ 1 - i & 3 + 4i \end{bmatrix}$ în baza canonică a lui $\mathbb{C}^2$. Să se arate că $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 + i\mathcal{T}_2$, unde $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ sînt endomorfisme hermitiene.

18. Fie $\mathcal{T}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ endomorfismul definit prin matricea $T = \begin{bmatrix} -\cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$ în baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$. Să se arate că endomorfismul $\mathcal{T}$ este ortogonal.

Capitolul 4

VALORI ŞI VECTORI PROPRII

§ 1. Valori şi vectori proprii

Fie V un spaţiu vectorial peste cîmpul $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$) şi $\mathcal{A}: V \to V$ un endomorfism pe V.

1.1. *Definiţie. Un vector $x \in V - \{0\}$, se numeşte vector propriu al endomorfismului $\mathcal{A}: V \to V$ dacă există $\lambda \in \mathbb{K}$ aşa încît $\mathcal{A}x = \lambda x$. Scalarul λ se numeşte valoarea proprie a lui $\mathcal{A}$ corespunzătoare lui x. Mulţimea tuturor valorilor proprii ale endomorfismului $\mathcal{A}$ poartă numele de spectrul lui $\mathcal{A}$.*

Ecuaţia $\mathcal{A}x = \lambda x$ de definiţie a vectorului propriu este echivalentă cu $x \in \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{J})$, $x \neq 0$, unde $\mathcal{J}$ este endomorfismul identitate. De asemenea se observă că dacă x este un vector propriu al lui $\mathcal{A}$, atunci pentru fiecare $k \in \mathbb{K} - \{0\}$, vectorul kx este propriu.

1.2. Teoremă. 1) La un vector propriu al lui $\mathcal{A}$ îi corespunde o singură valoare proprie.

2) Vectorii proprii corespunzători la valori proprii distincte sînt liniar independenţi.

3) Mulţimea $S(\lambda) = \{kx \mid \mathscr{A}x = \lambda x,\ \lambda$ valoare proprie, $k \in \mathbb{K}\}$ este un subspaţiu vectorial în V *invariant* faţă de $\mathscr{A}$, adică $\mathscr{A}(S) \subseteq S$. Acest subspaţiu poate fi finit sau infinit dimensional şi se numeşte *subspaţiul propriu* ataşat lui λ.

Demonstraţie. 1) Fie x un vector propriu corespunzător valorii proprii λ; $\mathscr{A}x = \lambda x$. Dacă ar exista $\lambda' \in \mathbb{K}$, $\lambda' \neq \lambda$ astfel încît $\mathscr{A}x = \lambda' x$, atunci $\lambda x = \lambda' x$. De aici găsim $(\lambda - \lambda')x = 0$ şi deci $x = 0$, ceea ce este absurd.

2) Fie $x_1, \ldots, x_p$ vectorii proprii ai lui $\mathscr{A}$ corespunzători la valorile proprii distincte $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. Procedăm prin inducţie după $p \in \mathbb{N}$. Pentru $p = 1$ proprietatea este evidentă deoarece vectorul propriu este diferit de vectorul nul. Presupunem că proprietatea este adevărată pentru $p - 1$ vectori. Din ecuaţia $k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_{p-1}x_{p-1} + k_px_p = 0$ cu $k_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, 2, \ldots, p$ rezultă $\mathscr{A}(k_1x_1 + \ldots + k_px_p) = 0$ şi deci $k_1\lambda_1x_1 + \ldots k_p\lambda_px_p = 0$. Acestea implică $k_1(\lambda_1 - \lambda_p)x_1 + \ldots + k_{p-1}(\lambda_{p-1} - \lambda_p)x_{p-1} = 0$, care, împreună cu ipoteza de inducţie, dă $k_1 = k_2 = \ldots = k_{p-1} = 0$. Rezultă $k_px_p = 0$, adică şi $k_p = 0$.

3) Pentru orice $x, y \in S(\lambda)$, şi $k, l \in \mathbb{K}$ avem $\mathscr{A}(kx + ly) = k\mathscr{A}(x) + l\mathscr{A}(y) = k\lambda x + l\lambda y = \lambda(kx + ly)$; deci $kx + ly \in S(\lambda)$. Rezultă $\mathscr{A}(S(\lambda)) \subseteq S(\lambda)$.

Exemplu. Fie $V = \{f : [-1, 1] \to \mathbb{R} \mid f \in \mathbb{C}^\infty\}$ spaţiul funcţiilor de clasă $\mathbb{C}^\infty$ pe $[-1, 1]$. Endomorfismul $\mathscr{S} : V \to V$, $\mathscr{S}(f(x)) = [(x^2 - 1)f'(x)]'$, $\forall\, x \in [-1, 1]$, se numeşte *operatorul Sturm-Liouville*. Să arătăm că $\lambda_n = n(n + 1)$, $n \in \mathbb{N}$ sînt valorile proprii iar vectorii $x \to P_n(x) = \frac{1}{n!\,2^n}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2 - 1)^n]$, $n \in \mathbb{N}$ sînt vectori proprii. Anume dacă notăm $f_n(x) = (x^2 - 1)^n$ avem egalitatea evidentă $(x^2 - 1)f_n'(x) = 2nxf_n(x)$. Derivînd de $n + 1$ ori ambii membri, utilizînd formula Leibniz, găsim $(x^2 - 1)f_n^{(n+2)}(x) + 2x(n + 1)f_n^{(n+1)}(x) + n(n + 1)f_n^{(n)}(x) = 2nxf_n^{(n+1)}(x) + 2n(n + 1)f_n^{(n)}(x)$, sau $[(x^2 - 1)P_n'(x)]' = n(n + 1)P_n(x)$. Deci $\mathscr{S}(P_n(x)) = n(n + 1)P_n(x)$, ceea ce arată că $\lambda_n = n(n + 1)$ sînt valorile proprii iar $P_n(x)$ sînt vectorii corespunzători.

1.3. Propoziţie. Subspaţiile proprii corespunzătoare la valori proprii distincte, sînt disjuncte.

Demonstraţie. Fie valorile proprii distincte λ_1 şi λ_2, iar $S(\lambda_1)$, $S(\lambda_2)$ subspaţiile proprii corespunzătoare. Dacă ar exista $x \in S(\lambda_1) \cap S(\lambda_2)$, nenul, ar rezulta $\mathscr{A}x = \lambda_1 x$ şi $\mathscr{A}x = \lambda_2 x$ şi de aici $(\lambda_1 - \lambda_2)x = 0$, adică $x = 0$ ceea ce este absurd. Deci $S(\lambda_1) \cap S(\lambda_2) = \{0\}$.

§ 2. Polinom caracteristic

Fie $A = [a_{ij}]$ o matrice pătratică de ordinul n şi $X = [x_j]$ o matrice nenulă de tipul $n \times 1$ cu elemente din cîmpul $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$). Dacă există $\lambda \in \mathbb{K}$ astfel încît $AX = \lambda X$, atunci X se numeşte vector propriu, iar λ se numeşte valoare proprie pentru matricea A.

Ecuaţia matriceală $(A - \lambda I)X = 0$ este echivalentă cu sistemul liniar şi omogen,

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases}$$

care are soluţii nebanale dacă şi numai dacă

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

2.1. *Definiţie. Polinomul* $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ *se numeşte polinomul caracteristic al matricei* A, *iar ecuaţia* $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$, $\lambda \in \mathbb{K}$, *se numeşte ecuaţia caracteristică a matricei* A.

Valorile proprii ale matricei A sînt soluţiile ecuaţiei caracteristice. Fie A o matrice pătratică reală de ordinul n şi $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$ ecuaţia ei caracteristică. Deoarece nu orice ecuaţie algebrică admite soluţii în $\mathbb{R}$, dar admite în $\mathbb{C}$, uneori valorile proprii ale lui A se definesc ca fiind elemente din $\mathbb{C}$. În acest caz vectorii proprii corespunzători aparţin complexificatului lui $\mathbb{R}^n$ notat ${}^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^n$.

2.2. Teoremă. 1) Polinomul caracteristic are expresia

$$P(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n - \delta_1\lambda^{n-1} + \delta_2\lambda^{n-2} - \ldots \pm \delta_n)$$

unde δ_i, $i = 1, \ldots, n$, reprezintă suma minorilor principali de ordinul i ai matricei $A - \lambda I$.

2) Două matrice asemenea au acelaşi polinom caracteristic.

Demonstraţie. 1) Descompunem $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ în 2^n determinanţi. Mai întîi

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\lambda & a_{12} \ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - \lambda \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ 0 & a_{n2} \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = \Delta_1 + \Delta_2.$$

Apoi descompunem Δ_1 şi Δ_2 în 2^{n-1} determinanţi fixînd prima coloană. Anume

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -\lambda & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ 0 & a_{n2} \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \ldots & a_{1n} \\ 0 & -\lambda \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ 0 & 0 \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots$$

Analog pentru Δ_1. Deoarece $(-\lambda)^1$ poate apărea pe diagonala principală în n moduri, coeficientul lui $(-\lambda)^1$ este format din *suma minorilor principali*

de ordin $n-1$ din $A-\lambda I$, în număr de $C_n^1 = C_n^{n-1}$, adică

$$(-\lambda)^1 \left\{ \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \right\}$$

Tot din dezvoltarea lui Δ_1 şi Δ_2, se vede că perechea $(-\lambda, -\lambda)$ apare pe diagonală principală în C_n^2 moduri şi deci *coeficientul* lui $(-\lambda)^2$ va fi format din *suma tuturor minorilor principali* de ordin „$n-2$" din matricea $A-\lambda I$, în număr de $C_n^2 = C_n^{n-2}$. Deci

$$(-\lambda)^2 \left\{ \begin{vmatrix} a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-3} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-3,1} & \dots & a_{n-3,n-3} \end{vmatrix} \right\}$$

Analog, coeficientul lui $(-\lambda)^i$ va fi format din suma tuturor minorilor principali de ordinul „$n-i$" din matricea $A-\lambda I$ în număr de $C_n^i = C_n^{n-i}$. Coeficientul lui $(-\lambda)^0 = 1$ este evident $\delta_n = \det A$, deoarece $P(0) = \det(A - 0I) = \det A = \delta_n$. Coeficientul lui $(-\lambda)^{n-1}$ este urma lui A, adică $\delta_1 = \operatorname{tr} A$.

2) Fie A şi B două matrice asemenea, adică $B = C^{-1}AC$ unde C este o matrice nesingulară. Atunci $\det(B-\lambda I) = \det(C^{-1}AC - \lambda I) = \det[C^{-1}(A-\lambda I)C] = \det(C^{-1})\det(A-\lambda I)\det C = \det(A-\lambda I)$.

Să presupunem că A este o matrice reală (A coincide cu conjugata ei $\bar{A}$) şi simetrică (A coincide cu transpusa ${}^tA$).

2.3. Teoremă. Valorile proprii ale unei matrice reale şi simetrice sînt reale.

Demonstraţie. Pornim de la (1) $AX = \lambda X$ şi prin conjugare complexă găsim (2) $A\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X}$. În (1) înmulţim la stînga cu ${}^t\bar{X}$, iar în (2) înmulţim la stînga cu ${}^tX$. Relaţia $A = {}^tA$ implică ${}^t\bar{X}AX = {}^tXA\bar{X}$ şi deci $(\lambda - \bar{\lambda})^tX\bar{X} = 0$. Deoarece ${}^tX\bar{X} \neq 0$, rămîne că $\lambda = \bar{\lambda}$, adică $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemple. 1) Matricea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

are polinomul caracteristic $P(\lambda) = \det(A-\lambda I) = (\lambda-1)^4$ şi valorile proprii $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$.

Din $AX = 1X$, $X = {}^t[x_1, x_2, x_3, x_4]$ obţinem sistemul $2x_3 - x_4 = 0$, $2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$ cu soluţia nenulă $x_2 = 2x_1 + x_3$, $x_4 = 2x_3$. Notînd: $x_1 = a$ şi $x_3 = b$ soluţia se scrie: $x_2 = 2a + b$, $x_4 = 2b$. Rezultă $X = {}^t[a, 2a+b, b, 2b] = a^t[1, 2, 0, 0] + b^t[0, 1, 1, 2]$. Deci valorii proprii $\lambda = 1$ îi corespund doi vectori proprii: $v_1 = {}^t[1, 2, 0, 0]$ şi $v_2 = {}^t[0, 1, 1, 2]$.

2) Pentru matricea

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

se obține : $P(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$; valorile proprii : $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$. Vectorii proprii : $v_1 = {}^t[1, -2, 0]$, $v_2 = {}^t[0, 0, 1]$, $v_3 = {}^t[1, -1, -1]$.

Fie V_n un spațiu vectorial finit dimensional peste cîmpul $\mathbb{K}$ și $\mathscr{A} : V_n \to V_n$ un endomorfism. Fie x un vector propriu al lui $\mathscr{A}$ și λ valoarea proprie asociată. Acestea satisfac relația $\mathscr{A}x = \lambda x$.

Fixăm o bază în V_n. Notăm cu A matricea atașată endomorfismului $\mathscr{A}$ și cu X matricea coloană atașată vectorului x. Relația $\mathscr{A}x = \lambda x$ este echivalentă cu ecuația matriceală $AX = \lambda X$.

Fie $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ polinomul caracteristic al matricei A. Considerațiile precedente arată că dacă există, valorile proprii ale endomorfismului $\mathscr{A}$ sînt rădăcinile lui $P(\lambda)$ în $\mathbb{K}$, iar vectorii proprii ai lui $\mathscr{A}$ sînt soluțiile ecuației matriceale $(A - \lambda I)X = 0$. Pe de altă parte teorema 2.2 arată că polinomul $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ este invariant față de o schimbare a bazei din V_n, adică coeficienții lui $P(\lambda)$ depind de $\mathscr{A}$ și nu de reprezentarea matriceală particulară A. Desigur numărul $\det A$ se numește determinantul lui $\mathscr{A}$, numărul $\operatorname{tr} A$ se numește urma lui $\mathscr{A}$ etc. Acestea justifică următoarea

2.4. *Definiție. Fie $\mathscr{A} : V_n \to V_n$ un endomorfism și A matricea asociată în raport cu o bază fixată în V_n. Polinomul $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ se numește polinomul caracteristic al endomorfismului $\mathscr{A}$.*

Endomorfismul $\mathscr{A} : V_n \to V_n$ are cel mult n valori proprii distincte. Dacă $\mathscr{A}$ are exact n valori proprii distincte, atunci vectorii proprii corespunzători determină o bază a lui V_n și matricea A atașată lui $\mathscr{A}$ în raport cu această bază este o matrice diagonală avînd drept elemente pe diagonală valorile proprii ale lui $\mathscr{A}$.

Fie V_n un spațiu vectorial real n dimensional și $\mathscr{A} : V_n \to V_n$ un endomorfism. Notăm cu ${}^{\mathbb{C}}V_n$ complexificatul lui V_n și cu ${}^{\mathbb{C}}\mathscr{A}$ complexificatul lui $\mathscr{A}$. Deoarece $\mathscr{A}$ și ${}^{\mathbb{C}}\mathscr{A}$ au aceeași reprezentare matriceală, valorile proprii ale lui ${}^{\mathbb{C}}\mathscr{A}$ sînt valorile proprii în $\mathbb{C}$ ale matricei reale asociată lui $\mathscr{A}$. Avînd în vedere acest lucru, uneori ${}^{\mathbb{C}}\mathscr{A}$ se identifică cu $\mathscr{A}$, căutîndu-se valorile proprii ale unui endomorfism real direct în $\mathbb{C}$ și bineînțeles vectorii proprii în complexificatul spațiului vectorial real.

Exemplu. Pentru endomorfismul $\mathscr{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, care în raport cu baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$ are matricea

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

obținem polinomul caracteristic $P(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 4)$, valorile proprii $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ și vectorii proprii corespunzători $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$.

§ 3. Forma diagonală

Deoarece matricea oricărui endomorfism $\mathscr{A} : V_n \to V_n$ depinde de alegerea bazei în V_n, prezintă interes cazul cînd se poate găsi o bază în V_n față de care matricea endomorfismului să aibă o formă cît mai simplă.

3.1. *Definiție. Un endomorfism $\mathscr{A} : V_n \to V_n$ se numește diagonalizabil dacă există o bază $\{e_1, \ldots, e_n\}$ astfel încît matricea lui în această bază să fie diagonală.*

Matricele din clasa de asemănare care îi corespunde endomorfismului $\mathscr{A}$ se numesc *matrice diagonalizabile.*

3.2. Teoremă. Un endomorfism $\mathscr{A} : V_n \to V_n$ este diagonalizabil dacă și numai dacă există o bază a spațiului V_n formată din vectori proprii ai endomorfismului.

Demonstrație. Dacă $\mathscr{A}$ este diagonalizabil, atunci există o bază $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a spațiului față de care matricea lui este diagonală :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Deci $\mathscr{A}e_i = a_{ii}e_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, ceea ce înseamnă că vectorii e_i, $i = 1, \ldots, n$ sînt vectorii proprii ai endomorfismului $\mathscr{A}$.

Reciproc, dacă $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ este o bază în V_n, formată din vectorii proprii ai lui $\mathscr{A}$, adică $\mathscr{A}v_i = \lambda_i v_i$, $i = 1, \ldots, n$, atunci matricea lui $\mathscr{A}$ în această bază este

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Evident unele dintre numerele λ_i pot fi egale.

3.3. Teoremă. Dimensiunea unui subspațiu propriu al endomorfismului $\mathscr{A} : V_n \to V_n$ este cel mult egală cu ordinul de multiplicitate al valorii proprii corespunzătoare subspațiului.

Demonstrație. Fie λ_0 o valoare proprie multiplă de ordinul m, și $S(\lambda_0)$ subspațiul propriu corespunzător. Notăm $\dim S(\lambda_0) = p < n$. Fie $\{e_1, e_2, \ldots, e_p\} \subset S(\lambda_0)$ o bază în subspațiul propriu. Completăm această bază pînă la o bază în V_n de forma $\{e_1, \ldots, e_p, f_{p+1}, \ldots, f_n\}$. Întrucît vectorii e_i, $i = 1, \ldots, p$ sînt vectori proprii corespunzători la valoarea proprie λ_0, avem $\mathscr{A}(e_i) = \lambda_0 e_i$, $i = 1, \ldots, p$ și $\mathscr{A}(f_j) = \sum_{k=1}^{p} a_{kj}e_k + \sum_{k=p+1}^{n} a_{kj}f_k$,

$j = p + 1, \ldots, n$. Matricea lui $\mathscr{A}$ în această bază este

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & \ldots & 0 & a_{1p+1} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_0 & \ldots & 0 & a_{2p+1} & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_0 & a_{pp+1} & \ldots & a_{pn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{np+1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

așa încît polinomul caracteristic al lui $\mathscr{A}$ are forma $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda_0 - \lambda)^p \Delta(\lambda)$, unde $\Delta(\lambda)$ este un determinant de ordinul $n - p$.

În concluzie, $\Delta(\lambda_0) = 0$ implică $p < m$, iar $\Delta(\lambda_0) \neq 0$ implică $p = m$. Deci $p \leqslant m$.

3.4. Teoremă. Un endomorfism $\mathscr{A} : V_n \to V_n$ este diagonalizabil dacă și numai dacă polinomul caracteristic are toate rădăcinile în cîmpul peste care este luat V_n și dimensiunea fiecărui subspațiu propriu este egală cu ordinul de multiplicitate al valorii proprii corespunzătoare.

Demonstrație. Admitem că $\mathscr{A} : V_n \to V_n$ este diagonalizabil.

Rezultă că există o bază $\{e_1, \ldots, e_n\}$ în V_n formată din vectori proprii pentru $\mathscr{A}$ față de care matricea lui $\mathscr{A}$ este diagonală. Fie $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \ldots (\lambda - \lambda_p)^{m_p}$, adică λ_i, $i = 1, \ldots, p$ sînt valorile proprii ale lui $\mathscr{A}$ de multiplicități m_i cu $\sum_{i=1}^{p} m_i = n$. Fără a afecta generalitatea, putem admite că primii m_1 vectori din baza $\{e_1, \ldots, e_n\}$ corespund lui λ_1, următorii m_2 lui λ_2 etc. În concluzie, vectorii $\{e_1, \ldots, e_{m_1}\} \subset S(\lambda_1)$ aparțin subspațiului propriu corespunzător valorii proprii λ_1, ceea ce înseamnă că numărul lor m_1 este mai mic sau cel mult egal cu $\dim S(\lambda_1)$: $m_1 \leqslant \dim S(\lambda_1)$. Pe de altă parte, conform teoremei 3.3, avem $\dim S(\lambda_1) \leqslant m_1$. În concluzie $m_1 = \dim S(\lambda_1)$. Analog rezultă $\dim S(\lambda_i) = m_i$, $i = 2, \ldots, p$.

Reciproc, admitem că $\dim S(\lambda_i) = m_i$, $i = 1, 2, \ldots, p$. Atunci fie $B = \{e_1, \ldots, e_{m_1}, e_{m_1+1}, \ldots, e_{m_2}, \ldots, e_{m_{p-1}+1}, \ldots, e_{m_p}\}$, $\sum_{i=1}^{n} m_i = n$ o mulțime de vectori din V_n așa încît primii m_1 vectori să constituie o bază în $S(\lambda_1)$, următorii m_2 să constituie o bază în $S(\lambda_2)$ și așa mai departe. Utilizînd inducția asupra lui p se dovedește că B este o bază a lui V_n. Față de această bază, matricea lui $\mathscr{A} : V_n \to V_n$ este

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 & \\ 0 & \lambda_1 & \ldots & 0 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & & \lambda_1 & \\ \hline & & & & \lambda_p \quad 0 \ldots 0 \\ & 0 & & & 0 \quad \lambda_p \ldots 0 \\ & & & & \cdots\cdots\cdots \\ & & & & 0 \quad 0 \quad \lambda_p \end{array}\right]$$

adică o matrice diagonală.

Consecință. Dacă $\mathscr{A} : V_n \to V_n$ este diagonalizabil atunci $V_n = S(\lambda_1) \oplus \oplus S(\lambda_2) \oplus \ldots \oplus S(\lambda_p)$.

Practic, pentru diagonalizarea unui endomorfism $\mathscr{A} : V_n \to V_n$ procedăm în felul următor :

1) Fixăm o bază în V_n și determinăm matricea $A = [a_{ij}]$ a lui $\mathscr{A}$ în această bază.

2) Aflăm valorile proprii care sînt soluțiile în $\mathbb{K}$ ale ecuației $P(\lambda) = 0$.

3) Dacă există p ($p \leqslant n$) valori proprii distincte $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ cu ordinele de multiplicitate $m_1, \ldots, m_p$, calculăm rangul fiecărei matrice $A - \lambda_j I$, $j = 1, \ldots, p$. Dacă rang $(A - \lambda_j I) = n - m_j$, $j = 1, \ldots, p$, dim $S(\lambda_j) =$ $=$ dim Ker $(\mathscr{A} - \lambda_j \mathscr{I})$ este numărul de soluții independente ale sistemului omogen $(A - \lambda_j I)X = 0$, atunci (conform teoremei 3.4) $\mathscr{A}$ este diagonalizabil.

4) Se rezolvă cele p sisteme omogene $(A - \lambda_j I)X = 0$. Un sistem fundamental de soluții pentru un asemenea sistem reprezintă coordonatele vectorilor proprii corespunzători valorii proprii λ_j.

5) Matricea lui $\mathscr{A}$, în raport cu baza formată din vectorii proprii ai lui $\mathscr{A}$, are pe diagonală elementele $\lambda_1, \ldots, \lambda_1 ; , \ldots ; \lambda_p, \ldots, \lambda_p$, adică valorile proprii.

6) Notăm prin $D \in \mathscr{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ matricea diagonală atașată lui $\mathscr{A}$ în raport cu baza formată din vectorii proprii ai lui $\mathscr{A}$. Dacă $C \in \mathscr{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ este matricea ale cărei coloane sînt vectorii proprii care alcătuiesc noua bază a lui V_n, adică matricea de trecere de la baza inițială din V_n (baza canonică în $\mathbb{R}^n$) la baza formată din vectorii proprii, atunci

$$D = C^{-1} A C.$$

Exemple. 1) Pentru endomorfismul $\mathscr{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definit prin matricea

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -7 & -5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

avem : polinomul caracteristic, $P(\lambda) = (\lambda - 1)^3$; valorile proprii, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, (triplă, $m_1 = 3$) ; rang $(A - 1I) =$ rang $\begin{bmatrix} -4 & -7 & -5 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 2 \neq n - m_1 = 3 - 3 = 0.$

Deci endomorfismul $\mathscr{A}$ nu este diagonalizabil.

2) Fie $\mathscr{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $\mathscr{A}(x) = (x_1 + x_4,\ x_2,\ x_3 - 2x_4,\ x_1 - 2x_3 + 5x_4)$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. În raport cu baza canonică a lui $\mathbb{R}^4$, matricea lui $\mathscr{A}$ este

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda(1 - \lambda)^2(\lambda - 6)$. Rezultă valorile proprii $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ și $\lambda_4 = 6$. Deci ordinele de multiplicitate sînt $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $m_3 = 1$.

Deoarece rang $(A - \lambda_1 I) = 3 = n - m_1 = 4 - 1 = 3$, prin rezolvarea sistemului omogen $(A - 0I)X_1 = 0$, obținem vectorul propriu $v_1 = {}^t[-1, 0, 2, 1]$.

Analog rang $(A - \lambda_2 I) = 2 = n - m_2 = 4 - 2$ așa încît $\dim S(\lambda_2) = 2$. Vectorii proprii corespunzători sînt $v_2 = {}^t[0, 1, 0, 0]$, $v_3 = {}^t[2, 0, 1, 0]$. Rang $(A - \lambda_4 I) = 3 = n - m_3$ așa încît vectorul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_4 = 6$ este $v_4 = {}^t[1, 0, -2, 5]$. În concluzie endomorfismul $\mathscr{A}$ este diagonalizabil cu matricea diagonalizatoare $C = [v_1, v_2, v_3, v_4] =$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}. \text{ Se obține } D = C^{-1}AC = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

§ 4. Forma Jordan

Fie V_n un spațiu vectorial peste cîmpul $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$) și $\mathscr{A} : V_n \to V_n$ un endomorfism. Matricea A a endomorfismului $\mathscr{A}$ depinde de alegerea bazei în V_n. Uneori această matrice poate fi diagonalizată, alteori nu. Condițiile în care matricea A se poate diagonaliza au fost date în teoremele 3.2 și 3.4. Una dintre formele relativ simple și utile, care se poate obține în unele dintre cazurile cînd nu este posibilă diagonalizarea, este *forma Jordan*.

Fie $\lambda \in \mathbb{K}$. Matricele de tipul

$$[\lambda], \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} \lambda & 1 \ldots\ldots & 0 \\ 0 & \lambda \quad 1 \ldots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & 0 \ldots\ldots & 1 \\ 0 & 0 \ldots\ldots & \lambda \end{bmatrix},$$

se numesc *celule Jordan* atașate scalarului λ.

4.1. *Definiție. Spunem că endomorfismul $\mathscr{A} : V_n \to V_n$ este adus la forma Jordan dacă există o bază în V_n față de care matricea*

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & J_2 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots J_s \end{bmatrix}$$

să reprezinte pe $\mathscr{A}$, unde J_i sînt celule Jordan atașate valorilor proprii λ_i, $i = 1, 2, \ldots, s$, ale endomorfismului $\mathscr{A}$.

O celulă Jordan de ordinul p atașată unei valori proprii λ multiplă de ordinul $s \geqslant p$ corespunde vectorilor liniar independenți $e_1, e_2, \ldots, e_p$ așa încît $\mathscr{A}e_1 = \lambda e_1$, $\mathscr{A}e_2 = e_1 + \lambda e_2, \ldots, \mathscr{A}e_p = e_{p-1} + \lambda e_p$. Vectorul e_1 este propriu, iar vectorii $e_2, \ldots, e_p$ se numesc *vectori principali*.

Există endomorfisme ale spațiilor vectoriale reale care nu pot fi aduse la forma Jordan și anume acelea pentru care ecuația caracteristică nu are toate rădăcinile în $\mathbb{R}$. Discuția următoare pune în evidență că endomorfismele spațiilor vectoriale complexe pot fi aduse totdeauna la forma Jordan.

Observații. 1) Forma diagonală a unui endomorfism diagonalizabil este un caz particular de formă canonică Jordan ,și anume cazul cînd toate celulele Jordan sînt de ordinul unu.

2) Forma canonică Jordan nu este unică, dar numărul celulelor Jordan (egal cu numărul total de vectori proprii liniar independenți ai lui $\mathscr{A}$) ca și ordinul celulelor Jordan sînt unice pentru un endomorfism $\mathscr{A}$, dat.

3) Ordinea celulelor Jordan pe diagonala formei canonice Jordan depinde de ordinea vectorilor din bază.

4.2. Teoremă. Fie V_n un spațiu vectorial n-dimensional peste cîmpul $\mathbb{K}$($\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$). Dacă $\mathscr{A} : V_n \to V_n$ este un endomorfism și $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sînt valorile proprii distincte ale lui $\mathscr{A}$ cu multiplicitățile $m_1, m_2, \ldots, m_p$, $\sum_{k=1}^{p} m_k = n$, atunci există p subspații vectoriale $V_j \subset V$, $j = 1, \ldots, p$, invariante față de $\mathscr{A}$, de dimensiuni m_j, $j = 1, \ldots, p$ așa încît $V_n = V_1 \oplus \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_p$ iar $\mathscr{A}_{/V_j} = \mathscr{N}_j + \lambda_j \mathscr{I}_{m_j}$, $j = 1, \ldots, p$ unde $\mathscr{N}_j$ sînt *endomorfisme nilpotente* de diferite ordine.

Demonstrație. Pentru $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$ fixat considerăm endomorfismele $\mathscr{K}_j = \mathscr{A} - \lambda_j \mathscr{I}$ și aplicînd teorema 4.6, cap. 3, se obțin subspațiile V_j și R_j așa încît $\mathscr{K}_{j/V_j}$ este un endomorfism nilpotent, iar $\mathscr{K}_{j/R_j}$ este nesingular. Deoarece V_j este invariant față de $\mathscr{K}_j$ el este invariant și față de endomorfismul $\mathscr{K}_j + \lambda_j \mathscr{I} = \mathscr{A}$. Fie $\mathscr{A}_{/V_j}$ și $\mathscr{A}_{/R_j}$ restricțiile lui $\mathscr{A}$ la subspațiile V_j și R_j; deci unica valoare proprie a lui $\mathscr{A}_{/V_j}$ este λ_j care nu este valoare proprie și pentru $\mathscr{A}_{/R_j}$ (deoarece $\mathscr{A} - \lambda_j \mathscr{I}$ este nesingular pe R_j iar $\det(A - \lambda_j \mathscr{I}) = \det(\mathscr{A}_{/V_j} - \lambda_j \mathscr{I}_1) \det(\mathscr{A}_{/R_j} - \lambda_j \mathscr{I}_2)$). Rezultă $\dim V_j = m_j$ și $V_j \cap V_h = \{0\}$, pentru $j \neq h$, așa încît $V_n = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_p$ $\left(\text{știm prin ipoteză că } \sum_{k=1}^{p} m_k = n\right)$.

În plus, din $\mathscr{A} = \mathscr{K}_j + \lambda_j \mathscr{I}$ rezultă $\mathscr{A}_{/V_j} = \mathscr{K}_{j/V_j} + \lambda_j \mathscr{I}_{m_j} \overset{\text{not}}{=} \mathscr{N}_j + \lambda_j \mathscr{I}_{m_j}$, cu $\mathscr{N}_j$ nilpotent deoarece $\mathscr{K}_{j/V_j}$ este nilpotent prin construcție.

4.3. Teorema Jordan. Fie V_n un spațiu vectorial n-dimensional peste cîmpul $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$). Dacă endomorfismul $\mathscr{A} : V_n \to V_n$ are valori proprii (în $\mathbb{K}$) și dacă suma multiplicităților acestor valori proprii este n, atunci există o bază în V_n față de care matricea lui $\mathscr{A}$ are forma Jordan.

Demonstrație. Fie λ_j, $j = 1, \ldots, p$, valorile proprii ale lui $\mathscr{A}$ (în $\mathbb{K}$) de multiplicități m_j, $j = 1, \ldots, p$, $\sum_{j=1}^{p} m_j = n$. Construim subspațiile $V_j = \operatorname{Ker}(\mathscr{A} - \lambda_j \mathscr{I})^{m_j}$, $j = 1, \ldots, p$. Conform teoremei 4.2 avem $V_n = V_1 \oplus \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_p$.

Notăm $\mathscr{N}_j = \mathscr{A}_{/V_j} - \lambda_j \mathscr{I}_{m_j}$ endomorfismele nilpotente $\mathscr{N}_j$ de indice h_j. Admitem $h_j = m_j$, $j = 1, \ldots, p$ (cazul $h_j < m_j$ se tratează analog).

Construim mulțimea de vectori $\mathscr{F}^{m_j} = \{f_1^j, f_2^j, \ldots, f_{m_j}^j\}$ din V_j așa încît $f_1^j = \mathscr{N}_j^{m_j-1}(x)$, $f_2^j = \mathscr{N}_j^{m_j-2}(x)$, $\ldots$, $f_{m_j-1}^j = \mathscr{N}_j(x)$, $f_{m_j}^j = x$ unde $x \in V_j$. Din definiția lui $\mathscr{N}_j$ și a mulțimii $\mathscr{F}^{m_j}$ avem

$$(1) \qquad \mathscr{N}_j(f_1^j) = 0, \quad \mathscr{N}_j(f_2^j) = f_1^j, \ldots, \mathscr{N}_j(f_{m_j}^j) = f_{m_j-1}^j,$$

deoarece $\mathscr{N}_j$ este prin construcție un endomorfism nilpotent de indice $h_j = m_j$. Avînd în vedere definiția lui $\mathscr{N}_j$ egalitățile (1) devin

$$(2) \quad \mathscr{A}_{/V_j}(f_1^j) = \lambda_j f_1^j, \quad \mathscr{A}_{/V_j}(f_2^j) = \lambda_j f_2^j + f_1^j, \ldots, \mathscr{A}_{/V_j}(f_{m_j}^j) = \lambda_j f_{m_j}^j + f_{m_j-1}^j.$$

Dovedim în continuare că vectorii mulțimii $\mathscr{F}^{m_j}$ sînt liniar independenți. Pentru aceasta fie ecuația $\sum_{i=1}^{m_j} k_i f_i^j = 0$, $k_i \in \mathbb{K}$ și aplicăm endomorfismul $\mathscr{N}_j$, succesiv de $m_j - 1$ ori. Obținem, $\mathscr{N}_j\left(\sum_{i=1}^{m_j} k_i f_i^j\right) = \sum_{i=1}^{m_j} k_i \mathscr{N}(f_i^j) = 0$ sau, dacă ținem cont de egalitățile (1), $k_2 f_1^j + k_3 f_2^j + \ldots + k_{m_j} f_{m_j-1}^j = 0$. Aplicînd din nou $\mathscr{N}_j$ și folosind egalitățile (1) găsim $k_3 f_1^j + k_4 f_2^j + \ldots + k_{m_j} f_{m_j-2}^j = 0$.

Prin aplicarea succesivă a lui $\mathscr{N}_j$ de $m_j - 2$ ori obținem $k_{m_j-1} f_1^j + k_{m_j} f_2^j = 0$. Aplicînd $\mathscr{N}_j$ din nou (deci în total de $m_j - 1$ ori) avem $k_{m_j} f_1^j = 0$. Deoarece $f_1^j \neq 0$, deducem $k_{m_j} = 0$. Aceasta implică $k_{m_j-1} f_1^j = 0$ și deci $k_{m_j-1} = 0$.

Analog, din celelalte egalități, obținem $k_{m_j-2} = k_{m_j-3} = \ldots = k_3 = k_2 = k_1 = 0$. În concluzie vectorii mulțimii $\mathscr{F}^{m_j}$ sînt liniar independenți. Întrucît $\dim V_j = m_j$ rezultă că $\mathscr{F}^{m_j}$ este bază în V_j; aceasta este o bază Jordan în V_j datorită egalităților (2). În raport cu această bază matricea restricției lui $\mathscr{A}$ la V_j, este

$$J_j = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_j \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{m_j \times m_j}(\mathbb{K}).$$

Datorită egalității $V_n = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_p$, mulțimea $\bigcup_{j=1}^{p} \mathscr{F}^{m_j}$ este baza căutată în V_n, numită bază Jordan față de care matricea lui $\mathscr{A}$ este de tip Jordan.

Concluzii. Numărul de submulțimi $\mathscr{F}^{m_j}$ din baza Jordan este egal cu numărul vectorilor proprii independenți ai lui $\mathscr{A}$. Numărul de vectori principali care corespund unei valori proprii λ_j este egal cu $m_j - h_j$.

Presupunem $h_j \leqslant m_j$, unde h_j este indicele de nilpotență al endomorfismului $\mathscr{N}_j = \mathscr{A}_{/V_j} - \lambda_j \mathscr{I}_{m_j}$. Pentru a găsi baza Jordan este necesar să se urmărească problemele următoare:

1) Fixarea unei baze în V_n și explicitarea matricei A atașată endomorfismului $\mathscr{A} : V_n \to V_n$.

2) Determinarea valorilor proprii distincte λ_j, $j = 1, \ldots, n$ respectiv multiple de ordinul m_j, $j = 1, \ldots, p$ prin rezolvarea ecuației caracteristice; pentru continuare este suficient ca $\sum_{j=1}^{p} m_j = n$.

3) Găsirea vectorilor proprii liniar independenți corespunzători fiecărei valori proprii.

4) Calcularea numărului de celule Jordan,

$$\dim S(\lambda_j) = \dim V_n - \operatorname{rang}(A - \lambda_j I) = n - r_j.$$

5) Rezolvarea sistemului

$$(A - \lambda_j I)^{m_j} X = 0$$

pentru fiecare $j = 1, \ldots, p$. Pentru $j =$ fixat, soluțiile nenule generează subspațiul V_j.

În cazul matricelor de ordin relativ mic putem ocoli unele dintre etapele precedente ținînd seama de observația că la o celulă Jordan corespunde un singur vector propriu. Pentru găsirea vectorilor din bază corespunzători celulei de ordinul p, atașată valorii proprii λ_j, se determină soluția generală pentru $\mathscr{A} e_j = \lambda_j e_j$, apoi se impun condiții de compatibilitate și se determină soluții pentru $\mathscr{A} e_2 = e_1 + \lambda_j e_2, \ldots, \mathscr{A} e_p = e_{p-1} + \lambda_j e_p$.

Dacă notăm prin C matricea care are pe coloane coordonatele vectorilor din baza Jordan, atunci

$$J = C^{-1} A C.$$

Exemplu. Să se reducă la forma canonică Jordan $\mathscr{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $\mathscr{A}(x) = (3x_1 + x_2, -4x_1 - x_2, 7x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4, -17x_1 - 6x_2 - x_3)$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Soluția I. În baza canonică a lui $\mathbb{R}^4$, endomorfismul $\mathscr{A}$ are matricea

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ecuația caracteristică $(1 - \lambda)^4 = 0$ are soluția $\lambda_{1,2,3,4} = 1 = \lambda$ deci $m_1 = 4$. Deoarece $\operatorname{rang}(A - \lambda I) = 2$, numărul celulelor Jordan este egal cu $n - \operatorname{rang}(A - \lambda I) = \dim S(\lambda) = 4 - 2 = 2$. Ele ar putea fi amîndouă de tipul 2×2 sau una de tipul 1×1 și cealaltă de tipul 3×3. Pentru a lămuri situația folosim indicele de nilpotență al restricției $\mathscr{N}_1 = \mathscr{A}_{/V_1} - \lambda \mathscr{I}_1$, iar pentru aceasta trebuie să determinăm pe $V_1 = \operatorname{Ker}(\mathscr{A} - \lambda \mathscr{I})^4$.

Deoarece

$$(A - \lambda I)^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 1 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & -1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

obținem,

$$S(\lambda) = \operatorname{Ker}(\mathscr{A} - \lambda \mathscr{I}) \subset \operatorname{Ker}(\mathscr{A} - \lambda \mathscr{I})^2 = \operatorname{Ker}(\mathscr{A} - \lambda \mathscr{I})^3 = \operatorname{Ker}(\mathscr{A} - \lambda \mathscr{I})^4 = V_1 = V = \mathbb{R}^4.$$

Rezultă restricția $\mathcal{N}_1 = \mathcal{A}_{/V_1} - \lambda\mathcal{J}$ așa încît indicele de nilpotență h_1 al restricției $\mathcal{N}_1$ este egal cu 2. Deoarece $\dim \operatorname{Ker}(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{J})^2 = 4$ și $\dim \operatorname{Ker}(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{J}) = \dim S(\lambda) = 2$ rezultă că numărul celulelor Jordan de tip $h_1 \times h_1$ cu $h_1 = 2$ este egal cu $\dim(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{J})^2 - \dim(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{J}) = 4 - 2 = 2$.

În concluzie forma Jordan va fi dată de matricea $J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix}$, unde $J_1 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ și $J_2 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$.

Soluția II. Deoarece $\operatorname{rang}(A - \lambda I) = 2$, la $\lambda = 1$ corespund doi vectori proprii pe care-i determinăm rezolvînd sistemul omogen $(A - \lambda I)X_1 = 0$, unde $X_1 = {}^t[x_1, x_2, x_3, x_4]$ adică

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ -4x_1 - 2x_2 = 0 \\ 7x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -17x_1 - 6x_2 - x_3 - x_4 = 0, \end{cases}$$

care este dublu nedeterminat. Notînd $x_3 = a$, $x_4 = b$ obținem $x_1 = -\dfrac{a+b}{5}$, $x_2 = \dfrac{2(a+b)}{5}$.

Deci $X_1 = {}^t\left[-\dfrac{a+b}{5}, \dfrac{2(a+b)}{5}, a, b\right]$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, adică există numai doi vectori proprii liniar independenți.

Fie $X_2 = {}^t[u_1, u_2, u_3, u_4]$ matricea corespunzătoare vectorului principal. Obținem sistemul neomogen $(A - \lambda I)X_2 = X_1$ (corespunzător la $\mathcal{A}(e_2) = e_1 + \lambda e_2$), adică

$$\begin{cases} 2u_1 + u_2 = -\dfrac{a+b}{5} \\ -4u_1 - 2u_2 = 2\dfrac{a+b}{5} \\ 7u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = a \\ -17u_1 - 6u_2 - u_3 - u_4 = b. \end{cases}$$

Notînd $u_3 = c$, $u_4 = d$ obținem

$$X_2 = {}^t\left[\frac{6a + b - 5c - 5d}{25}, \frac{-17a - 7b + 10c + 10d}{25}, c, d\right].$$

Deoarece sistemul neomogen este compatibil oricare ar fi a și b, rezultă că fiecăruia dintre vectorii proprii liniari independenți i se atașează un vector principal. Luînd $a = 7$, $b = -17$ deducem vectorul propriu $e_1 = (2, -4, 7, -17)$, iar pentru $a = 7$, $b = -17$, $c = d = 0$ se obține vectorul principal $e_2 = (1, 0, 0, 0)$ atașat lui e_1. Pentru $a = 1$, $b = -6$ se găsește vectorul propriu $e_3 = (1, -2, 1, -6)$; pentru $a = 1$, $b = -6$, $c = d = 0$, găsim vectorul principal $e_4 = (0, 1, 0, 0)$ care se atașează lui e_3. În baza Jordan $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ matricea lui $\mathcal{A}$ este

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -2 & 1 \\ 7 & 0 & 1 & 0 \\ -17 & 0 & -6 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{verifică } C^{-1}AC = J.$$

§ 5. Spectrul endomorfismelor pe spații euclidiene

Fie V un spațiu euclidian peste cîmpul $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$), $\mathscr{A} : V \to V$ un endomorfism, λ o valoare proprie a lui $\mathscr{A}$ și x un vector propriu atașat lui λ. În aceste condiții $\lambda = \dfrac{(\mathscr{A}x, x)}{(x, x)}$.

5.1. Teoremă. Fie V un spațiu euclidian complex și fie $\mathscr{A} : V \to V$ un endomorfism hermitian.

1) Valorile proprii sînt reale.

2) La valori proprii distincte corespund vectori proprii ortogonali.

3) Dacă $\dim V = n$, atunci endomorfismul hermitian $\mathscr{A} : V_n \to V_n$ admite exact n vectori proprii ortogonali doi cîte doi.

Demonstrație. 1) Se observă că

$$\bar{\lambda} = \frac{\overline{(\mathscr{A}x, x)}}{\overline{(x, x)}} = \frac{(x, \mathscr{A}x)}{(x, x)} = \frac{(\mathscr{A}x, x)}{(x, x)} = \lambda.$$

2) Fie $\lambda_1 \neq \lambda_2$ valori proprii ale lui $\mathscr{A}$ și $v_1, v_2 \in V$ vectorii proprii corespunzători. Atunci $(\mathscr{A}v_1, v_2) = (\lambda_1 v_1, v_2) = \lambda_1(v_1, v_2)$ și respectiv $(\mathscr{A}v_1, v_2) = (v_1, \mathscr{A}v_2) = (v_1, \lambda_2 v_2) = \lambda_2(v_1, v_2)$. Rezultă $(\lambda_1 - \lambda_2)(v_1, v_2) = 0$, adică $(v_1, v_2) = 0$, întrucît $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

3) Dacă $\dim V = n$, atunci polinomul caracteristic $P(\lambda)$ admite cel puțin o rădăcină λ_1 (eventual multiplă de ordinul n), iar acestei valori proprii îi corespunde cel puțin un vector propriu v_1. Fie $S_1 = S(\lambda_1)^{\perp}$ subspațiul ortogonal suplimentar în V al subspațiului propriu $S(\lambda_1)$.

Atunci $V = S(\lambda_1) \oplus S_1$ și $\dim S_1 = \dim V - \dim S(\lambda_1) = n - 1$. Fie de asemenea $\mathscr{A}_{/S_1}$ restricția lui $\mathscr{A}$ la S_1 și fie $y_0 \in \mathscr{A}_{/S_1}(S_1)$. Atunci există $x_0 \in S_1$ astfel încît $y_0 = \mathscr{A}_{/S_1}(x_0) = \mathscr{A}x_0$. Deci $(v_1, y_0) = (v_1, \mathscr{A}x_0) = (\mathscr{A}v_1, x_0) = (\lambda_1 v_1, x_0) = \lambda_1(v_1, x_0) = 0$, de unde rezultă $y_0 \perp v_1$, adică $y_0 \in S_1$ sau $\mathscr{A}_{/S_1}(S_1) \subset S_1$. Vectorii proprii ai endomorfismului $\mathscr{A}_{/S_1}$ satisfac egalitățile $(*)$ $\mathscr{A}_{/S_1}x = \mathscr{A}x = \lambda_1 x$ ceea ce înseamnă că sînt în același timp vectori proprii ai lui $\mathscr{A}$.

Tot din egalitatea $(*)$ rezultă că valorile proprii ale endomorfismului $\mathscr{A}_{/S_1}$ sînt și valori proprii ale endomorfismului $\mathscr{A}$, deci polinomul caracteristic $P_1(\lambda)$ al endomorfismului $\mathscr{A}_{/S_1}$ divide polinomul caracteristic $P(\lambda)$ al lui $\mathscr{A}$. Fie λ_2 o rădăcină a lui $P_1(\lambda)$ (λ_2 poate fi egal cu λ_1 sau nu) și v_2 vectorul propriu corespunzător : $\mathscr{A}_{/S_1}v_2 = \mathscr{A}v_2 = \lambda_2 v_2$. În calitate de vector propriu al endomorfismului $\mathscr{A}_{/S_1} : S_1 \to S_1$, putem lua $v_2 \in S_1$ și deci $v_2 \perp v_1$. Dar v_2 este vector propriu și pentru $\mathscr{A}$ astfel încît am determinat doi vectori proprii ai lui $\mathscr{A}$ care sînt ortogonali.

Procedura continuă pînă la construcția restricției $\mathscr{A}_{/S_{n-1}}$ la subspațiul (**) $S_{n-1} \subset S_{n-2} \subset \ldots \subset S_2 \subset S_1$, cu $\dim S_{n-1} = 1$. Polinomul caracteristic al lui $\mathscr{A}_{/S_{n-1}}$ are gradul întîi și deci singurei valori proprii a lui $\mathscr{A}_{/S_{n-1}}$ îi corespunde un vector propriu $V_n \in S_{n-1}$ care datorită incluziunilor (**) este ortogonal pe toți vectorii proprii construiți anterior. În concluzie am obținut exact n-vectori proprii ai lui $\mathscr{A}$ ortogonali doi cîte doi.

Consecință. Datorită proprietății 3), orice endomorfism hermitian este diagonalizabil.

Observații. 1) Pentru un endomorfism antihermitian valorile proprii sînt pur imaginare sau nule; vectorii proprii corespunzători au aceleași proprietăți ca și în cazul hermitian.

2) Pe spațiile euclidiene reale, valorile proprii ale unui endomorfism simetric sînt reale, iar valorile proprii ale unui endomorfism antisimetric sînt nule. Dacă V_n este un spațiu euclidian real n dimensional, iar $\mathscr{A} : V_n \to V_n$ este simetric, atunci $\mathscr{A}$ posedă n vectori proprii care constituie o bază ortogonală a lui V_n. Această proprietate nu este adevărată pentru un endomorfism antisimetric.

Exemplu. Fie spațiul euclidian complex $\mathbb{C}^3$ și $\mathscr{A} : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ endomorfismul dat prin matricea

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Să arătăm că $\mathscr{A}$ este hermitian și să determinăm o bază în $\mathbb{C}^3$ față de care matricea endomorfismului să aibă forma diagonală. Valorile proprii sînt reale $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 4$, iar vectorii proprii corespunzători $e_1 = (1, i, 0)$, $e_2 = (0, 0, 1)$ pentru $\lambda = 4$, și $e_3 = (i, 1, 0)$, pentru $\lambda = 2$, sînt ortogonali doi cîte doi. Deci $\mathscr{A}$ este hermitian. Normînd vectorii proprii obținem baza ortonormată $u_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $u_2 = \frac{e_3}{\|e_3\|} = \left(\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $u_3 = e_2$. Matricea de trecere la această bază este

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{așa încît}$$

$$D = C^{-1}AC = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

5.2. Teoremă. Fie V un spațiu euclidian complex (real) și $\mathscr{A} : V \to V$ un endomorfism unitar (ortogonal).

1) Dacă există, valorile proprii ale lui $\mathscr{A}$ au modulul egal cu unitatea.

2) La valori proprii distincte corespund vectori proprii ortogonali.

3) Dacă V este complex și n-dimensional, atunci posedă n vectori proprii ortogonali doi cîte doi.

Demonstrație. 1) Fie $\lambda \in \mathbb{C}$ valoare proprie pentru endomorfismul unitar $\mathscr{A} : V \to V$ și $x \in V - \{0\}$ vectorul propriu corespunzător lui λ. Avem

$$(\mathscr{A}x, \mathscr{A}x) = (\lambda x, \lambda x) = \lambda \cdot \bar{\lambda}(x, x),$$

$$(\mathscr{A}x, \mathscr{A}x) = (x, x)$$

unde $\bar{\lambda}$ este conjugatul complex al lui λ. Prin scădere rezultă $(\lambda\bar{\lambda} - 1)(x, x) = 0$. Deoarece $(x, x) \neq 0$, rezultă $\lambda\bar{\lambda} - 1 = 0$ sau $|\lambda|^2 = 1$, adică $|\lambda| = 1$.

2) Fie $\lambda_1 \neq \lambda_2$ valori proprii și x_1, x_2 vectorii proprii corespunzători. Atunci $(\mathscr{A}x_1, \mathscr{A}x_2) = (x_1, x_2)$ și $(\mathscr{A}x_1, \mathscr{A}x_2) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2) = \lambda_1\bar{\lambda}_2(x_1, x_2)$. Prin scădere rezultă $(\lambda_1\bar{\lambda}_2 - 1)(x_1, x_2) = 0$. Deoarece $\lambda_1\bar{\lambda}_2 - 1 \neq 0$ deducem $(x_1, x_2) = 0$; adică x_1 și x_2 sînt ortogonali.

3) Se demonstrează analog cu 3) din teorema 5.1 cu deosebire că egalitatea $(v_1, y_0) = (v_1, \mathscr{A}x_0) = (\mathscr{A}v_1, x_0) = \lambda_1(v_1, x_0)$ se înlocuiește prin $(v_1, y_0) = (v_1, \mathscr{A}x_0) = \left(\frac{1}{\lambda_1}\mathscr{A}v_1, \mathscr{A}x_0\right) = \frac{1}{\lambda_1}(v_1, x_0) = 0$, deoarece $x_0 \in S_1$.

5.3. Principiul minmax. Fie $\mathscr{A} : V_n \to V_n$ un endomorfism hermitian și $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ valorile proprii ale lui $\mathscr{A}$. Dacă V_0 este un subspațiu vectorial al lui V_n, iar $\mu(V_0) = \max\limits_{x \in V_0, \|x\|=1} (\mathscr{A}x, x)$ și $\mu_k = \min\{\mu(V_0)/\dim V_0 = n - k + 1\}$, atunci $\mu_k = \lambda_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Demonstrație. Fie o bază ortonormată $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a lui V_n pentru care $\mathscr{A}e_i = \lambda_i e_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ și fie $V_k \subset V_n$ subspațiul generat de vectorii $e_1, e_2, \ldots, e_k$, $k \leqslant n$. Prin construcție $V_k \cap V_0 \neq \{0\}$, deoarece am admis că $\dim V_0 = n - k + 1$. Fie $x \in V_k \cap V_0$ cu $\|x\| = 1$; avem $x = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i e_i$ și $(\mathscr{A}x, x) = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i(\mathscr{A}e_i, x) = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i(\lambda_i e_i, x) = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i x_i(e_i, x) = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i |x_i|^2$.

Ipoteza $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_k \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ implică $(\mathscr{A}x, x) \geqslant \lambda_k \sum\limits_{i=1}^{k} |x_i|^2 = \lambda_k \|x\|^2 = \lambda_k$. Deci $\mu(V_0) \geqslant \lambda_k$, adică $\mu_k \geqslant \lambda_k$. Fie $U_k \subset V$ subspațiul generat de vectorii $e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$ și fie $x \in U_k \cap V_0$. Atunci $x = \sum\limits_{i=k}^{n} x_i e_i$, $\|x\| = 1$ și $(\mathscr{A}x, x) = \sum\limits_{i=k}^{n} \lambda_i |x_i|^2 \leqslant \lambda_k \sum\limits_{i=k}^{n} |x_i|^2 = \lambda_k$. Rezultă $\mu(V_0) \leqslant \lambda_k$, adică $\mu_k \leqslant \lambda_k$. Din cele două inegalități obținem $\mu_k = \lambda_k$, $k = 1, \ldots, n$.

Exemplu. Pe spațiul euclidian canonic $\mathbb{R}^4$, fie endomorfismul $\mathscr{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dat prin matricea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Deoarece $A\,{}^tA = I$ rezultă că matricea A este ortogonală; deci și endomorfismul $\mathscr{A}$ este ortogonal. Să verificăm că valorile proprii ale lui ${}^{\mathbb{C}}\mathscr{A} : {}^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^n \to {}^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^n$ au modulul egal cu unitatea și că vectorii proprii corespunzători sînt ortogonali.

Valorile proprii ale lui ${}^{\mathbb{C}}\mathscr{A}$ sînt soluțiile ecuației $\det(A - \lambda I) = 0$, adică $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{15}}{4}$, $\lambda_4 = \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{15}}{4}$.

Evident $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ și $|\lambda_3| = |\lambda_4| = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{15}{16}} = 1$. Vectorii proprii corespunzători sînt respectiv $e_1 = (-\sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}, 1)$, $e_2 = (-1, 1, 1, -\sqrt{3})$, $e_3 = (-1/4, 1/4, 1, \sqrt{3}/2) + i(\sqrt{15}/4, \sqrt{15}/4, 0, 0)$ și $e_4 = \bar{e}_3$. Vectorilor e_3 și e_4 li se atașează vectorii reali $u = (-1/4, 1/4, 1, 3/2)$ și $v = (\sqrt{15}/4, \sqrt{15}/4, 0, 0)$ astfel încît $e_3 = u + iv$, $e_4 = u - iv$. Se verifică imediat că $(e_1, e_2) = 0$, $(e_1, u) = 0$, $(e_1, v) = 0$, $(e_2, u) = 0$, $(e_2, v) = 0$, $(u, v) = 0$.

§ 6. Polinoame de matrice. Funcții de matrice

Fie V_n un spațiu n-dimensional peste cîmpul $\mathbb{K}$ și $\mathscr{A} : V_n \to V_n$ un endomorfism căruia, în raport cu o bază a lui V_n, i se atașează matricea $A = [a_{ij}] \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

Oricărui polinom $P(t) = a_m t^m + a_{m-1}t^{m-1} + \ldots + a_1 t + a_0$ cu coeficienți din cîmpul $\mathbb{K}$ i se poate atașa polinomul $P(\mathscr{A}) = a_m\mathscr{A}^m + a_{m-1}\mathscr{A}^{m-1} + \ldots + a_1\mathscr{A} + a_0\mathscr{I}$ sau polinomul $P(A) = a_m A^m + a_{m-1}A^{m-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I$.

6.1. *Definiție. Polinoamele $P(\mathscr{A})$ se numesc polinoame de endomorfisme, iar polinoamele $P(A)$ se numesc polinoame de matrice.*

Evident, cercetarea polinoamelor de endomorfisme se reduce la cercetarea polinoamelor de matrice. În ceea ce privește calculul matricei $P(A)$ cînd se dă A este recomandabil să se folosească observațiile următoare:

1) dacă A se reduce la o matrice diagonală D, atunci $A = CDC^{-1}$, $A^2 = CD^2C^{-1}, \ldots, A^m = CD^mC^{-1}$;

2) dacă A se reduce la o matrice Jordan J, atunci $A = CJC^{-1}$, $A^2 = CJ^2C^{-1}, \ldots, A^m = CJ^mC^{-1}$.

6.2. Teorema Cayley-Hamilton. Dacă $P(\lambda)$ este polinomul caracteristic al matricei A, atunci $P(A) = O$.

Demonstrație. Dacă $C \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, atunci $(*)$ $C \cdot C^+ = (\det C)I$, unde C^+ este reciproca lui C. Fie $A \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ și $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ polinomul său caracteristic. Avînd în vedere egalitatea $(*)$ avem $(**)$ $(A - \lambda I)(A - \lambda I)^+ = P(\lambda)I$.

Prin construcție $(A - \lambda I)^+$ este o matrice de polinoame de grad $n - 1$, adică $(A - \lambda I)^+ = B_{n-1}\lambda^{n-1} + B_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + B_0$, unde $B_i \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, $i = 0, \ldots, n-1$. Fie $P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k\lambda^k$, $a_k, \lambda \in \mathbb{K}$. Egalitatea $(**)$ devine

$$(A - \lambda I)(B_{n-1}\lambda^{n-1} + B_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + B_1\lambda + B_0) = (a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0)I$$

sau

$$(-B_{n-1})\lambda^n + (AB_{n-1} - B_{n-2})\lambda^{n-1} + \ldots + (AB_1 - B_0)\lambda + AB_0 = (a_nI)\lambda^n + \ldots + (a_1I)\lambda + a_0I.$$

Prin identificare, după puterile lui λ rezultă $-B_{n-1}=a_0I$, $AB_{n-1}-B_{n-2}=$ $=a_{n-1}I,\ldots,AB_1-B_0=a_1I, AB_0=a_0I$. Amplificînd, la stînga, respectiv cu $A^n, A^{n-1},\ldots,A, I$ şi adunînd parte cu parte obţinem $P(A)=a_0A^n+$ $+a_1A^{n-1}+\ldots+a_{n-1}A+a_nI=-A^nB_{n-1}+A^nB_{n-1}-A^{n-1}B_{n-2}+\ldots$ $\ldots-AB_0+AB_0=0$.

Consecinţă. Dacă $\mathscr{A}: V_n\to V_n$ este un endomorfism iar $P(\lambda)$ este polinomul său caracteristic, atunci $P(\mathscr{A})=\mathscr{O}$.

Exemple. 1) Dacă

$$A=\begin{bmatrix}0&2&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix},$$

să calculăm matricea $P(A)=A^4-2A^2+I$. Polinomul caracteristic al matricei A este $P(\lambda)=\det(A-\lambda I)=(\lambda^2-I)^2=\lambda^4-2\lambda^2+1$ şi deci pe baza teoremei Cayley-Hamilton avem $P(A)=0$.

2) Să calculăm A^{-1} pentru matricea nesingulară

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\7&1&0\\-4&-2&1\end{bmatrix},$$

folosind teorema Cayley-Hamilton. Găsim $P(\lambda)=(1-\lambda)^3$ şi deci $P(A)=0$, adică $(A-I)^3=0$ sau $A^3-3A^2+3A-I=0$. De aici rezultă $A(A^2-3A+3I)=(A^2-3A+3I)A=I$ aşa încît

$$A^{-1}=A^2-3A+3I=\begin{bmatrix}1&0&0\\-7&1&0\\-10&2&1\end{bmatrix}.$$

6.3. Teoremă. Orice polinom în A de grad $\geqslant n$, unde n este ordinul matricei A, poate fi exprimat printr-un polinom de gradul $n-1$.

Demonstraţie. Fie $P(\lambda)=(-1)^n(\lambda^n-\delta_1\lambda^{n-1}+\ldots\pm\delta_n)$ polinomul caracteristic ataşat matricei A. Teorema Cayley-Hamilton implică

$$A^n=\delta_1A^{n-1}-\ldots\mp\delta_nI.$$

Prin recurenţă rezultă că puterile A^{n+p}, $p\in\mathbb{N}$, se exprimă cu ajutorul puterilor $A^{n-1},\ldots,A,I$.

Fie acum o serie de puteri $f(t)=\sum_m a_mt^m$ cu coeficienţi din $\mathbb{K}$. Se ştie că aceste serii au sens pe acele spaţii vectoriale pe care putem defini puterea t^m (numere reale, numere complexe, matrice pătratice, endomorfisme etc.). Teoria convergenţei seriilor de puteri o presupunem cunoscută de la cursul de Analiză matematică.

6.4. *Definiție. Fie* $\mathscr{A} : V_n \to V_n$ *un endomorfism și* A *matricea pătratică de ordinul* n *atașată lui* $\mathscr{A}$ *în raport cu o bază din* V_n. *Seria* $\sum_m a_m \mathscr{A}^m$ *se numește serie de endomorfism, iar suma sa se numește funcție de endomorfism. Seria* $\sum_m a_m A^m$ *se numește serie de matrice, iar suma sa se numește funcție de matrice.*

Evident studiul seriilor de endomorfisme se reduce la studiul seriilor de matrice. Pe de altă parte teorema 6.3 (consecință a teoremei Cayley-Hamilton) asigură că $f(A) = \sum_m a_m A^m$ se reduce la un polinom de gradul $n-1$ în A, unde n este ordinul matricei A. Dacă $\sum_m a_m A^m$ este convergentă, atunci coeficienții acestui polinom sînt serii convergente.

În cazul cînd A admite valori proprii distincte, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, polinomul de gradul $n-1$ se poate scrie în forma Lagrange

$$f(A) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(A - \lambda_1 I) \ldots (A - \lambda_{j-1} I)(A - \lambda_{j+1} I) \ldots (A - \lambda_n I)}{(\lambda_j - \lambda_1) \ldots (\lambda_j - \lambda_{j-1})(\lambda_j - \lambda_{j+1}) \ldots (\lambda_j - \lambda_n)} f(\lambda_j).$$

Egalitatea precedentă se poate scrie și sub forma

$$f(A) = \sum_{j=1}^{p} Z_j f(\lambda_j),$$

unde $Z_j \in \mathscr{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ nu depind de funcția f și deci pot fi determinate prin particularizarea lui f.

În cazul valorilor proprii multiple se arată că

$$f(A) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=0}^{m_k - 1} Z_{kj} f^{(j)}(\lambda_k),$$

unde $f^{(j)}(.)$ sînt valorile derivatei de ordinul j a lui f, iar $Z_{kj} \in \mathscr{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ sînt matrice independente de f.

În particular se admit următoarele definiții

$$e^A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}, \quad \sin A = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{A^{2m+1}}{(2m+1)!}, \quad \cos A = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{A^{2m}}{(2m)!},$$

seriile avînd raza de convergență ∞. Dintre acestea un rol deosebit îl joacă *matricea exponențială* e^A. Deseori, în loc de e^A se utilizează e^{At}, $t \in \mathbb{R}$ (vezi capitolul de sisteme diferențiale liniare cu coeficienți constanți).

Exemplu. Să calculăm e^{At} pentru matricea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Deoarece $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$ sînt valori proprii distincte ale lui A, rezultă $(*)$ $f(A) = Z_1 f(1) + Z_2 f(2) + Z_3 f(3)$.

Matricele Z_j, $j = 1, 2, 3$ nu depind de f și de aceea pentru a le determina particularizăm pe f, succesiv, prin : $f(z) = z - 1$, $f(z) = z + 1$, $f(z) = z^2$. Atunci, $f(A) = A - I$, $f(A) = A + I$, $f(A) = A^2$ și din $(*)$

$$f(A) = 1 \cdot Z_2 + 2 \cdot Z_3,\ f(A) = 2Z_1 + 3Z_2 + 4Z_3,\ f(A) = Z_1 + 4Z_2 + 9Z_3,$$

așa încît obținem sistemul matriceal

$$\begin{cases} Z_2 + 2Z_3 = A - I \\ 2Z_1 + 3Z_2 + 4Z_3 = A + I \\ Z_1 + 4Z_2 + 9Z_3 = A^2 \end{cases}$$

cu soluția

$$Z_1 = 1/2(A^2 + 5A + 6I),\quad Z_2 = -A^2 + 4A - 3I,\quad Z_3 = 1/2(A^2 - 3A + 2I).$$

Pentru $f(A) = e^{At}$, obținem

$$e^{At} = 1/2[(A^2 + 5A + 6I)e^t + 2(-A^2 + 4A - 3I)e^{2t} + (A^2 - 3A + 2I)e^{3t}].$$

§ 7. Probleme

1. Fie V spațiul vectorial al funcțiilor reale de clasă C^∞ pe $(0, 1)$. Să se găsească valorile proprii și vectorii proprii ai endomorfismului $\mathscr{A} : V \to V$ definit prin $g = \mathscr{A}(f)$, $g(x) = xf'(x)$, $\forall\, x \in (0, 1)$.

2. Fie V_n un spațiu vectorial real. Endomorfismul $\mathscr{F} : V_n \to V_n$ cu proprietatea $\mathscr{F}^3 + \mathscr{F} = \mathscr{O}$ se numește $\mathscr{F}$-structură pe V_n. Să se determine valorile proprii ale lui $\mathbb{C}\mathscr{F} : \mathbb{C}V_n \to \mathbb{C}V_n$.

3. Să se determine valorile proprii și vectorii proprii pentru endomorfismul $\mathscr{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dat prin matricea

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -7 & -5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Să se determine polinomul caracteristic al matricei Frobenius

$$F = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \cdots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. Fie $A \in \mathscr{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$, $U \in \mathscr{M}_{1 \times n}(\mathbb{C})$, $V \in \mathscr{M}_{n \times 1}(\mathbb{C})$ și

$$B = \begin{bmatrix} A & -AV \\ -UA & UAV \end{bmatrix}.$$

Presupunînd $\det A = 0$ să se arate că polinomul caracteristic al lui B se divide cu λ^2.

6. Să se diagonalizeze matricea

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Fie $\mathscr{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ endomorfismul definit prin $\mathscr{A}(x) = (x_1 + 2x_2 - 4x_3,\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3,\ -4x_1 - 2x_2 + x_3)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$. Să se determine o bază ortonormată în $\mathbb{R}^3$ față de care matricea endomorfismului să fie diagonală.

8. Să se cerceteze dacă matricea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

poate fi diagonalizată. În caz afirmativ să se determine matricea diagonalizatoare $\mathbb{C}$.

9. Fie $\mathscr{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ endomorfismul definit prin matricea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

în raport cu baza canonică a lui $\mathbb{R}^4$. Să se determine matricea Jordan pentru ${}^{\mathbb{C}}\mathscr{A} : {}^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^4 \to {}^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^4$ și să se scrie matricea corespunzătoare pentru $\mathscr{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$.

10. Să se determine baza față de care matricea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

are forma canonică Jordan.

11. Fie $\mathscr{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ endomorfismul definit prin matricea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

în raport cu baza canonică a lui $\mathbb{R}^4$. Să se determine matricea Jordan pentru ${}^{\mathbb{C}}\mathscr{A} : {}^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^4 \to {}^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^4$ și să se scrie matricea corespunzătoare pentru $\mathscr{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$.

12. Fie matricea

$$A = \begin{bmatrix} 5+5i & -1+i & -6-4i \\ -4-6i & 2-2i & 6+4i \\ 2+3i & -1+i & -3-2i \end{bmatrix}$$

cu elemente din $\mathbb{C}$. Să se determine o matrice unitară T astfel ca matricea $T^{-1}AT$ să fie triunghiulară.

13. Să se determine valorile proprii și vectorii proprii și apoi să se diagonalizeze matricea ortogonală

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

14. Să se determine valorile proprii și vectorii proprii ai matricei antisimetrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

15. Să se determine valoarea polinomului de matrice $P(A) = A^4 - 4A^3 + 6A^2 - 4A + I$, pentru matricea

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 4 \\ -4 & 5 & -2 & 7 \\ -3 & 3 & -2 & 5 \\ -2 & 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

16. Folosind teorema lui Cayley-Hamilton să se calculeze A^{-1} și A^n, pentru matricea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

17. Fie V un spațiu euclidian complex și $\mathscr{A} : V \to V$ un endomorfism hermitian. Să se arate că $e^{i\mathscr{A}}$ reprezintă un endomorfism unitar.

18. Să se calculeze matricea e^A, unde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Capitolul 5

FORME BILINIARE ŞI PĂTRATICE

§1. Forme biliniare

1.1. *Definiţie. Fie V un spaţiu vectorial peste cîmpul $\mathbb{K}$. O funcţie $\mathscr{A}: V \times V \to \mathbb{K}$ se numeşte formă biliniară sau tensor covariant de ordinul doi pe V dacă*

$$\mathscr{A}(kx + ly, z) = k\mathscr{A}(x, z) + l\mathscr{A}(y, z),$$

$$\mathscr{A}(x, ky + lz) = k\mathscr{A}(x, y) + l\mathscr{A}(x, z), \quad x, y, z \in V, \ k, l \in \mathbb{K}.$$

Această definiţie spune că o formă biliniară este o funcţie de două variabile vectoriale, liniară în raport cu fiecare variabilă.

Exemplu. Produsul scalar definit pe un spaţiu vectorial real este o formă biliniară.

Contraexemplu. Produsul scalar definit pe un spaţiu vectorial complex, nu este o formă biliniară deoarece $(x, ky + lz) = (x, ky) + (x, lz) = \bar{k}(x, y) + \bar{l}(x, z) \neq k(x, y) + l(x, z)$.

Fie $\mathscr{B}(V, \mathbb{K})$ mulţimea tuturor formelor biliniare pe V. Adunarea formelor biliniare şi înmulţirea cu scalari se definesc ca la funcţii; dacă $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2 \in \mathscr{B}(V, \mathbb{K})$, atunci

$$(\mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2)(x, y) = \mathscr{A}_1(x, y) + \mathscr{A}_2(x, y),$$

$$(k\mathscr{A}_1)(x, y) = k\mathscr{A}_1(x, y), \ \forall k \in \mathbb{K}, \ \forall (x, y) \in V \times V.$$

În raport cu aceste operaţii mulţimea $\mathscr{B}(V, K)$ este un spaţiu vectorial peste cîmpul $\mathbb{K}$.

1.2. *Definiţie. Forma biliniară $\mathscr{A}: V \times V \to \mathbb{K}$ se numeşte simetrică dacă $\mathscr{A}(x, y) = \mathscr{A}(y, x)$, $\forall x, y \in V$; dacă $\mathscr{A}(x, y) = -\mathscr{A}(y, x)$, $\mathscr{A}$ se numeşte formă biliniară antisimetrică.*

Fie V_n un spaţiu vectorial n-dimensional peste cîmpul $\mathbb{K}$ şi fie $\{e_1, \ldots, e_n\}$ o bază în acest spaţiu. Pentru $x, y \in V_n$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$, şi $\mathscr{A}: V_n \times V_n \to \mathbb{K}$ o formă biliniară pe V_n, avem $\mathscr{A}(x, y) = \mathscr{A}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \mathscr{A}(e_i, e_j)$ ceea ce arată că forma biliniară $\mathscr{A}$ pe V_n este unic determinată dacă se cunosc cele n^2 valori ale ei $\mathscr{A}(e_i, e_j)$, $i, j = 1, \ldots, n$, pentru vectorii bazei $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Notînd $a_{ij} = \mathscr{A}(e_i, e_j) \in \mathbb{K}$, egalitatea de mai sus devine

$$\mathscr{A}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

care se numeşte *expresia analitică* a formei biliniare faţă de baza considerată.

Matricea $A = [a_{ij}] \in \mathscr{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ de elemente $a_{ij} = \mathscr{A}(e_i, e_j)$ se numeşte *matricea formei biliniare* $\mathscr{A}$ în raport cu baza $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Dacă introducem

matricele coloană $X = [x_j] \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$, $Y = [y_j] \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$, ataşate vectorilor x şi y, atunci expresia analitică a formei biliniare poate fi scrisă sub forma matriceală

$$\mathcal{A}(x, y) = {}^tX\, A\, Y.$$

Aplicaţia care asociază fiecărei forme biliniare $\mathcal{A} : V_n \times V_n \to \mathbb{K}$ matricea ei în raport cu o bază dată a spaţiului V_n este un izomorfism între spaţiul vectorial $\mathcal{B}(V_n, \mathbb{K})$ şi spaţiul vectorial $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. În consecinţă $\dim \mathcal{B}(V_n, \mathbb{K}) = \dim \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) = n^2$.

Dacă matricea A este nesingulară (singulară), atunci $\mathcal{A}$ se numeşte *nedegenerată* (*degenerată*). În general, rangul matricei A se numeşte *rangul* formei biliniare $\mathcal{A}$.

1.3. Teoremă. O formă biliniară $\mathcal{A} : V_n \times V_n \to \mathbb{K}$ este simetrică (antisimetrică) dacă şi numai dacă matricea formei într-o bază a spaţiului este simetrică (antisimetrică).

Demonstraţie. Admitem că $\mathcal{A}$ este o formă simetrică; atunci dacă $A = [a_{ij}]$ este matricea formei într-o bază $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a spaţiului, avem $a_{ij} = \mathcal{A}(e_i, e_j) = \mathcal{A}(e_j, e_i) = a_{ji}$. deci $A = {}^tA$. Reciproc, admitem că există o bază $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a spaţiului astfel încît matricea formei $A = [a_{ij}]$ este simetrică. Atunci $\forall\, x, y \in V$ avem $\mathcal{A}(y, x) = {}^t({}^tYAX) = {}^tX{}^tAY = {}^tXAY = \mathcal{A}(x, y)$.

1.4. Teoremă. Dacă $C = [c_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ este matricea de trecere de la baza $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la baza $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ din V_n, iar $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ sînt matricele formei biliniare $\mathcal{A} : V_n \times V_n \to \mathbb{K}$ faţă de cele două baze, atunci

$$B = {}^tCAC.$$

Demonstraţie. În baza $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ avem $x = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} y'_j e'_j$, $x, y \in V_n$. Dacă $X' = [x'_j]$, $Y' = [y'_j]$, iar $B = [b_{ij}]$, $b_{ij} = \mathcal{A}(e'_i, e'_j)$, $i, j = 1, \ldots, n$, este matricea lui $\mathcal{A}$ faţă de această bază, atunci $\mathcal{A}(x, y) = {}^tX'BY'$.

Pe de altă parte matricele coloană X, Y şi X', Y' ale lui x şi y în cele două baze sînt legate prin egalităţile $X = CX'$, $Y = CY'$ aşa încît $\mathcal{A}(x, y) = {}^tXAY = {}^t(CX')A(CY') = {}^tX'({}^tCAC)Y'$. Rezultă ${}^tX'BY' = {}^tX'({}^tCAC)Y'$; deci $B = {}^tCAC$.

1.5. *Definiţie. Fie $\mathcal{A} : V \times V \to \mathbb{K}$ o formă biliniară simetrică. Mulţimea* $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \{x \in V / \mathcal{A}(x, y) = 0,\ \forall\, y \in V\}$ *se numeşte nucleul formei.*

1.6. Propoziţie. $\operatorname{Ker} \mathcal{A} \subset V$ este un subspaţiu vectorial al lui V.

Demonstraţie. Fie $u, v \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$. Atunci $\mathcal{A}(u, w) = 0$, $\mathcal{A}(v, w) = 0$ $\forall w \in V$ şi dacă $k, l \in \mathbb{K}$, avem $k\mathcal{A}(u, w) + l\mathcal{A}(v, w) = 0$ sau $\mathcal{A}(ku + lv, w) = 0$. Deci $ku + lv \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$.

1.7. Teorema rangului. Dacă $\mathcal{A} : V_n \times V_n \to \mathbb{K}$ este o formă biliniară simetrică pe spaţiul vectorial n-dimensional V_n, atunci

$$\operatorname{rang} \mathcal{A} = n - \dim(\operatorname{Ker} \mathcal{A}).$$

Demonstrație. Fie $\{e_1, \ldots, e_n\}$ o bază a lui V_n și $A = [a_{ij}]$, $a_{ij} \in \mathbb{K}$ matricea formei biliniare în raport cu această bază. Atunci $\forall x, y \in V_n$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$, $\mathscr{A}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \right) y_j$ care arată că $x \in \operatorname{Ker} \mathscr{A}$ dacă și numai dacă x este o soluție a sistemului liniar și omogen $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i = 0$, $j = 1, \ldots, n$. Deci $\operatorname{Ker} \mathscr{A}$ coincide cu mulțimea soluțiilor acestui sistem. Pe de altă parte $\operatorname{rang} \mathscr{A} = \operatorname{rang} [a_{ij}]$, adică rangul lui $\mathscr{A}$ este egal cu diferența dintre numărul necunoscutelor sistemului și dimensiunea spațiului soluțiilor sistemului.

§ 2. Forme pătratice

Fie V un spațiu vectorial peste cîmpul $\mathbb{K}$ și $\mathscr{A} : V \times V \to \mathbb{K}$ o formă biliniară simetrică.

2.1. *Definiție. Funcția $Q : V \to \mathbb{K}$ definită prin egalitatea $Q(x) = \mathscr{A}(x, x)$, se numește forma pătratică asociată formei biliniare simetrice $\mathscr{A}$; $\mathscr{A}$ se zice forma polară sau forma dedublată a lui Q.*

De exemplu forma pătratică corespunzătoare produsului scalar real este pătratul normei euclidiene : $Q(x) = (x, x) = \|x\|^2$, $x \in V$.

Întrucît pentru $x, y \in V$, $Q(x + y) = \mathscr{A}(x + y, x + y) = \mathscr{A}(x, x) + \mathscr{A}(x, y) + \mathscr{A}(y, x) + \mathscr{A}(y, y) = \mathscr{A}(x, x) + 2\mathscr{A}(x, y) + \mathscr{A}(y, y)$ și $\mathscr{A}(x, y) = \mathscr{A}(y, x)$, rezultă,

$$\mathscr{A}(x, y) = 1/2[Q(x + y) - Q(x) - Q(y)].$$

Această egalitate arată că dacă se cunoaște forma pătratică Q, atunci forma biliniară simetrică $\mathscr{A}$ este perfect determinată.

Presupunem $\dim V = n$. Dacă $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ este o bază în spațiul vectorial V_n, atunci pentru orice $x \in V_n$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, avem

$$Q(x) = \mathscr{A}(x, x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = {}^t X A X,$$

unde $a_{ij} = \mathscr{A}(e_i, e_j)$, $i, j = 1, \ldots, n$, $X = {}^t[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. De aici deducem că matricea și rangul formei pătratice Q coincid respectiv cu matricea și rangul formei biliniare simetrice $\mathscr{A}$ asociate lui Q.

2.2. *Definiție. Fie $\mathscr{A} : V \times V \to \mathbb{R}$ o formă biliniară simetrică și Q forma pătratică asociată. Vectorii $x, y \in V$ se numesc ortogonali în raport cu $\mathscr{A}$ (sau Q) dacă $\mathscr{A}(x, y) = 0$.*

2.3. *Definiție. Fie $U \subset V$ un subspațiu vectorial al lui V. Mulțimea $U^{\perp} = \{y \in V \mid \mathscr{A}(x, y) = 0, \ \forall x \in \mathscr{A}\}$ se numește complementul ortogonal al lui U în V față de $\mathscr{A}$.*

2.4. Teoremă. Fie $\mathscr{A} : V \times V \to \mathbb{R}$ o formă biliniară simetrică.

1) $U^{\perp}$ este subspațiu vectorial al lui V;

2) dacă $\{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ este o bază în U, apartenența $y \in U^{\perp}$ este echivalentă cu sistemul

$$\mathscr{A}(u_1, y) = \mathscr{A}(u_2, y) = \ldots = \mathscr{A}(u_p, y) = 0;$$

3) dacă $\dim V = n$ avem $\dim U + \dim U^{\perp} \geqslant \dim V$; egalitatea are loc dacă $\mathscr{A}$ este nedegenerată;

4) dacă $\mathscr{A}/U$, $\mathscr{A}/U^{\perp}$ sînt restricțiile lui $\mathscr{A}$ la U și respectiv $U^{\perp}$, $\dim V = n$ rezultă

$$U \oplus U^{\perp} = V \Leftrightarrow \mathscr{A}/U \text{ este nedegenerată.}$$

Demonstrație. 1) Fie $y_1, y_2 \in U^{\perp}$. Atunci $\mathscr{A}(x_1, y_1) = 0$, $\mathscr{A}(x_2, y_2) = 0$. Pentru $k, l \in \mathbb{R}$ avem $k\mathscr{A}(x, y_1) + l\mathscr{A}(x, y_2) = 0$ sau $\mathscr{A}(x, ky_1 + ly_2) = 0$. Deci $ky_1 + ly_2 \in U^{\perp}$.

2) $y \in U^{\perp}$ implică $\mathscr{A}(x, y) = 0$, $\forall\, x \in U$; în particular $\mathscr{A}(u_i, y) = 0$, $i = 1, \ldots, p$, deoarece $u_i \in U$. Reciproc, $\mathscr{A}(x, y) = 0$ pentru orice $x \in U$ deoarece dacă $x \in U$ avem $x = \sum_{i=1}^{p} x_i u_i$, $x_i \in \mathbb{R}$ așa încît $\mathscr{A}(x, y) = \sum_{i=1}^{p} x_i \mathscr{A}(u_i, y) = 0$.

3) a se vedea problema 4.§5, din [48].

4) Admitem că restricția $\mathscr{A}/U$ este nedegenerată. Aceasta înseamnă că singurul vector din U ortogonal pe toți vectorii din U este vectorul nul, așa încît $U \cap U^{\perp} = \{0\}$. Cum $\mathscr{A}$ este nedegenerată avem $\dim U + \dim U^{\perp} = \dim V$; deci $U \oplus U^{\perp} = V$. Reciproc, dacă $U \otimes U^{\perp} = V$, rezultă $U \cap U^{\perp} = \{0\}$ așa încît $\mathscr{A}/U$ este nedegenerată.

Observație. Chiar dacă o formă biliniară $\mathscr{A}$ (sau Q) este nedegenerată pe spațiul V, se poate întîmpla ca restricțiile ei la anumite subspații vectoriale ale lui V să fie degenerate. De exemplu, forma pătratică $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ este nedegenerată în $\mathbb{R}^3$ dar restricția ei la subspațiul $U = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_2 - x_3 = 0\}$ este degenerată avînd rangul egal cu unitatea. Într-adevăr dacă facem schimbarea de coordonate $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $x_2 - x_3 = y_3$ forma pătratică devine $Q(y) = y_1^2 + 2y_2y_3 - y_3^2$. Prin schimbarea menționată, mulțimea U se scrie $U = \{y \in \mathbb{R}^3 | y_3 = 0\}$ și atunci $(Q/U)(y) = y_1^2$ care evident are rangul unu. Pentru a obține complementul ortogonal $U^{\perp}$, fie o bază în U formată din vectorii $u_1 = (0, 1, 1)$, $u_2 = (1, 1, 1)$. Vectorii $y \in U^{\perp}$ trebuie să verifice ecuațiile $\mathscr{A}(u_1, y) = 0$, $\mathscr{A}(u_2, y) = 0$, adică $y_2 - y_3 = 0$, $y_1 + y_2 - y_3 = 0$ cu soluția generală $y_1 = 0$, $y_2 = y_3 = a$. Deci $y = (0, a, a) \in U^{\perp}$.

2.5. *Definiție. Un vector $x \in V$ se numește izotrop în raport cu o formă biliniară simetrică $\mathscr{A} : V \times V \to \mathbb{C}$ (sau relativ la forma pătratică asociată Q) dacă $Q(x) = \mathscr{A}(x, x) = 0$.*

Exemplu. Pentru forma biliniară $\mathscr{A} : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\mathscr{A}(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$ forma pătratică asociată este definită prin $Q(x) = x_1^2 + x_2^2$. Din $Q(x) = 0$ rezultă $x_2 = \pm i x_1$ așa încît vectorii izotropi ai formei sînt (x_1, ix_1) și $(x_1, -ix_1)$ cu $x_1 \in \mathbb{C}$. Definiția 2.5 spune că un vector $x \in V$ este izotrop dacă și numai dacă el este ortogonal lui însuși; evident vectorul nul al spațiului este totdeauna izotrop deoarece $Q(0) = 0$.

2.6. *Definiție. Fie $\mathscr{A} : V_n \times V_n \to \mathbb{R}$ o formă biliniară simetrică. O bază $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subset V_n$ se numește bază ortogonală în raport cu forma $\mathscr{A}$ dacă $\mathscr{A}(e_i, e_j) = 0$ pentru $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$, adică vectorii ei sînt ortogonali doi cîte doi față de forma $\mathscr{A}$.*

În raport cu o bază ortogonală matricea formei este diagonală,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

și dacă notăm $a_{ii} = a_i$, $i = 1, \ldots, n$, atunci expresiile analitice ale formei biliniare $\mathscr{A}$ și formei pătratice asociate Q, devin,

$$\mathscr{A}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i y_i, \qquad Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2.$$

Aceste expresii se numesc *expresii canonice* corespunzătoare formei biliniare simetrice $\mathscr{A}$ și respectiv formei pătratice Q. În acest caz se spune că forma pătratică $Q : V_n \to \mathbb{R}$ (respectiv forma biliniară $\mathscr{A}$) a fost redusă la expresia canonică.

§3. Reducerea formelor pătratice la expresia canonică

3.1. Teoremă. Dacă $Q : V_n \to \mathbb{R}$ este o formă pătratică pe spațiul V_n, atunci există în V_n o bază ortogonală în raport cu Q, adică o bază față de care $Q(x)$ să aibă expresia canonică.

Demonstrație. Admitem cazul cînd forma pătratică Q este nedegenerată. Aceasta înseamnă că și polara ei $\mathscr{A}$ este nedegenerată. Vom folosi inducția după n. Pentru $n = 1$, baza este formată dintr-un vector nenul. Fie $n > 1$. Deoarece $\mathscr{A}$ este nedegenerată, Ker $\mathscr{A} = \{0\}$, ceea ce înseamnă că există vectorii $x, y \in V_n$ așa încît $\mathscr{A}(x, y) \neq 0$. Atunci cel puțin unul dintre scalarii $\mathscr{A}(x + y, x + y)$, $\mathscr{A}(x, x)$, $\mathscr{A}(y, y)$ este nenul. Deci există un vector $e_1 \in V_n$ așa încît $\mathscr{A}(e_1, e_1) \neq 0$. Fie atunci $U \subset V_n$ subspațiul vectorial generat de vectorul e_1 și $U^\perp$ complementul lui ortogonal față de $\mathscr{A}$. Deoarece vectorii din U sînt de forma ke_1, $k \in \mathbb{R}$ și $\mathscr{A}(e_1, ke_1) = k\mathscr{A}(e_1, e_1) \neq 0$ pentru $k \neq 0$ rezultă că și restricția $\mathscr{A}/U$ este nedegenerată.

Conform teoremei 2.4 avem $V_n = U \oplus U^\perp$ și restricția $\mathscr{A}/U^\perp$ este de asemenea nedegenerată. Aceasta arată că dim $U^\perp = n - 1$, deoarece prin construcție dim $U = 1$; prin ipoteza de inducție, în $U^\perp$ există o bază notată $\{e_2, e_3, \ldots, e_n\}$ ortogonală față de restricția $\mathscr{A}/U^\perp$, deci și față de $\mathscr{A}$.

Din felul cum au fost construiți, vectorii $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sînt ortogonali doi cîte doi față de $\mathscr{A}$ și deci liniar independenți. În adevăr, ecuația $k_1e_1 + \ldots + k_ne_n = 0$, $k_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, implică $0 = \mathscr{A}(e_i, k_1e_1 + k_2e_2 + \ldots + k_ie_i + \ldots + k_ne_n) = k_i\mathscr{A}(e_i, e_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Relația $\mathscr{A}(e_i, e_i) \neq 0$ conduce la $k_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$. În concluzie $\{e_1, \ldots, e_n\}$ constituie baza căutată.

Să considerăm cazul cînd $\mathscr{A}$ este degenerată, adică Ker $\mathscr{A} \neq \{0\}$. Notăm $U =$ Ker $\mathscr{A}$ și fie $W \subset V_n$ subspațiul suplimentar cu U, adică $U \cap W = \{0\}$ și $V_n = U \oplus W$. Conform teoremei 1.7 avem dim $U = n -$rang $\mathscr{A}$ și atunci dim $W =$ dim $V_n -$ dim $U = n - n +$ rang $\mathscr{A} =$ rang $\mathscr{A}$ ceea ce înseamnă că restricția $\mathscr{A}/W$ este nedegenerată. Notăm $p =$ dim $W =$ rang $\mathscr{A}$. Conform primului caz există o bază $\{f_1, \ldots, f_p\}$ în W ortogonală față de restricția $\mathscr{A}/W$ și deci și față de $\mathscr{A}$. Completăm această bază cu baza $\{f_{p+1}, \ldots, f_n\}$ a lui U așa încît obținem baza $\{f_1, \ldots, f_p, \ldots, f_n\}$ a lui V_n, ortogonală față de $\mathscr{A}$ (vectorii $f_{p+1}, \ldots, f_n$ aparținînd lui $U =$ Ker $\mathscr{A}$ satisfac egalitățile $\mathscr{A}(f_k, f_h) = 0$, $k \neq h$, $k, h = p + 1, \ldots, n$). Așadar, în ambele cazuri, s-a putut găsi o bază a lui V_n.

3.2. Teoremă. Dacă rang $\mathscr{A} = p < n$ atunci oricare ar fi baza $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a lui V_n ortogonală față de forma biliniară simetrică $\mathscr{A}$ (sau Q),

exact p dintre scalarii $\mathscr{A}(e_1, e_1) = Q(e_1), \ldots, \mathscr{A}(e_n, e_n) = Q(e_n)$ sînt *nenuli*; adică, oricare ar fi expresia canonică a lui $\mathscr{A}$ (sau Q), numărul coeficienților nenuli este același și anume egal cu rang $\mathscr{A}$ = rang Q.

Demonstrație. Fie $\{e_1, \ldots, e_n\}$ o bază a lui V_n ortogonală față de $\mathscr{A}$ așa încît $\mathscr{A}(e_i, e_i) \neq 0$, $i = 1, \ldots, q$ și $\mathscr{A}(e_j, e_j) = 0$, $j = q+1, \ldots, n$. Atunci $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \in \operatorname{Ker} \mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{A}(e_k, x) = 0$, $k = 1, \ldots, n$ sau $x_k \mathscr{A}(e_k, e_k) = 0$ ceea ce implică $x_1 = x_2 = \ldots = x_q = 0$ deoarece $\mathscr{A}(e_k, e_k) \neq 0$, $k = 1, \ldots, q$. Așadar dim Ker $\mathscr{A} = n - q$ și cum dim Ker $\mathscr{A} = n - p$ (deoarece rang $\mathscr{A} = p$) rezultă $q = p$.

Un procedeu practic de a construi o bază ortogonală față de o formă pătratică Q dată, adică baza față de care $Q(x)$ se reduce la expresia canonică, îl constituie metoda lui Gauss.

3.3. Teoremă (metoda Gauss). Fie $Q : V_n \to \mathbb{C}$ o formă pătratică pe spațiul vectorial complex V_n. Atunci se poate construi o bază $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ în V_n, ortogonală în raport cu Q, față de care $Q(x)$ să se reducă la expresia canonică.

Demonstrație. Fie $\{f_1, \ldots, f_n\}$ o bază a spațiului V_n și $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ expresia analitică a formei în această bază. Dacă $a_{ii} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ și Q nu este identic nulă, există cel puțin un element $a_{ij} \neq 0$ pentru $i \neq j$. Prin transformarea de coordonate $x_i = x'_i + x'_j$, $x_j = x'_i - x'_j$, $x_k = x'_k$, $k \neq i, j$ expresia formei pătratice devine $Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a'_{ij} x'_i x'_j$ în care cel puțin unul din elementele diagonale a'_{ii}, $i = 1, \ldots, n$ este nenul (deoarece $x_i x_j = x'^2_i - x'^2_j$).

Notăm cu $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ baza lui V_n față de care coordonatele lui x sînt x'_i, $i = 1, \ldots, n$. Matricea de trecere este

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -1 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

Fără a micșora generalitatea, putem admite că $a'_{11} \neq 0$ așa încît putem scrie $Q(x) = a'_{11} x'^2_1 + 2 \sum_{k=2} a'_{1k} x'_1 x'_k + \sum_{i,j \neq 1}^{n} a'_{ij} x'_i x'_j$. Adăugăm și scădem termenii potriviți pentru a obține pătratul formei liniare $a'_{11} x'_1 + a'_{12} x'_2 + \ldots + a'_{1n} x'_n$, adică

$$Q(x) = \frac{1}{a'_{11}} (a'_{11} x'_1 + a'_{12} x'_2 + \ldots + a'_{1n} x'_n)^2 + \sum_{i,j=2}^{n} a''_{ij} x'_i x'_j,$$

unde $\sum_{i,j=2}^{n} a''_{ij}x_ix_j$ nu conține pe x'_1. Fie $\{e''_1, e''_2, \ldots, e''_n\}$ baza din V_n față de care coordonatele vectorului x să satisfacă egalitățile $x''_1 = a'_{11}x'_1 + a'_{12}x'_2 + \ldots + a'_{1n}x'_n$, $x''_j = x'_j$, $j = 2, \ldots, n$. În raport cu această bază, expresia formei pătratice devine $Q(x) = \frac{1}{a'_{11}} x''^2_1 + \sum_{i,j=2}^{n} a''_{ij}x''_ix''_j$. Suma $Q_1(x) = \sum_{i,j=2}^{n} a''_{ij}x''_ix''_j$ este o formă pătratică în $n-1$ variabile așa încît poate fi tratată asemănător.

Matricea de trecere la noua bază este

$$C_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a'_{11}} & -\frac{a'_{12}}{a'_{11}} \ldots & -\frac{a'_{1n}}{a'_{11}} \\ 0 & 1 \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

În conluzie, după cel mult $n-1$ pași obținem o bază $\{e_1, \ldots, e_n\}$ în V_n, ortogonală față de Q, forma pătratică reducîndu-se la expresia canonică care reprezintă o sumă de pătrate de $p \leqslant n$ forme liniare independente ($p = \operatorname{rang} Q$).

Exemple. 1) Pentru forma pătratică $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definită prin $Q(x) = x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2x_3$, în baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$ avem $a_{ii} = 0$, $i = 1, 2, 3$.

Prin schimbarea de coordonate $x_1 = x'_1 + x'_2$, $x_2 = x'_1 - x'_2$, $x_3 = x'_3$ obținem $Q(x) = x'^2_1 - x'^2_2 - x'_1x'_3 - 3x'_2x'_3$. Folosind matricea de trecere

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

găsim baza nouă $e'_1 = e_1 + e_2$, $e'_2 = e_1 - e_2$, $e'_3 = e_3$.

In $Q(x) = (x'_1 - 1/2x'_3)^2 - x'^2_2 - 3x'_2x'_3 - 1/4x'^2_3$ notăm $x''_1 = x'_1 - 1/2x'_3$, $x''_2 = x'_2$, $x''_3 = x'_3$ și obținem $Q(x) = x''^2_1 - x''^2_2 - 3x''_2x''_3 - 1/4x''^2_3$; baza corespunzătoare este $e''_1 = e'_1$; $e''_2 = e'_2$, $e''_3 = 1/2e'_1 + e'_3$; iar matricea de trecere este

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Asemănător, $Q(x) = x''^2_1 - (x''_2 + 3/2x''_3)^2 + 2x''^2_3$ așa încît, prin schimbarea de coordonate $x'''_1 = x''_1$, $x'''_2 = x''_2 + 3/2\, x''_3$, $x'''_3 = x''_3$, avem $Q(x) = x'''^2_1 - x'''^2_2 + 2x'''^2_3$ care reprezintă expresia canonică a formei. Baza, ortogonală față de Q, față de care am obținut această expresie este formată din vectorii $e'''_1 = e_1 + e_2$; $e'''_2 = e_1 - e_2$, $e'''_3 = -e_1 + 2e_2 + e_3$

(e_1, e_2, e_3, sînt vectorii bazei canonice). S-a folosit matricea de trecere

$$C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriceal, ${}^t[e_1'', e_2'', e_3''] = {}^tC_1 \cdot {}^tC_2 \cdot {}^tC_3\, {}^t[e_1, e_2, e_3]$.

2) Pentru forma pătratică $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = 9x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 + 12x_1x_2 - 10x_1x_3 - 2x_2x_3$, în baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$, obținem succesiv

$Q(x) = 1/9\,(9x_1 + 6x_2 - 5x_3)^2 - 36/9x_2^2 - 25/9x_3^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 - 2x_2x_3 = 1/9(9x_1 + 6x_2 - 5x_3)^2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 29/9x_3^2 = 1/9\,(9x_1 + 6x_2 - 5x_3)^2 + 1/2(2x_2 - x_3)^2 - 1/2x_3^2 + 29/9\,x_3^2 = 1/9(9x_1 + 6x_2 - 5x_3)^2 + 1/2(2x_2 - x_3)^2 + 49/18\,x_3^2 = 1/9y_1^2 + 1/2y_2^2 + 49/18\,y_3^2$, unde, $y_1 = 9x_1 + 6x_2 - 5x_3$, $y_2 = 2x_2 - x_3$, $y_3 = x_3$ sînt coordonatele lui x în baza ortogonală față de Q, formată din vectorii $f_1 = 1/9e_1$, $f_2 = -3/9e_1 + 1/2\,e_2$, $f_3 = 2/9e_1 + 1/2\,e_2 + e_3$.

3.4. Teoremă (metoda Jacobi). Fie $Q: V_n \to \mathbb{R}$ o formă pătratică și $A = [a_{ij}]$ matricea ei în baza $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a lui V_n. Dacă determinanții $\Delta_1 = a_{11}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\ldots$, $\Delta_n = \det A$ sînt nenuli, există o bază $\{f_1, \ldots, f_n\}$ în V_n față de care expresia formei pătratice Q devine $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} x_i'^2$, unde x_i', $i = 1, \ldots, n$, sînt coordonatele lui x în această bază; $\Delta_0 = 1$.

Demonstrație. Căutăm vectorii $f_1, \ldots, f_n$ de forma $f_1 = c_{11}e_1$, $f_2 = c_{21}e_1 + c_{22}e_2$, $\ldots$, $f_n = c_{n1}e_1 + c_{n2}e_2 + \ldots + c_{nn}e_n$ așa încît să avem $\mathscr{A}(f_i, e_j) = 0$, $1 \leqslant j < i \leqslant n$, iar $\mathscr{A}(f_i, e_i) = 1$, unde $\mathscr{A}$ este polara formei pătratice Q. Scrise dezvoltat, aceste condiții devin

$$\mathscr{A}(f_i, e_1) = c_{i1}a_{11} + c_{i2}a_{12} + \ldots + c_{ii}a_{1i} = 0$$

$$\mathscr{A}(f_i, e_2) = c_{i1}a_{21} + c_{i2}a_{22} + \ldots + c_{ii}a_{2i} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathscr{A}(f_i, e_{i-1}) = c_{i1}a_{i-1,1} + c_{i2}a_{i-1,2} + \ldots + c_{ii}a_{i-1i} = 0$$

$$\mathscr{A}(f_i, e_i) = c_{i1}a_{i1} + c_{i2}a_{i2} + \ldots + c_{ii}a_{ii} = 1.$$

Acest sistem are soluție unică, deoarece prin ipoteză determinantul sistemului este chiar $\Delta_i \neq 0$. Regula lui Crammer dă

$$c_{ii} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1i-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \ldots & a_{i-1,i-1} & 0 \\ a_{i1} & \ldots & a_{i,i-1} & 1 \end{vmatrix}}{\Delta_i} = \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}$$

așa încît baza $\{f_1, \ldots, f_n\}$ este perfect determinată. Să găsim acum expresia formei pătratice în această bază. Matricea lui Q în baza $\{f_1, \ldots, f_n\}$ este matricea B de elemente $b_{ij} = \mathscr{A}(f_i, f_j) = \mathscr{A}(f_i, c_{j1}e_1 + \ldots + c_{jj}e_j) = c_{j1}\mathscr{A}(f_i, e_1) + c_{j2}\mathscr{A}(f_i, e_2) + \ldots + c_{jj}\mathscr{A}(f_i, e_j)$; cum $\mathscr{A}(f_i, e_j) = 0$ pentru $j < i$ (prin construcție) deducem că $b_{ij} = 0$ pentru $j < i$. Din proprietatea *de simetrie* a formei biliniare $\mathscr{A}$ rezultă că $b_{ij} = 0$ și pentru $j > i$. În concluzie $b_{ij} = 0$ pentru $i \neq j$. În plus, dacă $j = i$, atunci $b_{ii} = \mathscr{A}(f_i, f_i) = \mathscr{A}(f_i, c_{i1}e_1 + \ldots + c_{ii}e_i) = c_{i1}\mathscr{A}(f_i, e_1) + \ldots + c_{i,i-1}\mathscr{A}(f_i, e_{i-1}) + c_{ii}\mathscr{A}(f_i, e_i) = c_{ii} = \dfrac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}$, $i = 1, \ldots, n$. În baza $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ avem

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_i'x_j' = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} x_i'^2 .$$

Exemplu. Pentru forma pătratică $x \to Q(x) = 5x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, matricea atașată în baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$ este

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Minorii principali Δ_i sînt $\Delta_1 = a_{11} = 5$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 26$, $\Delta_3 = \det A = 80$. Cum $\Delta_0 = 1$, rezultă expresia canonică

$$Q(x) = \frac{1}{5} x_1'^2 + \frac{5}{26} x_2'^2 + \frac{13}{40} x_3'^2,$$

în baza formată din vectorii $f_1 = 1/5e_1$, $f_2 = 1/13e_1 + 5/26e_2$, $f_3 = 3/20e_1 + 1/20e_2 + 13/40e_3$.

3.5. Teoremă. Fie V_n un spațiu vectorial real euclidian. Dacă $Q : V_n \to \mathbb{R}$ este o formă pătratică (reală), atunci există o bază $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ a lui V_n față de care expresia canonică a formei este $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i'^2$, unde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sînt valorile proprii ale matricei formei, fiecare valoare proprie fiind scrisă de atîtea ori cît este multiplicitatea sa, iar x_i', $i = 1, \ldots, n$, sînt coordonatele lui x în această bază.

Demonstrație. Deoarece matricea formei Q este o matrice simetrică reală, ea admite numai valori proprii reale și se poate diagonaliza. Atunci baza căutată $\{f_1, \ldots, f_n\}$ este formată din vectorii proprii ortonormați ai matricei formei. În această bază obținem expresia canonică a formei. Anume dacă notăm prin C matricea vectorilor proprii ortonormați, prin schimbarea $X = CX'$, $X = {}^t[x_1, \ldots, x_n]$, $X' = {}^t[x_1', \ldots, x_n']$ se obține imediat expresia canonică.

Exemplu. Fie forma pătratică $x \to Q(x) = x_1^2 + 7x_2^2 + x_3^2 - 8x_1x_2 - 16x_1x_3 - 8x_2x_3$, $x \in \mathbb{R}^3$, în baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$. În această bază, matricea formei este

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{bmatrix},$$

care are valorile proprii $\lambda_1 = -9$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 9$. Vectorii proprii ortonormați corespunzători sînt $f_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $f_2 = \left(0, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $f_3 = \left(\frac{-5}{3\sqrt{5}}, \frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}\right)$ așa încît matricea de trecere la această bază este

$$C = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & -5/3\sqrt{5} \\ 1/3 & -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} \\ 2/3 & 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Prin transformarea $X = CX'$ obținem $Q(x) = -9x_1'^2 + 9x_2'^2 + 9x_3'^2$.

§4. Signatura unei forme pătratice reale

4.1. *Definiție. O formă pătratică $Q : V \to \mathbb{R}$ se numește pozitiv semidefinită (negativ semidefinită) dacă $Q(x) \geqslant 0$ (respectiv $Q(x) \leqslant 0$) pentru orice $x \in V$. Forma pătratică Q se numește pozitiv definită (negativ definită) dacă $Q(x) > 0$ (respectiv $Q(x) < 0$) pentru orice $x \neq 0$ din V. O formă biliniară simetrică $\mathscr{A} : V \times V \to \mathbb{R}$ se numește pozitiv definită (negativ definită, pozitiv semidefinită, negativ semidefinită) dacă forma pătratică asociată Q are această proprietate.*

Exemplu. Produsul scalar definit pe un spațiu vectorial real este o formă biliniară simetrică și pozitiv definită.

Observație. Dacă există $x_1 \in V$ așa încît $Q(x_1) > 0$ și $x_2 \in V$ așa încît $Q(x_2) < 0$ spunem că forma pătratică Q este *nedefinită*.

Metoda lui Jacobi ne permite să obținem o condiție necesară și suficientă pentru ca o formă pătratică $Q : V_n \to \mathbb{R}$ să fie pozitiv definită (respectiv negativ definită).

4.2. Teoremă (criteriul lui Sylvester). Dacă sînt îndeplinite condițiile teoremei Jacobi, atunci forma pătratică $Q : V_n \to \mathbb{R}$ este pozitiv definită dacă și numai dacă $\Delta_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ și este negativ definită dacă și numai dacă $(-1)^k \Delta_k > 0$, $k = 1, \ldots, n$.

Demonstrație. Fie Q pozitiv definită. Admitem prin absurd că există un $\Delta_p = 0$, $1 \leqslant p \leqslant n$; aceasta înseamnă că una din liniile lui Δ_p este o combinație liniară de celelalte, adică există numerele $k_1, \ldots, k_p$, nu toate nule, astfel ca $k_1 a_{1i} + k_2 a_{2i} + \ldots + k_p a_{pi} = 0$, $i = 1, \ldots, p$, adică $k_1 \mathscr{A}(e_1, e_i) + k_2 \mathscr{A}(e_2, e_i) + \ldots + k_p \mathscr{A}(e_p, e_i) = 0$. De aici rezultă $\mathscr{A}(k_1 e_1 + \ldots + k_p e_p, e_i) = 0$, $i = 1, \ldots, p$, deoarece $\mathscr{A}$ este o formă biliniară simetrică. Amplificînd prin k_i, $i = 1, \ldots, p$ și adunînd relațiile obținute, găsim $k_1 \mathscr{A}\left(\sum_{i=1}^{p} k_i e_i, e_1\right) + k_2 \mathscr{A}\left(\sum_{i=1}^{p} k_i e_i, e_2\right) + \ldots + k_p \mathscr{A}\left(\sum_{i=1}^{p} k_i e_i, e_p\right) = 0$ sau $\mathscr{A}\left(\sum_{i=1}^{p} k_i e_i, \sum_{i=1}^{p} k_i e_i\right) = 0$. Rezultă $\sum_{i=1}^{p} k_i e_i = 0$, deoarece $\mathscr{A}$ este admisă pozitiv definită. Cum k_i, $i = 1, \ldots, p$ nu sînt toți nuli, rezultă că vectorii $e_1, \ldots, e_p$ sînt liniar dependenți, ceea ce contrazice ipoteza că $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ este bază în V_n. Deci $\Delta_p \neq 0$, $p = 1, \ldots, n$. Mai mult, conform

teoremei 3.4, există o bază a lui V_n față de care $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} x_i'^2$ și cum Q este admisă pozitiv definită, rezultă $\frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} > 0$, adică $\Delta_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Reciproc, dacă $\Delta_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$ rezultă $\frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} > 0$, $i = 1, \ldots, n$ și din $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} x_i'^2$ deducem $Q(x) \geqslant 0$; $Q(x) = 0 \Leftrightarrow x_1' = x_2' = \ldots$ $\ldots = x_n' = 0$, deci $x = 0$. În concluzie $Q(x) > 0, \forall x \neq 0$. Dacă Q este negativ definită, rezultă că forma $-Q$ este pozitiv definită și totul se repetă ca mai sus avînd în vedere că matricea lui $-Q$ este $-A = [-a_{ij}]$.

4.3. *Definiție. Fie expresia canonică* $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$ *a unei forme pătratice* $Q : V_n \to \mathbb{R}$ *în care* p *coeficienți sînt strict pozitivi,* q *sînt strict negativi, iar* $d = n - (p + q)$ *sînt nuli. Tripletul* (p, q, d) *se numește signatura formei pătratice* Q.

4.4. Teoremă (*legea de inerție*). Signatura unei forme pătratice este invariantă la schimbarea bazei față de care are o expresie canonică.

Demonstrație. Fie $\{e_1, \ldots, e_n\}$, $\{e_1', \ldots, e_n'\} \subset V_n$ două baze în V_n față de care forma pătratică $Q : V_n \to \mathbb{R}$ are expresiile canonice

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2, \quad x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \text{ și respectiv } Q(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j x_j'^2,$$

$x = \sum_{j=1}^{n} x_j' e_j'$. Putem considera cele două baze astfel încît a_i și b_j $i, j = 1, \ldots$ $\ldots, n$ să fie $1, -1$ sau 0. În plus putem presupune (eventual printr-o renumerotare) că primii p-coeficienți sînt $+1$, următorii q sînt -1 și restul nuli, adică $\forall x \in V_n$ să avem

$$(*) \qquad Q(x) = \sum_{k=1}^{p} x_k^2 - \sum_{h=p+1}^{p+q} x_h^2 \text{ în baza } \{e_1, \ldots, e_n\},$$

și analog

$$(**) \qquad Q(x) = \sum_{r=1}^{p'} x_r'^2 - \sum_{s=q'+1}^{p'+q'} x_p'^2 \text{ în baza } \{e_1', \ldots, e_n'\},$$

signaturile corespunzătoare fiind (p, q, d) și (p', q', d'). Să arătăm că $p = p'$ și $q = q'$. Să presupunem că $p \neq p'$ și anume că $p > p'$. Fie U subspațiul generat de vectorii $e_1, e_2, \ldots, e_p$ și U' subspațiul generat de vectorii $e_{p'+1}', \ldots, e_n'$; deci $\dim U = p$, $\dim U' = n - p'$. Ipoteza $p > p'$ implică $\dim U + \dim U' = p + n - p' > n$, iar aceasta arată că subspațiul $U + U'$ nu este sumă directă de subspații și deci $U \cap U' \neq \{0\}$. Fie $x \in U \cap U'$, $x \neq 0$. Atunci $x = x_1 e_1 + \ldots + x_p e_p = x_{p'+1}' e_{p'+1}' + \ldots$ $\ldots + x_n' e_n'$ sau $x = x_1 e_1 + \ldots + x_1 e_p + 0 \cdot e_{p+1} + \ldots + 0 \cdot e_n$ în baza

$\{e_1, \ldots, e_n\}$ și din egalitatea $(*)$ avem

$$Q(x) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 \geqslant 0 \text{ și } x = 0 \cdot e_1' + \ldots + 0 \cdot e_{p'}' + x_{p'+1}' e_{p'+1}' + \ldots + x_n' e_n'$$

în baza $\{e_1', \ldots, e_n'\}$ așa încît din egalitatea $(**)$ rezultă $Q(x) = -x_{p'+1}'^2 - \ldots - x_n'^2 \leqslant 0$.

Din cele două inegalități deducem $Q(x) = 0$, ceea ce implică $x_1 = x_2 = \ldots = x_p = 0$ și $x_{p'+1}' = \ldots = x_n' = 0$ și deci $x = 0$, care contrazice faptul că $x \neq 0$. Rămîne $p \leqslant p'$ și analog se arată că $p' \leqslant p$, așa încît se obține $p = p'$. Analog rezultă $q = q'$; deci și $d = d'$. În concluzie $(p, q, d) = (p', q', d')$.

Forma pătratică $Q : V_n \to \mathbb{R}$ este pozitiv definită dacă și numai dacă una din următoarele condiții este îndeplinită

(i) are signatura $(n, 0, 0)$,

(ii) determinanții Δ_i, $i = 1, \ldots, n$ sînt strict pozitivi,

(iii) valorile proprii ale matricei A sînt strict pozitive.

§5. Probleme

1. Fie P_3 spațiul vectorial al funcțiilor polinomiale reale care au cel mult gradul trei și fie $\mathscr{A} : P_3 \times P_3 \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $\mathscr{A}(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 x(t) y(s) dt ds$.

1) Să se arate că $\mathscr{A}$ este o formă biliniară.

2) Să se determine matricea ei în baza canonică a spațiului și apoi matricea ei în baza $\{t^2 - 1, t^2 - t, t^2, t^2 - t^3\}$.

2. Se dă funcția $\mathscr{A} : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definită prin $\mathscr{A}(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_1 y_3 - x_3 y_1 + x_1 y_4 - x_4 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_2 y_4 - x_4 y_2 + x_3 y_4 - x_4 y_3$.

1) Să se arate că $\mathscr{A}$ este o formă biliniară.

2) Să se determine matricea corespunzătoare formei în raport cu baza $f_1 = (1, 1, 0, 0)$, $f_2 = (0, 1, 1, 0)$, $f_3 = (0, 1, 0, 1)$, $f_4 = (1, 0, 0, 1)$.

3. Fie V un spațiu euclidian complex și $\mathscr{T} : V \to V$ un endomorfism. Definim forma pătratică $x \to Q(x) = (\mathscr{T}(x), x)$, $x \in V$.

1) Să se arate că dacă $\mathscr{T}$ este hermitian, atunci $Q(x) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in V$, iar dacă $\mathscr{T}$ este antihermitian, atunci $Q(x)$ este pur imaginar, $\forall x \in V$.

2) Să se verifice relațiile $Q(tx) = t\bar{t}Q(x)$, $\forall t \in \mathbb{C}$, $Q(x + y) = Q(x) + Q(y) + (\mathscr{T}(x), y) + (\mathscr{T}(y), x)$, $\forall x, y \in V$, și să se scrie formula corespunzătoare pentru $Q(x + ty)$.

3) Să se verifice implicația $Q(x) = 0$, $x \in V \Rightarrow \mathscr{T}(x) = 0$, $x \in V$.

4) Să se arate că dacă $Q(x)$ este real, $\forall x \in V$, atunci $\mathscr{T}$ este hermitian.

4. Fie forma pătratică $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = 3x_1^2 + 2x_1 x_2 + 5x_2^2$. Să se determine valoarea parametrului $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel ca vectorii $x = (1, 2)$ și $y = (\lambda, -1)$ să fie ortogonali în raport cu forma Q.

5. Se dă forma pătratică $x \to Q(x) = 5x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1 x_2 - 4x_1 x_3$. 1). Utilizînd metoda lui Gauss, metoda lui Jacobi și respectiv metoda valorilor proprii, să se aducă $Q(x)$ la expresia canonică. 2) Să se verifice teorema de inerție.

6. Se dă matricea

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1) Să se scrie forma pătratică corespunzătoare și să se găsească expresia canonică.
2) Să se verifice teorema de inerție.

7. Să se arate că forma pătratică $x \to Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1 + |j - i|} x_i x_j$, $x \in \mathbb{R}^n$, este pozitiv definită.

8. Să se reducă forma pătratică $x \to Q(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i<j} x_i x_j$, $x \in \mathbb{R}^n$ la expresia canonică.

2

GEOMETRIE ANALITICĂ ÎN $\mathbb{E}_3$

Capitolul 1

VECTORI LIBERI

§ 1. Vectori liberi

Fie $\mathbb{E}_3$ spațiul punctual tridimensional al geometriei elementare și $\overrightarrow{AB}$ un segment orientat (fig. 1). A se numește *originea*, iar B se numește *extremitatea* segmentului. În cazul cînd originea și extremitatea coincid se obține *segmentul orientat nul*. Dreapta determinată de punctele A și B se numește *dreapta suport* a lui $\overrightarrow{AB}$ și se notează cu AB. Această dreaptă este unic determinată numai dacă $A \neq B$; dreapta suport a segmentului orientat nul este nedeterminată. Două segmente orientate se numesc (1) *coliniare*, (2) *paralele* dacă dreptele suport sînt (1) egale respectiv (2) paralele.

1.1. *Definiție. Două drepte din $\mathbb{E}_3$ au aceeași direcție dacă sînt paralele sau egale.*

1.2. Teoremă. Relația binară „aceeași direcție" este o relație de echivalență pe mulțimea dreptelor din spațiu.

Demonstrație. Relația „aceeași direcție" este reflexivă, simetrică și tranzitivă. Reflexivitatea este totuna cu egalitatea. Simetria rezultă din reflexivitate și din simetria paralelismului între drepte: $D \| D' \Rightarrow D' \| D$. Tranzitivitatea decurge din faptul că două drepte paralele cu o a treia sînt sau egale sau paralele.

Pentru relația „aceeași direcție" clasa de echivalență determinată de o dreaptă se numește *direcția* dreptei respective. Altfel spus o *direcție* este o familie de drepte paralele (fig. 2), fiecare dreaptă din această familie fiind un *reprezentant* al direcției din care face parte.

Un segment orientat nenul determină unic dreapta suport. De aceea direcția dreptei suport se poate atașa direct segmentului orientat care determină dreapta.

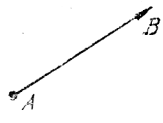


Fig. 1

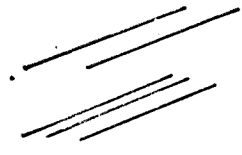


Fig. 2

Fig. 3

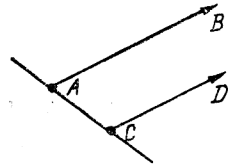


Fig. 4

1.3. *Definiție. Două segmente orientate nenule au aceeași direcție dacă dreptele lor suport sînt paralele sau coincid.*

1.4. Teoremă. Relația binară „aceeași direcție" pentru segmente orientate nenule este o relație de echivalență pe mulțimea segmentelor orientate nenule.

Demonstrație. Temă.

Pentru segmentele orientate nenule, *direcțiile* sînt clasele de echivalență ale dreptelor suport relativ la relația „aceeași direcție". Admitem că direcția unui segment orientat nul este nedeterminată.

Pe o dreaptă se pot stabili două și numai două sensuri de parcurs (ordini ale punctelor dreptei, consecințe ale axiomelor de ordine) pe care le notăm prin săgeți (fig. 3). O dreaptă împreună cu o alegere a unui sens de parcurs se numește *dreaptă orientată.*

Indicarea unui sens de parcurs pe una dintre dreptele paralele, ce definesc o direcție, definește un sens pe toate dreptele familiei respective. O direcție pentru care este dat un sens de parcurs pe dreptele familiei care o definește se numește *direcție orientată.*

Un segment orientat nenul $\overrightarrow{AB}$ determină unic dreapta AB și un sens de parcurs pe această dreaptă : sensul de la A către B.

1.5. *Definiție. Două segmente orientate nenule coliniare au același sens dacă sensurile determinate pe dreapta suport comună coincid. Două segmente orientate nenule paralele au același sens dacă extremitățile lor se află în același semiplan determinat de dreapta care unește originile segmentelor* (fig. 4) *în planul dreptelor suport paralele.*

1.6. Teoremă. Relația binară „același sens", pentru segmente orientate nenule de aceeași direcție, este o relație de echivalență.

Demonstrație. Temă.

Relația „același sens" implică relația „aceeași direcție". De aceea există numai două clase de echivalență relative la relația „același sens". Convenim să numim aceste clase *sensuri: sensul inițial* impus de un segment orientat nenul fixat și *opusul* său. De asemenea admitem că sensul unui segment orientat nul este nedeterminat. O direcție împreună cu unul dintre cele două sensuri posibile este o *direcție orientată.*

Lungimea (*norma sau modulul*) unui segment orientat $\overrightarrow{AB}$ se definește ca fiind lungimea segmentului neorientat [AB], adică distanța de la punctul A la punctul B. Un segment orientat are lungimea zero dacă și numai dacă el este segmentul nul. Două segmente neorientate care au aceeași lungime se numesc *segmente congruente.*

1.7. *Definiție. Două segmente orientate au aceeași lungime dacă segmentele neorientate corespunzătoare sînt congruente.*

1.8. Teoremă. Relaţia binară „aceeaşi lungime", pentru segmente orientate, este o relaţie de echivalenţă.

Demonstraţie. Relaţia de congruenţă este o relaţie de echivalenţă.

Relaţiile „aceeaşi direcţie", „acelaşi sens", „aceeaşi lungime" pentru segmente orientate generează o nouă relaţie pentru segmente orientate utilizată pentru definirea noţiunii de vector liber.

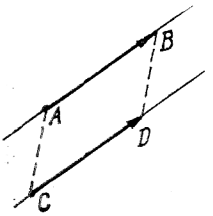


Fig. 5

1.9. *Definiţie. Două segmente orientate nenule se numesc echipolente dacă au aceeaşi direcţie, acelaşi sens şi aceeaşi lungime.*

Dacă $\overrightarrow{AB}$ este echipolent cu $\overrightarrow{CD}$, atunci vom scrie $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$. Se dovedeşte uşor că $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \sim \overrightarrow{BD}$ (fig. 5).

Întrucît relaţia „acelaşi sens" implică relaţia „aceeaşi direcţie", echipolenţa este sinonim pentru „acelaşi sens şi aceeaşi lungime". Există însă suficiente probleme concrete care impun explicitarea unei direcţii fără a interesa sensul. De aceea am preferat definiţia clasică pentru echipolenţă deşi conţine şi elemente superflue.

1.10. Teoremă. Relaţia de echipolenţă pentru segmente orientate nenule este o relaţie de echivalenţă.

Demonstraţie. Temă.

Prelungim relaţia de echipolenţă şi la segmentele orientate nule: admitem că toate segmentele orientate nule sînt echipolente între ele. Astfel obţinem o relaţie de echipolenţă pe mulţimea tuturor segmentelor orientate din spaţiu care este o relaţie de echivalenţă.

1.11. *Definiţie. Clasele de echivalenţă ale segmentelor orientate relativ la relaţia de echipolenţă se numesc vectori liberi. Direcţia, sensul şi lungimea care sînt comune segmentelor orientate ce definesc un vector liber se numesc direcţia, sensul şi lungimea vectorului liber.*

Vectorii liberi vor fi notaţi cu litere mici cu bară deasupra $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \ldots$, iar în desen vor fi reprezentaţi printr-unul dintre segmentele orientate echipolente ce definesc clasa numită vector liber. În acest context vectorii liberi se mai notează şi prin $\overline{AB}, \overline{CD}, \ldots$, evident $\overrightarrow{AB} \in \overline{AB}$ şi fiecare segment orientat din clasa numită vector liber este un *reprezentant* al clasei. Corespunzător, pentru lungimea (norma) unui vector liber $\bar{a}$ sau $\overline{AB}$ vom întrebuinţa notaţiile $\|\bar{a}\|$, $\|\overline{AB}\|$ sau $d(A, B)$.

Un vector liber de lungime unu se numeşte *versor* sau *vector unitate* şi în general se notează cu $\bar{e}$.

Vectorul liber care are lungimea zero se numeşte *vector nul* şi se notează cu $\bar{0}$. Acest vector este reprezentat de segmentul orientat $\overrightarrow{AA}$ (în acest caz direcţia şi sensul sînt nedeterminate).

Vectorii liberi care au aceeaşi direcţie se numesc *vectori coliniari*. Doi vectori coliniari care au aceeaşi lungime însă au sensuri opuse se numesc *vectori opuşi*. Dacă unul dintre ei este notat cu $\bar{a}$, atunci opusul său este notat cu $-\bar{a}$ (fig. 6).

Doi vectori liberi $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ sînt *egali* şi se scrie $\bar{a} = \bar{b}$ dacă reprezentanţii lor sînt echipolenţi sau, echivalent, dacă au aceeaşi direcţie, acelaşi sens şi aceeaşi lungime.

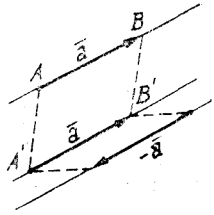


Fig. 6

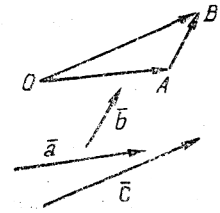


Fig. 7

Fie V mulțimea tuturor vectorilor liberi din spațiul $\mathbb{E}_3$. Alegem în $\mathbb{E}_3$ un punct O numit *origine*. La orice alt punct M din $\mathbb{E}_3$ îi corespunde un vector și numai unul $\bar{r} \in V$ al cărui reprezentat este $\overrightarrow{OM}$. Reciproc la orice vector $\bar{r}$ corespunde un punct și numai unul M, astfel încît $\overrightarrow{OM}$ să reprezinte pe $\bar{r}$. Rezultă că mulțimile $\mathbb{E}_3$ și V sînt în corespondență biunivocă, bijecția fiind unic determinată prin fixarea originii O. Vectorul liber $\bar{r} = \overrightarrow{OM}$ se numește *vectorul de poziție al punctului M față de originea O.*

§ 2. Adunarea

Mulțimea V a vectorilor liberi din spațiu se poate organiza ca un grup aditiv comutativ, definind adunarea prin regula triunghiului (regula paralelogramului).

2.1. *Definiție. Fie $\bar{a}$ și $\bar{b}$ doi vectori liberi. Fie $\overrightarrow{OA}$ un reprezentant al vectorului $\bar{a}$ și $\overrightarrow{AB}$ un reprezentant al vectorului $\bar{b}$. Vectorul liber $\bar{c}$ reprezentat de segmentul orientat $\overrightarrow{OB}$ se numește suma vectorilor $\bar{a}$ și $\bar{b}$ și se notează $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$ sau $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$* (fig. 7).

Evident $\bar{a}, \bar{b}$ și $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$ sînt vectori coplanari. De asemenea menționăm că regula cuprinsă în definiția 2.1 se numește *regula triunghiului.*

Adunarea vectorilor liberi $+ : V \times V \to V$, $(\bar{a}, \bar{b}) \to \bar{a} + \bar{b}$ este o lege de compoziție internă bine definită deoarece vectorul liber $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$ nu depinde de alegerea punctului O (Temă).

2.2. Teoremă. Adunarea vectorilor liberi are următoarele proprietăți:

1) asociativitate: $\forall\, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in V$, $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$;

2) $\bar{0}$ este element neutru: $\forall\, \bar{a} \in V$, $\bar{a} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{a} = \bar{a}$;

3) opusul lui $\bar{a}$ este simetricul lui $\bar{a}$: $\forall\, \bar{a} \in V$,

$$\bar{a} = (-\bar{a}) = (-\bar{a}) + \bar{a} = \bar{0};$$

4) comutativitate: $\forall\, \bar{a}, \bar{b} \in V$, $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$.

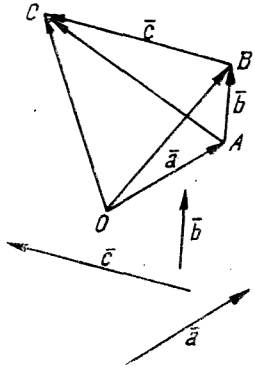


Fig. 8

Demonstrație. Cazurile specifice coliniarității sînt lăsate drept teme.

1) Ținem seama de definiție și urmărim figura 8: $\overrightarrow{OB}$ este segmentul reprezentativ al sumei $\bar{a} + \bar{b}$, iar $\overrightarrow{OC}$ este segmentul reprezentativ al sumei $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$; $\overrightarrow{AC}$ este segmentul reprezentativ al sumei

$\bar{b} + \bar{c}$, iar $\overrightarrow{OC}$ este segmentul reprezentativ al sumei $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$. Rezultă $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$.

2)—4) Temă.

Comutativitatea adunării conduce la o nouă regulă pentru determinarea sumei a doi vectori necoliniari, numită *regula paralelogramului*: se desenează $\overrightarrow{AB} \in \bar{a}$, $\overrightarrow{AD} \in \bar{b}$ și se fixează punctul C ca intersecția dintre paralela la AB dusă prin D și paralela la AD dusă prin B; segmentul orientat $\overrightarrow{AC}$ este reprezentantul lui $\bar{a} + \bar{b}$.

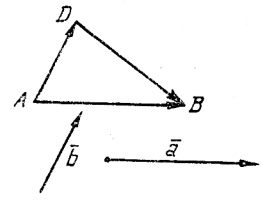


Fig. 9

Asociativitatea adunării permite generalizarea regulii triunghiului la *regula poligonului strîmb*, potrivită adunării a $n \geqslant 3$ vectori.

Proprietățile 1), 2), 3) arată că adunarea definește pe $\boldsymbol{V}$ o structură de grup, iar proprietatea 4) arată că acest grup este comutativ. În grupul $\boldsymbol{V}$ ecuația $\bar{b} + \bar{x} = \bar{a}$ are o soluție unică $\bar{x} = \bar{a} + (-\bar{b})$ pe care o notăm $\bar{x} = \bar{a} - \bar{b}$ și pe care o numim *diferența dintre vectorul $\bar{a}$ și vectorul $\bar{b}$*. Dacă $\overrightarrow{AB}$ este reprezentantul lui $\bar{a}$, iar $\overrightarrow{AD}$ este reprezentantul lui $\bar{b}$, atunci reprezentantul lui $\bar{a} - \bar{b}$ este $\overrightarrow{DB}$ (fig. 9).

§3. Înmulțirea cu un scalar

Fie $\mathbb{R}$ cîmpul numerelor reale (cîmpul scalarilor) și $\boldsymbol{V}$ grupul aditiv comutativ al vectorilor liberi. Vom introduce o lege de compoziție externă, adică o funcție definită pe $\mathbb{R} \times \boldsymbol{V}$ cu valori în $\boldsymbol{V}$ numită *înmulțirea unui vector liber cu un scalar*.

3.1. *Definiție. Fie $t \in \mathbb{R}$ și $\bar{a} \in \boldsymbol{V}$. Prin $t\bar{a}$ înțelegem un vector liber definit astfel:* 1) *dacă $\bar{a} \neq 0$ și $t \neq 0$, atunci $t\bar{a}$ este vectorul care are aceeași direcție cu $\bar{a}$, același sens cu $\bar{a}$ dacă $t > 0$, sens contrar dacă $t < 0$ și lungimea $|t|\,\|\bar{a}\|$;* 2) *dacă $t = 0$ sau $\bar{a} = 0$, atunci $t\bar{a} = \bar{0}$* (fig. 10).

Evident $t\bar{a}$ este coliniar cu $\bar{a}$.

3.2. Teoremă. Înmulțirea vectorilor liberi cu scalari are următoarele proprietăți:

1) $\forall\, \bar{a} \in \boldsymbol{V}$, $1 \cdot \bar{a} = \bar{a}$;

2) $\forall\, s, t \in \mathbb{R}$, $\forall\, \bar{a} \in \boldsymbol{V}$, $s(t\bar{a}) = (st)\bar{a}$;

3) distributivitate față de adunarea scalarilor: $\forall\, s, t \in \mathbb{R}$, $\forall\, \bar{a} \in \boldsymbol{V}$, $(s + t)\bar{a} = s\bar{a} + t\bar{a}$;

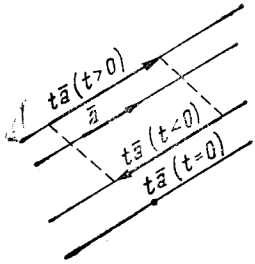


Fig. 10

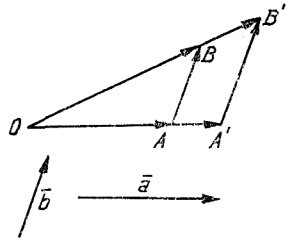


Fig. 11

4) distributivitate față de adunarea vectorilor $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall \bar{a}, \bar{b} \in V$, $t(\bar{a} + \bar{b}) = t\bar{a} + t\bar{b}$.

Demonstrație. 1)—3) temă.

4) Fie $\overrightarrow{OA}$ reprezentantul vectorului $\bar{a}$ și $\overrightarrow{AB}$ reprezentantul vectorului $\bar{b}$. Atunci $\overrightarrow{OB}$ este reprezentantul vectorului $\bar{a} + \bar{b}$ (fig. 11).

Presupunem $t > 0$ și notăm cu $\overrightarrow{OA'}$ reprezentantul vectorului $t\bar{a}$ și $\overrightarrow{OB'}$ reprezentantul vectorului $t(\bar{a} + \bar{b})$. Se observă că $\Delta OAB \sim \Delta OA'B'$, avînd un unghi comun și laturile (care determină acest unghi) proporționale. Rezultă $\overrightarrow{AB} \| \overrightarrow{A'B'}$ și $\overrightarrow{A'B'} = t\overrightarrow{AB}$, adică $\overrightarrow{A'B'}$ este reprezentantul vectorului $t\bar{b}$. Deci $\overrightarrow{OB'}$ este reprezentantul sumei $t\bar{a} + t\bar{b}$, adică $t(\bar{a} + \bar{b}) = t\bar{a} + t\bar{b}$.

Cazul $t < 0$ se tratează analog.

Ca urmare a teoremelor 2.2 și 3.2 adunarea și scăderea elementelor din V, precum și înmulțirea cu scalari au proprietăți analoage transformărilor echivalente de la expresiile algebrice elementare.

Proprietățile adunării vectorilor liberi și proprietățile înmulțirii vectorilor liberi cu scalari arată că *V este un spațiu vectorial peste cîmpul numerelor reale.*

§4. Coliniaritate și coplanaritate

Fie V spațiul vectorial real al vectorilor liberi. Noțiunile de subspațiu vectorial, dependență și independență liniară, bază și dimensiune, coordonate, izomorfism de spații vectoriale, le presupunem cunoscute de la partea de algebră liniară.

Pentru început observăm că oricărui vector $\bar{a}$ de lungime $\|\bar{a}\| > 0$, i se asociază un vector $\bar{a}_0 = \frac{1}{\|\bar{a}\|}\bar{a}$, numit *versorul* lui $\bar{a}$. Într-adevăr $\|\bar{a}_0\| = \left\|\frac{1}{\|\bar{a}\|}\bar{a}\right\| = \frac{1}{\|\bar{a}\|}\|\bar{a}\| = 1$. Deoarece $\bar{a}_0$ este un vector unitate de același sens ca $\bar{a}$, putem scrie $\bar{a} = \|\bar{a}\|\bar{a}_0$. În plus, remarcăm că, $\forall \bar{a}_0$, avem $0 = 0\bar{a}_0$.

4.1. Teoremă. Fie $\bar{a}, \bar{b} \in V$. Dacă $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sînt coliniari și $\bar{a} \neq 0$, atunci există un număr real t unic astfel încît $\bar{b} = t\bar{a}$.

Demonstrație. În baza observației precedente putem scrie $\bar{a} = \|\bar{a}\|\bar{a}_0$, $b = \|\bar{b}\|\bar{b}_0$ și evident versorii $\bar{a}_0$, $\bar{b}_0$ sînt sau egali sau opuși. Pentru $\bar{b}_0 = \bar{a}_0$ găsim $\bar{b} = \|\bar{b}\|\bar{b}_0 = \|\bar{b}\|\bar{a}_0 = \frac{\|\bar{b}\|}{\|\bar{a}\|}\bar{a}$ și deci $t = \frac{\|\bar{b}\|}{\|\bar{a}\|}$.

4.2. Consecință. Mulțimea $V_1 = \{\bar{b} \in V \mid \exists\, t \in \mathbb{R}, \bar{b} = t\bar{a}, \bar{a} \neq \bar{0}\}$, a tuturor vectorilor coliniari cu un vector nenul $\bar{a}$, este un spațiu vectorial unidimensional.

Demonstrație. V_1 este un subspațiu vectorial al lui V, iar $\bar{a}$ este un vector independent care generează pe V_1.

Se observă că, coliniaritatea a doi vectori liberi este echivalentă cu dependența liniară a acestora. De aceea oricare doi vectori liberi necoliniari sînt liniar independenți.

Fie acum $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ trei vectori diferiţi din V. Ei se numesc *coplanari* dacă segmentele orientate reprezentative sînt paralele cu un plan dat.

4.3. Teoremă. Vectorii $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ sînt coplanari dacă şi numai dacă ei sînt liniar dependenţi.

Demonstraţie. Presupunem că $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ sînt liniar dependenţi, adică $\exists\, r, s, t \in \mathbb{R}$ cu $r^2 + s^2 + t^2 \neq 0$ aşa ca $r\bar{a} + s\bar{b} + t\bar{c} = 0$. Pentru $t \neq 0$ relaţia se transcrie $\bar{c} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b}$, unde $\alpha = -\frac{r}{t}$ şi $\beta = -\frac{s}{t}$. Rezultă că reprezentanţii $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ ai vectorilor $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ satisfac relaţia $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$, adică $\overrightarrow{OC}$ se află în planul determinat de $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB}$ (fig. 12).

Raţionamentul reciproc este evident.

4.4. Consecinţă. Mulţimea $V_2 = \{\bar{c} \in V \mid \exists r, s \in \mathbb{R},\ \bar{c} = r\bar{a} + s\bar{b};\ \bar{a}, \bar{b}$ necoliniari$\}$, a tuturor vectorilor coplanari cu doi vectori necoliniari $\bar{a}$ şi $\bar{b}$, este un spaţiu vectorial bidimensional.

Demonstraţie. V_2 este un subspaţiu vectorial al lui V, iar $\{\bar{a}, \bar{b}\}$ este o mulţime independentă care generează pe V_2.

Deoarece dependenţa liniară a trei vectori liberi este echivalentă cu coplanaritatea, rezultă că orice trei vectori liberi necoplanari sînt liniar independenţi.

4.5. Teoremă. Spaţiul vectorial real al vectorilor liberi din $\mathbb{E}_3$ are dimensiunea 3.

Demonstraţie. În V există trei vectori liniar independenţi şi anume oricare trei vectori necoplanari $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$. Să arătăm că aceştia generează pe V. Pentru aceasta fie $\bar{d}$ un al patrulea vector şi $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$ reprezentanţii vectorilor $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ (fig. 13). Se observă că $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OD}_1 + \overrightarrow{OD}_2 + \overrightarrow{OD}_3 = r\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC}$ şi deci $\bar{d} = r\bar{a} + s\bar{b} + t\bar{c}$.

Dacă $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ este o bază fixată în V_3 şi r, s, t sînt coordonatele lui $\bar{d}$ în raport cu această bază, atunci se preferă scrierea $\bar{d}(r, s, t)$ sau identificarea $\bar{d} = (r, s, t)$. În acest context pentru $\bar{d}_i = (r_i, s_i, t_i) \in V_3$, $i = 1, 2, 3$, avem

1) $\bar{d}_1 = \bar{d}_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2,\ s_1 = s_2,\ t_1 = t_2$;
2) $\bar{d}_1 + \bar{d}_2 = (r_1 + r_2,\ s_1 + s_2,\ t_1 + t_2)$;
3) $k\bar{d}_1 = (kr_1,\ ks_1,\ kt_1)$;
4) $\bar{d}_1$ este coliniar cu $\bar{d}_2$ dacă şi numai dacă coordonatele lor sînt proporţionale;

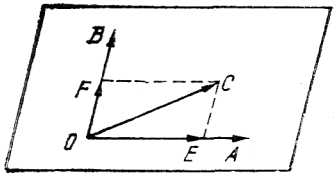


Fig. 12

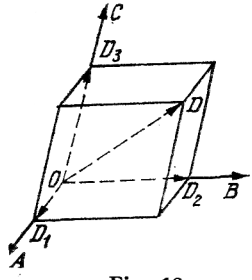


Fig. 13

5) vectorii $\bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3$ sînt coplanari dacă și numai dacă coordonatele unuia sînt combinații liniare de coordonatele celorlalți doi: $r_3 = \alpha r_1 + \beta r_2$, $s_3 = \alpha s_1 + \beta s_2$, $t_3 = \alpha t_1 + \beta t_2$.

§5. Proiecție ortogonală

Fie D o dreaptă și $\bar{a} \ni \overrightarrow{AB}$ un vector liber. Prin A și B ducem planele P și Q respectiv perpendiculare pe D. Notăm $\{A'\} = D \cap P$, $\{B'\} = D \cap Q$.

5.1. Teoremă. Vectorul liber $\overrightarrow{A'B'}$ nu depinde de segmentul orientat $\overrightarrow{AB}$ ce reprezintă pe $\bar{a}$.

Demonstrație. Fie $\overrightarrow{CD}$ un alt reprezentant al lui $\bar{a}$ și $\overrightarrow{C'D'}$ construit după procedeul lui $\overrightarrow{A'B'}$. Trebuie să arătăm că $\overrightarrow{A'B'} \sim \overrightarrow{C'D'}$ (fig. 14).

Segmentele $\overrightarrow{A'B'}$ și $\overrightarrow{C'D'}$ au: (1) aceeași direcție deoarece sînt situate pe D, (2) același sens deoarece punctele B' și D' se găsesc pe aceeași semidreaptă determinată de A' pe D, (3) aceeași lungime deoarece $\triangle A'B'B''$ este congruent cu $\triangle C'D'D''$.

Teorema 5.1 justifică următoarea

5.2. *Definiție. Vectorul liber $\overrightarrow{A'B'}$ se numește proiecția ortogonală a vectorului $\bar{a}$ pe dreapta D și se notează $\pi_D(\bar{a})$.*

5.3. Teoremă. Dacă D_1 și D_2 sînt drepte paralele, atunci $\pi_{D_1}(\bar{a}) = \pi_{D_2}(\bar{a})$.

Demonstrație. Temă.

Rezultă că proiecția ortogonală a unui vector liber pe o dreaptă D depinde numai de direcția lui D. De aceea dacă $\bar{u}$ este un vector nenul care dă direcția lui D, atunci putem vorbi de proiecția ortogonală a lui $\bar{a}$ pe $\bar{u}$ pe care o notăm cu $\pi_{\bar{u}}(\bar{a})$. Teorema care urmează arată că π este o transformare liniară.

5.4. Teoremă. Fie $\bar{u} \in V_3 - \{\bar{0}\}$. Pentru orice $\bar{a}, \bar{b} \in V_3$ și orice scalar $t \in \mathbb{R}$ avem

$$\pi_{\bar{u}}(\bar{a} + \bar{b}) = \pi_{\bar{u}}(\bar{a}) + \pi_{\bar{u}}(\bar{b}),$$

$$\pi_{\bar{u}}(t\bar{a}) = t\pi_{\bar{u}}(\bar{a}).$$

Demonstrație. Temă.

Notăm cu $\bar{u}$ un vector liber nenul și $\bar{u}_0$ versorul său, adică $\bar{u} = \|\bar{u}\|\bar{u}_0$, $\|\bar{u}_0\| = 1$. Pentru orice $\bar{a}$ vectorul $\pi_{\bar{u}}(a)$ este coliniar cu $\bar{u}_0$ și deci există un număr real $\mathrm{pr}_{\bar{u}}\bar{a}$ astfel încît (fig. 15):

$$\pi_{\bar{u}}(\bar{a}) = (\mathrm{pr}_{\bar{u}}\bar{a})\bar{u}_0.$$

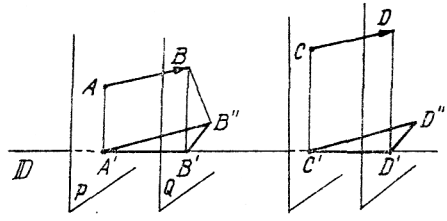


Fig. 14

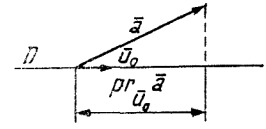


Fig. 15

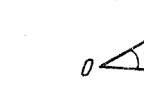


Fig. 16

Fig. 17

5.5. *Definiție. Numărul real* $\mathrm{pr}_{\bar{u}}\bar{a}$ *definit prin relația precedentă se numește mărimea algebrică a proiecției ortogonale* $\pi_{\bar{u}}(\bar{a})$.

Proprietățile lui π implică

$$\mathrm{pr}_{\bar{u}}(\bar{a} + \bar{b}) = \mathrm{pr}_{\bar{u}}\bar{a} + \mathrm{pr}_{\bar{u}}\bar{b}$$

$$\mathrm{pr}_{\bar{u}}(t\bar{a}) = t\mathrm{pr}_{\bar{u}}\bar{a}.$$

Fie $\bar{a}$ și $\bar{b} \in V_3 - \{\bar{0}\}$ și $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ segmentele orientate reprezentative. Unghiul $\varphi \in [0, \pi]$ determinat de $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OB}$ se numește *unghiul* dintre vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$ (fig. 16). Evident, definiția unghiului nu depinde de punctul O. Dacă cel puțin unul dintre vectorii liberi $\bar{a}$ și $\bar{b}$ este $\bar{0}$, atunci unghiul $\varphi \in \in [0, \pi]$ dintre $\bar{a}$ și $\bar{b}$ este nedeterminat.

Vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$ se numesc *ortogonali* dacă unghiul dintre ei este $\frac{\pi}{2}$. Acceptăm că $\bar{0}$ este ortogonal pe orice vector.

Noțiunea de unghi permite să explicităm numărul $\mathrm{pr}_{\bar{u}}\bar{a}$ în funcție de $\|\bar{a}\|$ și de unghiul φ dintre $\bar{a}$ și $\bar{u}$ (fig. 17),

$$\mathrm{pr}_{\bar{u}}\bar{a} = \|\bar{a}\| \cos\varphi.$$

Fie P un plan și $\bar{a} \ni \overrightarrow{AB}$ un vector liber. Prin A și B ducem drepte perpendiculare pe planul P și notăm cu A' și B' punctele în care aceste perpendiculare înțeapă planul P. Se arată ușor că vectorul liber $\overrightarrow{A'B'}$ nu depinde de segmentul $\overrightarrow{AB}$ ci numai de $\bar{a}$. Din acest motiv vectorul liber $\overrightarrow{A'B'}$ se numește *proiecție ortogonală a vectorului* $\bar{a}$ *pe planul* P; se notează $\pi_P(\bar{a})$.

Un vector liber are aceeași proiecție pe două plane paralele, adică $\pi_P(\bar{a})$ depinde doar de $\bar{a}$ și de spațiul vectorial bidimensional atașat lui P. Mai mult, se dovedește că proiecția ortogonală a vectorilor liberi pe un plan este o transformare liniară.

§6. Produs scalar

Noțiunea de produs scalar o presupunem cunoscută de la partea de algebră liniară.

Fie V_3 spațiul vectorilor liberi și $\bar{a}, \bar{b} \in V_3$. Pentru $\bar{a} \neq \bar{0}$ și $\bar{b} \neq \bar{0}$, notăm cu $\varphi \in [0, \pi]$ unghiul dintre $\bar{a}$ și $\bar{b}$.

6.1. Teoremă. Funcția $(\,,\,): V_3 \times V_3 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$(\bar{a}, \bar{b}) = \begin{cases} \|\bar{a}\| \, \|\bar{b}\| \cos \varphi & \text{pentru } \bar{a} \neq \bar{0} \text{ și } \bar{b} \neq \bar{0} \\ 0 & \text{pentru } \bar{a} = \bar{0} \text{ sau/și } \bar{b} = \bar{0} \end{cases}$$

este un produs scalar pe V_3.

Demonstrație. Trebuie să verificăm comutativitatea, omogenitatea, distributivitatea față de adunare și pozitivitatea funcției (,).

Dovedim numai distributivitatea față de adunare $(\bar{a}, \bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{b}) + (\bar{a}, \bar{c})$ întrucît celelalte proprietăți sînt aproape evidente. Cazul $\bar{a} = \bar{0}$ este imediat. Pentru a verifica proprietatea în ipoteza $\bar{a} \neq \bar{0}$ ne folosim de noțiunea de mărime algebrică a unei proiecții ortogonale.

Fie $\bar{e}$ un versor și $\bar{b}$ un vector oarecare. Se observă că $\mathrm{pr}_{\bar{e}}\bar{b} = (\bar{e}, \bar{b})$.

Exprimăm pe $\bar{a} \neq \bar{0}$ în forma $\bar{a} = \|\bar{a}\| \, \bar{e}$, $\|\bar{e}\| = 1$. Relația $\mathrm{pr}_{\bar{e}}(\bar{b} + \bar{c}) = \mathrm{pr}_{\bar{e}}\bar{b} + \mathrm{pr}_{\bar{e}}\bar{c}$ este echivalentă cu $(\bar{e}, \bar{b} + \bar{c}) = (\bar{e}, \bar{b}) + (\bar{e}, \bar{c})$. Înmulțind cu $\|\bar{a}\|$ și ținînd seama de omogenitate deducem $(\|\bar{a}\|\bar{e}, \bar{b} + \bar{c}) = (\|\bar{a}\|\bar{e}, \bar{b}) + (\|\bar{a}\|\bar{e}, \bar{c})$, c.c.t.d.

Observații. 1) Teorema 6.1 arată că V_3 este un spațiu vectorial euclidian;

2) relația $(\bar{a}, \bar{a}) = \|\bar{a}\|^2 \geqslant 0$ este echivalentă cu $\|\bar{a}\| = \sqrt{(\bar{a}, \bar{a})}$, ultima permițînd calculul lungimii vectorului liber $\bar{a}$ dacă se cunoaște produsul scalar $(\bar{a}, \bar{a})$;

3) relația $|\cos \varphi| \leqslant 1$ implică inegalitatea Cauchy-Schwarz $|(\bar{a}, \bar{b})| \leqslant \|\bar{a}\| \, \|\bar{b}\|$;

4) doi vectori liberi sînt ortogonali dacă și numai dacă produsul lor scalar este nul.

Fie $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ o bază în V_3 și $\bar{u} = r_1\bar{a} + s_1\bar{b} + t_1\bar{c}$, $\bar{v} = r_2\bar{a} + s_2\bar{b} + t_2\bar{c}$. Proprietățile produsului scalar implică $(\bar{u}, \bar{v}) = (r_1\bar{a} + s_1\bar{b} + t_1c, r_2\bar{a} + s_2\bar{b} + t_2\bar{c}) = \ldots = r_1r_2(\bar{a}, \bar{a}) + r_1s_2(\bar{a}, \bar{b}) + r_1t_2(\bar{a}, \bar{c}) + s_1r_2(\bar{b}, \bar{a}) + s_1s_2(\bar{b}, \bar{b}) + s_1t_2(\bar{b}, \bar{c}) + t_1r_2(\bar{c}, \bar{a}) + t_1s_2(\bar{c}, \bar{b}) + t_1t_2(\bar{c}, \bar{c})$. Deci produsul scalar $(\bar{u}, \bar{v})$ este cunoscut dacă se dă tabelul 3.

Tabelul 3

(,)	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{c}$
$\bar{a}$	$(\bar{a}, \bar{a})$	$(\bar{a}, \bar{b})$	$(\bar{a}, \bar{c})$
$\bar{b}$	$(\bar{b}, \bar{a})$	$(\bar{b}, \bar{b})$	$(\bar{b}, \bar{c})$
$\bar{c}$	$(\bar{c}, \bar{a})$	$(\bar{c}, \bar{b})$	$(\bar{c}, \bar{c})$

Pentru calcule este avantajos să alegem baze pentru care tabelul 3 să fie cît mai simplu posibil. Un exemplu îl constituie baza ortonormată a cărei existență în V_3 este evidentă.

O bază în V_3 formată din versori ortogonali se numește *bază ortonormată* și se notează cu $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$.

Coordonatele unui vector în raport cu baza ortonormată se numesc *coordonate euclidiene*. Pentru baza ortonormată $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ obținem tabelul 4 de înmulțire scalară.

Tabelul 4

(,)	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	1	0	0
$\bar{j}$	0	1	0
$\bar{k}$	0	0	1

Acest tabel conduce la

$$(\bar{a}, \bar{b}) = r_1 r_2 + s_1 s_2 + t_1 t_2.$$

În particular $(\bar{a}, \bar{i}) = r_1$, $(\bar{a}, \bar{j}) = s_1$, $(\bar{a}, \bar{k}) = t_1$; astfel coordonatele euclidiene ale unui vector $\bar{a}$ sînt de fapt proiecţiile ortogonale ale lui $\bar{a}$ pe cele trei axe de coordonate.

Dacă se cunosc coordonatele euclidiene ale unui vector $\bar{a}$, atunci norma sa este

$$a = \|\bar{a}\| = \sqrt{(\bar{a}, \bar{a})} = \sqrt{r_1^2 + s_1^2 + t_1^2}.$$

De asemenea unghiul a doi vectori nenuli $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ este dat de

$$\cos \varphi = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{\|\bar{a}\| \, \|\bar{b}\|} = \frac{r_1 r_2 + s_1 s_2 + t_1 t_2}{\sqrt{r_1^2 + s_1^2 + t_1^2}\sqrt{r_2^2 + s_2^2 + t_2^2}}, \qquad \varphi \in [0, \pi].$$

Astfel avem $\bar{a} \perp \bar{b}$ dacă şi numai dacă $r_1 r_2 + s_1 s_2 + t_1 t_2 = 0$.

§7. Produs vectorial

Fie V_3 spaţiul vectorilor liberi şi $\bar{a}, \bar{b} \in V_3$. Pentru $\bar{a} \neq \bar{0}$ şi $\bar{b} \neq \bar{0}$, notăm cu $\varphi \in [0, \pi]$ unghiul dintre $\bar{a}$ şi $\bar{b}$.

7.1. *Definiţie. Vectorul*

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{cases} \|\bar{a}\| \, \|\bar{b}\| \sin\varphi \bar{e}, & \textit{pentru } \bar{a} \text{ şi } \bar{b} \textit{ necoliniari} \\ \bar{0}, & \textit{pentru } \bar{a}, \bar{b} \textit{ coliniari} \end{cases}$$

unde $\bar{e}$ este un versor perpendicular pe $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ şi cu sensul dat de regula mîinii drepte pentru tripletul $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{e})$, se numeşte produsul vectorial dintre $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ (fig. 18).

Produsul vectorial este o aplicaţie biliniară definită pe $V_3 \times V_3$ cu valori în V_3.

Pornind de la definiţie se deduc următoarele *proprietăţi:*

1) $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$ (anticomutativitate),
2) $t(\bar{a} \times \bar{b}) = (t\bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (t\bar{b})$, $t \in \mathbb{R}$,
3) $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$,
4) $\bar{a} \times \bar{0} = \bar{0}$, $\bar{a} \times \bar{a} = \bar{0}$,
5) $\|\bar{a} \times \bar{b}\|^2 = \|\bar{a}\|^2 \|\bar{b}\|^2 - (\bar{a}, \bar{b})^2$ (identitatea Lagrange),
6) produsul vectorial a doi vectori nenuli este nul dacă şi numai dacă vectorii sînt coliniari; dacă $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ nu sînt coliniari, atunci norma $\|\bar{a} \times \bar{b}\|$ reprezintă aria paralelogramului construit pe reprezentanţii $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB}$ (fig. 18).

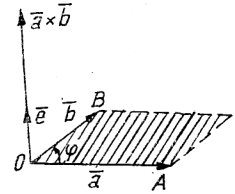


Fig. 18

Demonstraţie. Proprietăţile 1), 2), 4), 6) se demonstrează fără dificultate. Pentru a demonstra proprietatea 3) ne folosim de 2) şi de proprietăţile înmulţirii unui vector cu un număr. Fără a restrînge generalitatea, presupunem că $\bar{a}$ este un versor; fie P un

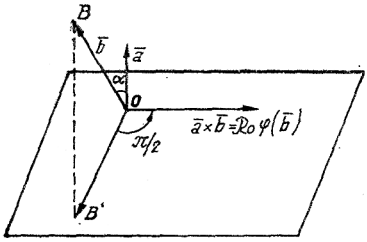


Fig. 19

plan perpendicular pe $\bar{a}$ (fig. 19) şi $\bar{b}$ un vector reprezentat de segmentul orientat $\overrightarrow{OB}$, a cărui direcţie face un unghi α cu direcţia lui $\bar{a}$. Fie B' proiecţia lui B pe planul P. Vectorul reprezentat de $\overrightarrow{OB'}$ îl notăm cu $\varphi(\bar{b})$. Evident $\forall\, \bar{b}, \bar{c} \in V_3$, avem $\varphi(\bar{b}+\bar{c}) = \varphi(\bar{b}) + \varphi(\bar{c})$. Notăm cu $\mathcal{R}$ rotaţia de unghi $\pi/2$ în jurul axei $\bar{a}$. Oricare ar fi vectorii $\bar{v}$, $\bar{w}$ din planul P, $\mathcal{R}(\bar{v}+\bar{w}) = \mathcal{R}(\bar{v}) + \mathcal{R}(\bar{w})$.

Din figura 19 observăm că $\bar{a}\times\bar{b} = \mathcal{R}\circ\varphi(\bar{b})$. Într-adevăr $\|\bar{a}\times\bar{b}\| = \|\mathcal{R}\circ\varphi(\bar{b})\| = \|\varphi(\bar{b})\| = \|\bar{b}\|\sin\alpha$, iar tripletul $(\bar{a}, \bar{b}, \mathcal{R}\circ\varphi(\bar{b}))$ este orientat după regula mîinii drepte. Analog găsim $\bar{a}\times\bar{c} = \mathcal{R}\circ\varphi(\bar{c})$ şi $\bar{a}\times(\bar{b}+\bar{c}) = \mathcal{R}\circ\varphi(\bar{b}+\bar{c})$. Dar $\mathcal{R}\circ\varphi(\bar{b}) + \mathcal{R}\circ\varphi(\bar{c}) = \mathcal{R}\circ\varphi(\bar{b}+\bar{c})$ şi deci proprietatea este demonstrată.

Pentru a obţine identitatea Lagrange pornim de la identitatea $\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$, pe care o înmulţim cu $\|\bar{a}\|\|\bar{b}\|$.

În raport cu baza $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ admit descompunerea $\bar{a} = r_1\bar{i} + s_1\bar{j} + t_1\bar{k}$, respectiv $\bar{b} = r_2\bar{i} + s_2\bar{j} + t_2\bar{k}$. Folosind definiţia produsului vectorial şi proprietăţile 1), 2), 3), 6) obţinem tabelul 5,

Tabelul 5

$\times$	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	0	$\bar{k}$	$-\bar{j}$
$\bar{j}$	$-\bar{k}$	0	$\bar{i}$
$\bar{k}$	$\bar{j}$	$-\bar{i}$	0

care ne conduce la

$$\bar{a}\times\bar{b} = (s_1t_2 - s_2t_1)\,\bar{i} + (r_2t_1 - r_1t_2)\bar{j} + (r_1s_2 - r_2s_1)\bar{k}$$

sau simbolic

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ r_1 & s_1 & t_1 \\ r_2 & s_2 & t_2 \end{vmatrix}.$$

7.2. *Dublu produs vectorial.* Fiind daţi vectorii $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, vectorul $\bar{w} = \bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})$ este dublul produs vectorial al acestor vectori. Folosind baza ortonormată $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ precum şi proprietăţile produsului scalar şi vectorial, se poate arăta că $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}) = \bar{b}(\bar{a}, \bar{c}) - \bar{c}(\bar{a}, \bar{b})$. Această relaţie pune în evidenţă coplanaritatea vectorilor $\bar{w}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ (fig. 20), unde $\bar{d} = \bar{b}\times\bar{c}$ şi $\bar{w}\perp\bar{a}$, $\bar{w}\perp\bar{d}$.

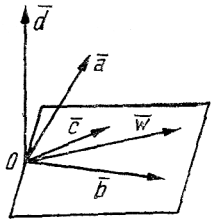


Fig. 20

Observaţii. 1) $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}) \neq (\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}$; 2) expresia dublului produs vectorial se reţine mai uşor scrisă sub forma determinantului simbolic

$$\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}) = \begin{vmatrix} \bar{b} & \bar{c} \\ (\bar{a}, \bar{b}) & (\bar{a}, \bar{c}) \end{vmatrix}$$

7.3. Aplicaţii. 1) Dîndu-se punctele $M_i(\bar{r}_i)$, $i = 1, 2, 3$, să se stabilească condiţia ca aceste trei puncte să fie coliniare.

Soluție. Impunem anularea produsului vectorial $\overline{M_1M_2} \times \overline{M_1M_3}$. Folosind vectorii de poziție ai punctelor și proprietățile produsului vectorial obținem $(\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \times (\bar{r}_3 - \bar{r}_1) = \bar{0}$ sau $\bar{r}_2 \times \bar{r}_3 - \bar{r}_2 \times \bar{r}_1 - \bar{r}_1 \times \bar{r}_3 + \bar{r}_1 \times \bar{r}_1 = \bar{0}$ sau $\bar{r}_1 \times \bar{r}_2 + \bar{r}_2 \times \bar{r}_3 + \bar{r}_3 \times \bar{r}_1 = \bar{0}$.

2) Fiind dați vectorii $\overline{OA} = \bar{j} - 3\bar{k}$, $\overline{AC} = 4\bar{i} + 7\bar{j}$, $\overline{BC} = 4\bar{i} + 8\bar{j} - 8\bar{k}$, să se găsească vectorul de poziție al punctului B, respectiv C și să se calculeze lungimea înălțimii $[AA']$ a triunghiului ABC.

Soluție. Se constată că punctele A, B, C nu sînt coliniare, deoarece coordonatele vectorilor $\overline{AC}$ și $\overline{BC}$ nu sînt proporționale. $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC}$, $\overline{OC} = 4\bar{i} + 8\bar{j} - 3\bar{k}$; $\overline{OB} = \overline{OC} - \overline{BC} = 5\bar{k}$.

Înălțimea $[AA']$ a triunghiului ABC coincide cu înălțimea paralelogramului construit pe reprezentanții vectorilor $\overline{BA}$ și $\overline{BC}$.

$$\overline{BA} \times \overline{BC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 1 & -8 \\ 4 & 8 & -8 \end{vmatrix} = 4(14\bar{i} - 8\bar{j} - \bar{k}); \ \|\overline{BA} \times \overline{BC}\| = 4\sqrt{261}$$

$$AA' = \frac{\|\overline{BA} \times \overline{BC}\|}{\|\overline{BC}\|} = \sqrt{29}.$$

§8. Produs mixt

Fiind dați vectorii liberi $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, numărul $(\bar{a}, \bar{b} \times \bar{c})$ se numește *produsul mixt* al acestor vectori. Dacă $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ sînt necoplanari, atunci modulul produsului mixt reprezintă volumul paralelipipedului ce se poate construi pe reprezentanții cu originea comună ai celor trei vectori (fig. 21). Într-adevăr, fie θ unghiul dintre direcțiile vectorilor $\bar{b}$ și $\bar{c}$ și fie φ unghiul dintre direcțiile vectorilor $\bar{a}$ și $\bar{b} \times \bar{c}$; atunci $(\bar{a}, \bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{d}) = \|\bar{a}\| \, \|\bar{d}\| \cos \varphi = \|\bar{b} \times \bar{c}\| \, \mathrm{pr}_{\bar{d}} \bar{a} = \pm V$.

Pornind de la definiție se deduc următoarele *proprietăți*:

1) $(\bar{a}, \bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{c}, \bar{a} \times \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{c} \times \bar{a})$

2) $(\bar{a}, \bar{b} \times \bar{c}) = -(\bar{a}, \bar{c} \times \bar{b})$

3) $(t\bar{a}, \bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a}, t\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{b} \times t\bar{c})$, $t \in \mathbb{R}$

4) $(\bar{a}_1 + \bar{a}_2, \bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a}_1, \bar{b} \times \bar{c}) + (\bar{a}_2, \bar{b} \times \bar{c})$

5) $(\bar{a} \times \bar{b}, \bar{c} \times \bar{d}) = \begin{vmatrix} (\bar{a}, \bar{c}) & (\bar{a}, \bar{d}) \\ (\bar{b}, \bar{c}) & (\bar{b}, \bar{d}) \end{vmatrix}$ (identitatea Lagrange)

6) $(\bar{a}, \bar{b} \times \bar{c}) = 0$ dacă și numai dacă:

(i) cel puțin unul dintre vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ este nul;

(ii) doi dintre vectori sînt coliniari;

(iii) vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ sînt coplanari.

Demonstrăm proprietatea 5) restul le lăsăm ca exercițiu pentru cititor. Notînd $\bar{m} = \bar{c} \times \bar{d}$, obținem $(\bar{a} \times \bar{b}, \bar{c} \times \bar{d}) = (\bar{a} \times \bar{b}, \bar{m}) = (\bar{m}, \bar{a} \times \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{m} \times \bar{a}) = (\bar{a}, \bar{b} \times \bar{m}) = (\bar{a}, \bar{b} \times (\bar{c} \times \bar{d})) = [\bar{a}, \bar{c}(\bar{b}, \bar{d}) - \bar{d}(\bar{b}, \bar{c})] = (\bar{a}, \bar{c})(\bar{b}, \bar{d}) - (\bar{a}, \bar{d})(\bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} (\bar{a}, \bar{c}) & (\bar{a}, \bar{d}) \\ (\bar{b}, \bar{c}) & (\bar{b}, \bar{d}) \end{vmatrix}$.

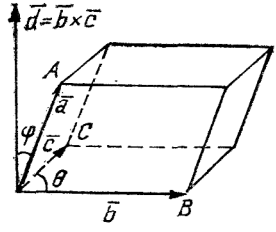


Fig. 21

Dacă $\bar{a} = r_1\bar{i} + s_1\bar{j} + t_1\bar{k}$, $\bar{b} = r_2\bar{i} + s_2\bar{j} + t_2\bar{k}$, $\bar{c} = r_3\bar{i} + s_3\bar{j} + t_3\bar{k}$, în coordonate produsul mixt se scrie

$$(\bar{a}, \bar{b} \times \bar{c}) = \begin{vmatrix} r_1 & s_1 & t_1 \\ r_2 & s_2 & t_2 \\ r_3 & s_3 & t_3 \end{vmatrix}.$$

Proprietățile produsului mixt se justifică cu ajutorul proprietăților determinanților.

Baza vectorială $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ se numește *orientată pozitiv* (*negativ*) dacă produsul $(\bar{a}, \bar{b} \times \bar{c})$ este pozitiv (negativ). Prin urmare baza ortonormată $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ este orientată pozitiv întrucît $(\bar{i}, \bar{j} \times \bar{k}) = 1$, unde $\bar{i} = (1, 0, 0)$, $\bar{j} = (0, 1, 0)$, $\bar{k} = (0, 0, 1)$.

Aplicație. Să se arate că vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ sînt coplanari dacă și numai dacă determinantul lor Gram este nul.

Soluție. Prin determinant Gram al vectorilor $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ înțelegem numărul

$$G = \begin{vmatrix} (\bar{a}, \bar{a}) & (\bar{a}, \bar{b}) & (\bar{a}, \bar{c}) \\ (\bar{b}, \bar{a}) & (\bar{b}, \bar{b}) & (\bar{b}, \bar{c}) \\ (\bar{c}, \bar{a}) & (\bar{c}, \bar{b}) & (\bar{c}, \bar{c}) \end{vmatrix}.$$

Dacă vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ sînt coplanari, atunci $\mathscr{V} = \pm (\bar{a}, \bar{b} \times \bar{c}) = 0$ sau echivalent $\mathscr{V}^2 = (\bar{a}, \bar{b} \times \bar{c})^2 = 0$. Scriem ultima relație folosind coordonatele vectorilor și proprietatea $\det A = \det {}^tA$. Atunci

$$\mathscr{V}^2 = \begin{vmatrix} r_1 & s_1 & t_1 \\ r_2 & s_2 & t_2 \\ r_3 & s_3 & t_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} r_1^2 + s_1^2 + t_1^2 & r_1r_2 + s_1s_2 + t_1t_2 & r_1r_3 + s_1s_3 + t_1t_3 \\ r_2r_1 + s_2s_1 + t_2t_1 & r_2^2 + s_2^2 + t_2^2 & r_2r_3 + s_3s_2 + t_2t_3 \\ r_3r_1 + s_3s_1 + t_3t_1 & r_3r_2 + s_3s_2 + t_3t_2 & r_3^2 + s_3^2 + t_3^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (\bar{a}, \bar{a}) & (\bar{a}, \bar{b}) & (\bar{a}, c) \\ (\bar{b}, \bar{a}) & (\bar{b}, \bar{b}) & (b, \bar{c}) \\ (\bar{c}, \bar{a}) & (\bar{c}, \bar{b}) & (\bar{c}, \bar{c}) \end{vmatrix} = G.$$

Reciproca este evidentă deoarece $G = \mathscr{V}^2$.

§9. Probleme

1. Fie trapezul dreptunghic $ABCD$ în care $AD \parallel BC$, $\overline{AD} = \bar{a}$, $\overline{AB} = \bar{b}$, măs $\widehat{ABC} = \dfrac{5\pi}{6}$.

Să se descompună $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, după vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$.

2. Se dau vectorii $\bar{d}_1 = \bar{a} - \alpha\bar{b} + 3\bar{c}$, $\bar{d}_2 = \alpha\bar{a} - \bar{b} + \bar{c}$, $\bar{d}_3 = 3\bar{a} + \bar{b} - \bar{c}$, unde $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ este o bază din V_3. Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$, astfel încît vectorii $\bar{d}_i$, $i = 1, 2, 3$ să fie coplanari.

Pentru α astfel găsit, să se descompună vectorul $\bar{d}_2$ după vectorii $\bar{d}$ și $\bar{d}_3$.

3. Se dau punctele A, B, C prin vectorii lor de poziție $\overrightarrow{OA} = 14\vec{i} - 7\vec{j} + 2\vec{k}$, $\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}$, $\overrightarrow{OC} = -2\vec{i} + 7\vec{j} + 2\vec{k}$. Să se arate că triunghiul AOB este dreptunghic și triunghiul BOC este isoscel. Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC și măsura unghiului BAC; să se scrie expresia analitică a versorului bisectoarei unghiului BAC.

4. Se dau vectorii $\bar{a} = \bar{i} + 2\lambda\bar{j} - (\lambda - 1)\bar{k}$, $\bar{b} = (3 - \lambda)\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ și se cere valoarea lui λ pentru care $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sînt ortogonali. Pentru λ astfel găsit, să se calculeze mărimea algebrică a proiecției vectorului $\bar{a}$ pe vectorul $\bar{a} + \bar{b}$.

5. Să se calculeze aria paralelogramului construit pe reprezentanții cu originea comună ai vectorilor $\bar{r}_1 = \dfrac{1 + \cos v}{\cos^2 u}\bar{j} + \dfrac{\sin u \sin v}{\cos^2 u}\bar{k}$, $\bar{r}_2 = -\sin v\bar{i} - \sin v \operatorname{tg} u\bar{j} + \dfrac{\cos v}{\cos u}\bar{k}$, folosind indentitatea Lagrange.

6. Fiind dați vectorii $\bar{a} = \bar{i} - 5\bar{j} - 7\bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + 6\bar{k}$, $\bar{c} = -\bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k}$, să se calculeze $\bar{w} = \bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$ și să se verifice liniar dependența vectorilor $\bar{w}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

7. Fie triedrul $\{O;\ \bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}\}$. Vectorii definiți prin

$$\bar{a}' = \frac{\bar{b} \times \bar{c}}{(\bar{a},\ \bar{b} \times \bar{c})},\quad \bar{b}' = \frac{\bar{c} \times \bar{a}}{(\bar{a},\ \bar{b} \times \bar{c})},\quad \bar{c}' = \frac{\bar{a} \times \bar{b}}{(\bar{a},\ \bar{b} \times \bar{c})}$$

se numesc reciprocii vectorilor $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, iar triedrul $\{O;\ \bar{a}',\ \bar{b}',\ \bar{c}'\}$ se numește *triedrul reciproc*. Ce relații se pot stabili între $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ și $\bar{a}'$, $\bar{b}'$, $\bar{c}'$?

8. Se dau vectorii $\bar{a} = \bar{i} - \alpha\bar{j} + 3\bar{k}$, $\bar{b} = \alpha\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$, $\bar{c} = 3\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$. Să se găsească valoarea lui α astfel încît vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ să fie coplanari. Pentru $\alpha = 2$, să se afle înălțimea paralelipipedului construit pe reprezentanții vectorilor $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, înălțime corespunzătoare bazei formate de reprezentanții vectorilor $\bar{a}$ și $\bar{b}$.

9. Să se arate că punctele $A(1, 1, 1)$, $B(3, -1, 4)$, $C(0, 7, -3)$, $D(5, 7, 2)$ sînt coplanare.

Capitolul 2

DREAPTA ȘI PLANUL ÎN SPAȚIU

§1. Reper cartezian

Este cunoscut faptul că spațiile $\mathbb{E}_3$ și V_3 sînt în corespondență biunivocă, bijecția fiind unic determinată prin fixarea originii, iar spațiile vectoriale V_3 și $\mathbb{R}^3$ sînt izomorfe, izomorfismul fiind unic determinat prin fixarea bazelor în cele două spații. Într-adevăr, în ipoteza că am fixat un punct O numit *origine* în $\mathbb{E}_3$ și o bază ortonormată $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ în V_3, fiecărui punct M din $\mathbb{E}_3$ îi corespunde în mod unic un vector $\bar{r} = \overline{OM}$ numit *vector de poziție* al punctului M; acestui vector îi corespunde în mod unic tripletul ordonat de numere reale $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ numite *coordonatele euclidiene* ale vectorului $\overline{OM}$ în raport cu baza $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$; se scrie $\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$.

Ansamblul $\{O\,;\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}\}$ se numeşte *reper cartezian* în $\mathbb{E}_3$. Punctul O se numeşte *originea reperului*, iar $\{\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}\}$ se numeşte *baza reperului*. Coordonatele euclidiene (x, y, z) ale vectorului de poziţie $\bar{r} = \overline{OM}$ se numesc *coordonatele carteziene ale punctului* M faţă de reperul ortonormat $\{O\,;\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}\}$; $x = (\bar{\imath}, \bar{r}) = \mathrm{pr}_{\bar{\imath}}\bar{r}$ = abscisa, $y = (\bar{\jmath}, \bar{r}) = \mathrm{pr}_{\bar{\jmath}}\bar{r}$ = ordonata, $z = (\bar{k}, \bar{r}) = \mathrm{pr}_{\bar{k}}\bar{r}$ = cota. Bijecţia dintre $\mathbb{E}_3$ şi $\mathbb{R}^3$ determinată prin fixarea reperului cartezian se numeşte *sistem de coordonate cartezian* şi se notează prin $M(x, y, z)$.

Bijecţiile menţionate mai sus permit deseori identificarea spaţiilor $\mathbb{E}_3$, V_3 şi $\mathbb{R}^3$.

Versorilor $\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}$ le ataşăm *axele de coordonate* Ox, Oy, Oz care au acelaşi sens cu sensul pozitiv al acestor versori. Coordonatele carteziene ale punctului M reprezintă mărimile algebrice ale proiecţiilor ortogonale ale vectorului $\overline{OM}$ pe cele trei axe de coordonate (fig. 22). Axele sînt caracterizate respectiv prin ecuaţiile

$$Ox: \begin{cases} y = 0, \\ z = 0 \end{cases} \qquad Oy: \begin{cases} z = 0, \\ x = 0 \end{cases} \qquad Oz: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Cele trei axe determină trei plane xOy, yOz, zOx numite *plane de coordonate*. Ele sînt caracterizate respectiv prin

$$xOy: z = 0, \qquad yOz: x = 0, \qquad zOx: y = 0$$

Cele trei plane de coordonate împart spaţiul în opt regiuni numite *octante*.

Uneori reperul cartezian este indicat prin notaţia $Oxyz$, prin aceasta înţelegîndu-se că s-a fixat originea O şi axele reciproc ortogonale Ox, Oy, Oz. Evident versorii reciproc ortogonali $\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}$ rezultă din context.

În cele ce urmează presupunem cunoscute din geometria euclidiană noţiunile elementare ca punct, dreaptă, plan, perpendiculară etc...; de asemenea presupunem că V_3 este raportat la baza ortonormată $\{\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}\}$, iar $\mathbb{E}_3$ la reperul cartezian $\{O\,;\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}\}$.

§2. Dreapta în spaţiu

O dreaptă în spaţiu poate fi determinată de:

(i) un punct şi un vector nenul;

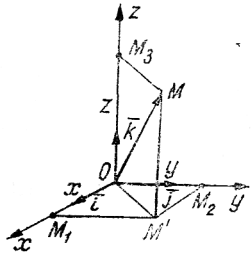


Fig. 22

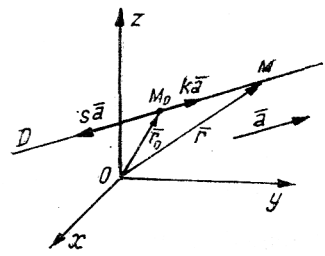


Fig. 23

(ii) două puncte;
(iii) intersecția a două plane.

2.1. *Dreapta determinată de un punct și un vector nenul.* Fie punctul fixat $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\bar{r}_0 = x_0\bar{i} + y_0\bar{j} + z_0\bar{k}$. Fie $\bar{a}(l, m, n)$ un vector nenul din V_3 și D o dreaptă care trece prin M_0 și are direcția lui $\bar{a}$ (fig. 23). Punctul $M(x, y, z)$ aparține dreptei D determinată de M_0 și de $\bar{a}$ dacă și numai dacă vectorii $\overline{M_0M}$ și $\bar{a}$ sînt coliniari, adică

$$(\bar{r} - \bar{r}_0) \times \bar{a} = 0.$$

Această ecuație în V_3 se numește *ecuația vectorială* a dreptei definită de un punct și o direcție. Vectorul $\bar{a}(l, m, n) \neq 0$, care dă direcția dreptei D, se numește *vector director*, iar coordonatele sale l, m, n se numesc *parametrii directori ai dreptei*. Evident orice vector $k\bar{a}$, $k \neq 0$ joacă același rol ca $\bar{a}$.

Coliniaritatea vectorilor $\bar{r} - \bar{r}_0$ și $\bar{a}$ se pune în evidență și prin relația $\bar{r} - \bar{r}_0 = t\bar{a}$, $t \in \mathbb{R}$ sau

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{a}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Această ecuație vectorială este echivalentă cu trei ecuații în $\mathbb{R}^3$,

$$x = x_0 + tl, \ y = y_0 + tm, \ z = z_0 + tn, \ t \in \mathbb{R}$$

numite *ecuațiile parametrice ale dreptei D*. Aceste ecuații se pot înlocui cu două *ecuații carteziene* în $\mathbb{R}^3$,

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

cu convenția că dacă un numitor este nul, atunci numărătorul respectiv trebuie egalat cu zero.

O b s e r v a ț i e. Deoarece $\bar{a}(l, m, n) \neq \bar{0}(0, 0, 0)$, cel mult două dintre numerele l, m, n se pot anula.

1) Dacă $l = 0$, $mn \neq 0$, atunci ecuațiile carteziene sînt echivalente cu

$$x = x_0, \quad \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

și reprezintă o dreaptă paralelă cu planul yOz.

2) Dacă $l = m = 0$, $n \neq 0$, atunci ecuațiile carteziene se reduc la

$$x = x_0, \ y = y_0$$

și reprezintă o dreaptă paralelă cu Oz.

2.2. *Dreapta determinată de două puncte.* Două puncte distincte $M_1(x_1, y_1, z_1)$ și $M_2(x_2, y_2, z_2)$ determină o dreaptă D și numai una. Pentru a scrie ecuațiile acestei drepte ne folosim de cazul precedent; anume vom considera

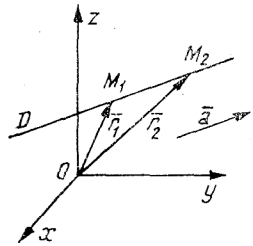


Fig. 24

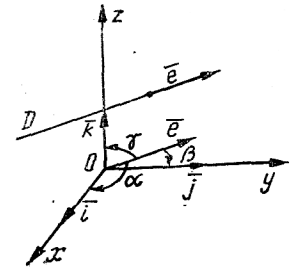


Fig. 25

dreapta ca fiind determinată de punctul M_1 şi de vectorul director $\bar{a}$ reprezentat de $\overrightarrow{M_1M_2}$ (fig. 24). Astfel *ecuaţiile carteziene* ale dreptei D sînt

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

2.3. *Dreapta orientată.* Fie D o dreaptă în spaţiu. Pe D se pot stabili două sensuri de parcurs, corespondente relaţiilor de ordine pe mulţimea punctelor dreptei, pe care convenim să le notăm cu (+) şi (−). O dreaptă D împreună cu o alegere a unui sens de parcurs se numeşte *dreaptă orientată.*

Dacă $\bar{a}$ este vectorul director al unei drepte D, atunci se acceptă ca sens pozitiv pe D sensul vectorului director $\bar{a}$ şi vom nota acest sens cu +. Acest lucru va fi admis în continuare.

Fie $M_0 \in D$, în ipotezele făcute mulţimea

$$D' = \{M \mid \overline{M_0M} = k\bar{a},\ k \geqslant 0\}$$

se numeşte *partea pozitivă* a lui D, iar mulţimea

$$D'' = \{M \mid \overline{M_0M} = s\bar{a},\ s \leqslant 0\}$$

se numeşte *partea negativă* a lui D.

Axele de coordonate Ox, Oy, Oz sînt exemple de drepte orientate. Dacă O este originea, atunci $\{M \mid \overline{OM} = t\bar{i},\ t \geqslant 0\}$ este semiaxa pozitivă Ox, iar $\{M \mid \overline{OM} = t\bar{i},\ t \leqslant 0\}$ este semiaxa negativă Ox.

Vectorului director $\bar{a} \neq \bar{0}$ al dreptei D i se poate ataşa versorul $\bar{e} = \dfrac{\bar{a}}{\|\bar{a}\|}$ numit *versor director* sau *direcţie orientată.* Prin urmare dreapta D poate fi exprimată în forma

$$D = \{M \mid \overline{M_0M} = t\bar{e},\ t \in \mathbb{R}\}$$

Versorul director $\bar{e}$ formează cu axele de coordonate unghiurile α, β, γ, numite *unghiuri directoare* ale dreptei D (fig. 25).

Coordonatele lui $\bar{e}$ se numesc *cosinusurile directoare* ale dreptei D. Putem scrie $\bar{e} = (\bar{e}, \bar{i})\bar{i} + (\bar{e}, \bar{j})\bar{j} + (\bar{e}, \bar{k})\bar{k}$ sau

$$\bar{e} = \cos\alpha\,\bar{i} + \cos\beta\,\bar{j} + \cos\gamma\,\bar{k}$$

Întrucît $\|\bar{e}\| = 1$, rezultă $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

2.4. *Unghiul dintre două drepte orientate.* Fie D_1 şi D_2 două drepte orientate prin vectorii directori $\bar{a}$ şi $\bar{b}$. Prin unghiul dintre dreptele orientate D_1 şi D_2 vom înţelege unghiul dintre $\bar{a}$ şi $\bar{b}$, adică unghiul definit prin

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{\|\bar{a}\|\ \|\bar{b}\|} \quad \text{sau}$$

$$\sin\varphi = \frac{\|\bar{a} \times \bar{b}\|}{\|\bar{a}\|\ \|\bar{b}\|}, \quad \varphi \in [0, \pi].$$

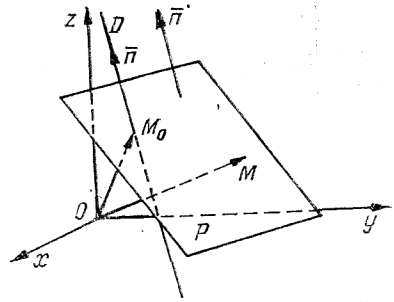


Fig. 26

Constatăm echivalenţele:

(i) $D_1 \perp D_2$ dacă şi numai dacă $(\bar{a}, \bar{b}) = 0$;

(ii) $D_1 \| D_2$ dacă şi numai dacă $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$.

§ 3. Planul în spaţiu

Un plan în spaţiu este determinat de condiţii geometrice ca: trei puncte necoliniare, două drepte concurente, două drepte paralele, o dreaptă şi un punct exterior dreptei, un punct şi un vector normal la plan.

Ne propunem să stabilim ecuaţia planului sub formă vectorială sau carteziană, impunînd anumite condiţii geometrice care-l determină.

3.1. *Planul determinat de un punct şi un vector normal nenul.* Fiind dată o dreaptă $D = \{N \mid \overline{M_0N} = t\bar{n},\ t \in \mathbb{R}\}$ care trece prin punctul M_0 şi care are direcţia vectorului $\bar{n}$, există un singur plan P perpendicular pe D în M_0 (fig. 26).

$M \in P$ dacă şi numai dacă $\overline{M_0M} \perp \bar{n}$. De aceea planul P este mulţimea

$$P = \{M \mid (\overline{M_0M}, \bar{n}) = 0\}.$$

Dreapta D se numeşte *normala* la plan, vectorul nenul $\bar{n}$ se numeşte *vectorul normal* al planului, punctul M care poate genera planul îl vom numi *punct curent.*

Dacă $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M(x, y, z)$ şi $\bar{n} = (a, b, c)$, atunci $\overline{M_0M} = (x - x_0)\bar{i} + (y - y_0)\bar{j} + (z - z_0)\bar{k}$; condiţia de ortogonalitate a vectorilor $\overline{M_0M}$ şi $\bar{n}$ scrisă în coordonate este

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

numită ecuaţia *carteziană a planului* ce trece prin M_0 şi este perpendicular pe $\bar{n}$.

Dacă prelucrăm membrul stîng al ecuaţiei de mai sus şi notăm $ax_0 + by_0 + cz_0 = -d$, obţinem $ax + by + cz + d = 0$.

Reciproc, să arătăm că orice ecuaţie de forma $ax + by + cz + d = 0$ reprezintă un plan, dacă prin ipoteză a, b, c nu se anulează simultan. Într-adevăr dacă (x_0, y_0, z_0) este o soluţie a ecuaţiei anterioare, atunci

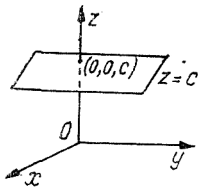


Fig. 27

$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$ ne dă $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$ și reînlocuind obținem $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$, care reprezintă ecuația unui plan ce conține punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și este perpendicular pe vectorul nenul (a, b, c).

Ecuația

$ax + by + cz + d = 0$ în $\mathbb{R}^3$, pentru care $a^2+b^2+c^2 \neq 0$,

se numește *ecuația carteziană generală a unui plan.*

Prin urmare un plan în spațiu este nucleul unei funcții liniar afine $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = ax + by + cz + d$.

3.2. *Plane particulare.* 1) Planul xOy are ecuația $z = 0$ și vectorul normal $\bar{k} = (0, 0, 1)$. Orice plan paralel cu xOy are ecuația $z = c$ (fig. 27).

Analog $x = 0$ reprezintă ecuația planului yOz al cărui vector normal este $\bar{i} = (1, 0, 0)$. Un plan paralel cu yOz are ecuația $x = a$. Ecuația planului xOz este $y = 0$; normala acestui plan are direcția $\bar{j} = (0, 1, 0)$; un plan paralel cu yOz are ecuația $y = b$.

2) Ecuațiile planelor perpendiculare pe planele de coordonate xOy, yOz, zOx sînt respectiv $ax + by + d = 0$, $by + cz + d = 0$, $ax + cz + d = 0$.

3) Ecuațiile planelor care trec prin axele de coordonate Ox, Oy, Oz sînt respectiv $by + cz = 0$, $ax + cz = 0$, $ax + by = 0$.

4) Ecuația planului care trece prin origine este $ax + by + cz = 0$.

3.3. *Planul determinat de trei puncte necoliniare.* Pentru a stabili ecuația planului determinat de punctele necoliniare $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$ (fig. 28) procedăm în felul următor:

1) Folosim ecuația generală a planului și ecuațiile obținute prin înlocuirea coordonatelor punctelor M_i în această ecuație

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$ax_i + by_i + cz_i + d = 0, \qquad i = 1, 2, 3.$$

S-a obținut un sistem liniar omogen în necunoscutele a, b, c, d, cu soluții nebanale deoarece a, b, c nu se pot anula simultan. Condiția care asigură acest lucru,

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

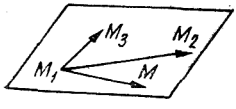


Fig. 28

este ecuația carteziană a planului. Într-adevăr ecuația de mai sus este o ecuație de gradul întîi în x, y, z și oricare dintre punctele (x_i, y_i, z_i), $i=1, 2, 3$ o satisface.

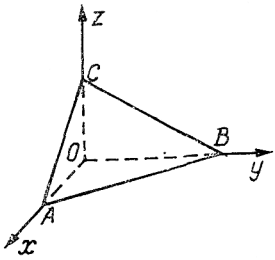


Fig. 29

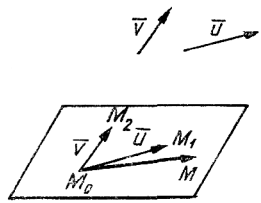


Fig. 30

Ca un caz particular putem găsi *ecuaţia planului prin tăieturi* (fig. 29). Înlocuind coordonatele punctelor $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ în ecuaţia de mai sus, găsim $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$.

De asemenea ecuaţia carteziană a planului determinat de punctele M_i, $i = 1, 2, 3$ ne ajută să stabilim *condiţia de coplanaritate* a patru puncte din spaţiu.

2) Fie M un punct care poate genera planul, al cărui vector de poziţie este $\overline{OM} = \bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$. Obţinem ecuaţia vectorială a planului P impunînd condiţia de coplanaritate a vectorilor $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$, adică $(\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2} \times \overline{M_1M_3}) = 0$. Dacă $M_i(\bar{r}_i)$, $\bar{r}_i = x_i\bar{i} + y_i\bar{j} + z_i\bar{k}$, relaţia de mai sus este echivalentă cu ecuaţia vectorială

$$(\bar{r} - \bar{r}_1, (\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \times (\bar{r}_3 - \bar{r}_1)) = 0$$

sau

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Am obţinut ecuaţia carteziană a planului determinat de trei puncte necoliniare, ecuaţie echivalentă cu cea de la 1).

3.4. *Planul determinat de un punct şi doi vectori necoliniari.* Fie $\bar{u} = (l_1, m_1, n_1)$ şi $\bar{v} = (l_2, m_2, n_2)$ doi vectori necoliniari, adică $\bar{u} \times \bar{v} \neq \bar{0}$ şi un punct cunoscut M_0. Cele trei elemente M_0, $\bar{u}$, $\bar{v}$ determină un plan unic P (fig. 30).

Construim reprezentanţii vectorilor $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ ca fiind $\overrightarrow{M_0M_1}$, respectiv $\overrightarrow{M_0M_2}$. Un punct $M \in \mathbb{E}_3$ aparţine planului dacă şi numai dacă vectorii $\overline{M_0M}$, $\overline{M_0M_1}$, $\overline{M_0M_2}$ sînt coplanari. Coplanaritatea acestor vectori o exprimăm astfel:

1) $\overline{M_0M} = r\bar{u} + s\bar{v}$; scrisă în coordonate, această relaţie vectorială este echivalentă cu:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + rl_1 + sl_2 \\ y &= y_0 + rm_1 + sm_2 \quad r, s \in \mathbb{R} \\ z &= z_0 + rn_1 + sn_2 \end{aligned}$$

numite *ecuaţiile parametrice* ale planului P, iar r şi s se numesc *parametri*.

2) $(\overline{M_0M}, \bar{u} \times \bar{v}) = 0$; scrisă în coordonate această ecuaţie vectorială conduce la ecuaţia carteziană

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Precizăm că toate ecuaţiile carteziene obţinute pentru plan sînt echivalente cu ecuaţia generală a planului $ax + by + cz + d = 0$. Se observă că un plan depinde de patru parametri neesenţiali a, b, c, d şi trei parametri esenţiali. Dacă $a \neq 0$, atunci cei trei parametri esenţiali sînt $\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{d}{a}$.

De asemenea precizăm că indiferent de forma ecuaţiei carteziene a planului, coeficienţii lui x, y, z reprezintă coordonatele vectorului normal $\bar{n}$. Vectorul normal este unic pentru un plan dat, abstracţie făcînd de un factor scalar nenul.

Ecuaţiile normalei la plan care trece prin M_0 sînt (fig. 26)

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

3.5. *Plan orientat.* Referitor la un plan în spaţiu sînt evidente următoarele afirmaţii:

1) planul are două feţe;

2) elementul de bază în studiul planului în raport cu spaţiul este normala;

3) alegerea unui sens pe normală este echivalentă cu alegerea unei feţe a planului;

4) alegerea unui sens de rotaţie în plan este echivalentă cu alegerea unui sens pe normală.

Un plan P împreună cu o alegere a sensului pe normală se numeşte *plan orientat* (fig. 31).

Evident este natural să alegem acel sens pe normală care să ne conducă la o orientare a planului coerentă cu orientarea spaţiului. În continuare vom subînţelege o asemenea orientare.

În aplicaţii, faţa care corespunde sensului ales pe normală se notează cu $(+)$, iar faţa opusă cu $(-)$.

Evident planele de coordonate xOy, yOz, zOx sînt plane orientate.

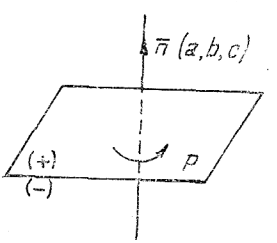


Fig. 31

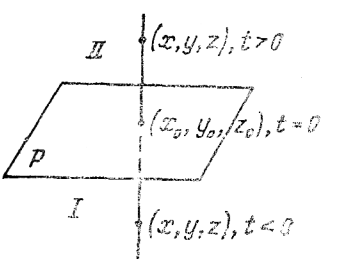


Fig. 32

3.6. *Semispații.* Fie în spațiu planul de ecuație

$$P : f(x, y, z) = ax + by + cz + d = 0.$$

Acest plan separă spațiul în două submulțimi convexe (fig. 32)

$$\mathrm{I} = \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) \leqslant 0\}, \ \mathrm{II} = \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) \geqslant 0\},$$

$$\mathrm{I} \cap \mathrm{II} = P, \quad \mathrm{I} \cup \mathrm{II} = \mathbb{R}^3.$$

Pentru a dovedi această afirmație, fie $(x_0, y_0, z_0) \in P$ și

$$D : x = x_0 + at, \ y = y_0 + bt, \ z = z_0 + ct, \ t \in \mathbb{R}$$

normala la P în punctul considerat. Punctele lui D pot fi împărțite în trei submulțimi caracterizate respectiv prin $t < 0$, $t = 0$ și $t > 0$. Să ne închipuim că (x_0, y_0, z_0) descrie pe P. Regiunea din spațiu măturată de semidreapta $t \leqslant 0$ este caracterizată prin $f(x, y, z) = (a^2 + b^2 + c^2)t \leqslant 0$ și o notăm cu I. Regiunea descrisă de semidreapta $t \geqslant 0$ o notăm prin II și este caracterizată prin $f(x, y, z) = (a^2 + b^2 + c^2)t \geqslant 0$. Problema convexității o lăsăm drept temă pentru cititor.

Submulțimile I și II se numesc *semispații închise.*

Avînd în vedere că funcția f păstrează semn constant pentru punctele unui semispațiu, pentru aflarea acestui semn este suficient să alegem un punct particular (x_1, y_1, z_1) și să vedem ce semn are numărul $f(x_1, y_1, z_1)$.

3.7. *Reuniunea și intersecția a două plane.* Fie P_1 și P_2 două plane de ecuații $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, respectiv $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$.

Atunci *reuniunea* celor două plane este mulțimea

$$L = \{(x, y, z) \mid (a_1x + b_1y + c_1z + d_1)(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0\}.$$

Va trebui să arătăm că $P_1 \cup P_2 = L$. Fie un punct $(p, q, r) \in P_1 \cup P_2$, adică $(p, q, r) \in P_1$ sau $(p, q, r) \in P_2$, ceea ce este echivalent cu $a_1p + b_1q + c_1r + d_1 = 0$ sau $a_2p + b_2q + c_2r + d_2 = 0$. În ambele cazuri $(a_1p + b_1q + c_1r + d_1)(a_2p + b_2q + c_2r + d_2) = 0$, deci $(p, q, r) \in L$. De fapt am arătat că $P_1 \cup P_2 \subseteq L$.

Invers, fie $(p, q, r) \in L$, ceea ce este echivalent cu $(a_1p + b_1q + c_1r + d_1)(a_2p + b_2q + c_2r + d_2) = 0$ și deci cel puțin un factor este zero, fie acesta $a_1p + b_1q + c_1r + d_1 = 0$; rezultă $(p, q, r) \in P_1 \subseteq P_1 \cup P_2$. Deci $L \subseteq P_1 \cup P_2$.

În final, din cele două incluziuni rezultă egalitatea $L = P_1 \cup P_2$.

Anticipăm (vezi cap. 5 § 3) că reuniunea a două plane reprezintă o cuadrică degenerată.

Presupunem că planele P_1 și P_2 nu sînt paralele sau confundate. *Intersecția* $P_1 \cap P_2$ este o *dreaptă* (fig. 33) pe care o notăm cu D, ale cărei ecuații sînt

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}, \text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} = 2.$$

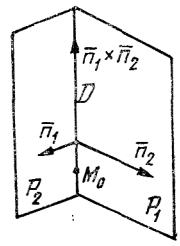


Fig. 33

Sistemul de ecuații liniare prin care este reprezentată dreapta D este simplu nedeterminat; sistemul admite o infinitate simplă de soluții care sînt tocmai punctele dreptei.

Un punct M_0 al dreptei D se obține ca intersecție a planelor P_1 și P_2 cu unul din planele de coordonate sau cu un plan paralel cu unul din planele de coordonate.

Direcția dreptei D este dată de vectorul $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2$, unde $\bar{n}_1(a_1, b_1, c_1)$, $\bar{n}_2(a_2, b_2, c_2)$. Astfel parametrii directori l, m, n, ai dreptei D sînt

$$l = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad m = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \quad n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Dacă presupunem că $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, atunci sistemul care dă ecuațiile dreptei ca intersecție a două plane se reduce la

$$\begin{cases} x = az + p \\ y = bz + q \end{cases}$$

care sînt *ecuații canonice ale dreptei D*.

Din aceste ecuații constatăm că o dreaptă în spațiu este exprimată cu ajutorul a două ecuații care depind de patru parametri esențiali a, b, p, q. Prin urmare pentru determinarea unei drepte sînt suficiente două condiții.

Pentru a determina poziția relativă a unor drepte sau plane se alcătuiește sistemul format de ecuațiile lor, se rezolvă algebric acest sistem și se interpretează geometric rezultatul. De asemenea precizăm că din punct de vedere topologic, dreptele și planele sînt respectiv submulțimi închise în spațiu.

3.8. *Unghiul dintre două plane orientate.* Fie planele P_1 și P_2 avînd ecuațiile $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, respectiv $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$.

Planele sînt paralele dacă și numai dacă vectorii normali $\bar{n}_1(a_1, b_1, c_1)$, $\bar{n}_2(a_2, b_2, c_2)$ sînt coliniari, adică $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = 0$ sau $(a_1, b_1, c_1) = k(a_2, b_2, c_2)$, $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ și $d_1 \neq d_2$. Cele două ecuații reprezintă același plan dacă și numai dacă $(a_1, b_1, c_1) = k(a_2, b_2, c_2)$, $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ și $d_1 = kd_2$.

Două plane neparalele și neconfundate se intersectează după o dreaptă D și determină un unghi diedru (fig. 34).

Unghiul diedru format de cele două plane este măsurat prin unghiul plan φ, care se obține secționînd planele P_1 și P_2 cu un plan P_3 perpendicular pe D. Prin definiție *unghiul diedru* dintre cele două plane este unghiul dintre cei doi vectori normali $\bar{n}_1$ și $\bar{n}_2$, determinat prin

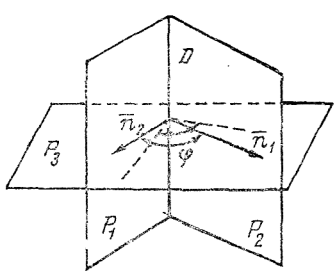


Fig. 34

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{n}_1, \bar{n}_2)}{\|\bar{n}_1\| \; \|\bar{n}_2\|} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\,\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

$$\varphi \in [0, \pi].$$

În particular planele P_1 și P_2 sînt perpendiculare dacă și numai dacă $(\bar{n}_1, \bar{n}_2) = 0$ sau în coordonate $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

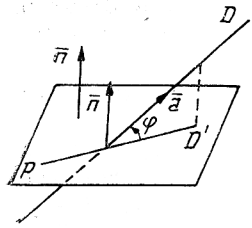


Fig. 37

Folosind produsul scalar al vectorilor $\bar{n}$ şi $\overline{M_1M_0}$ găsim

$$a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1) =$$

$$= \pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\ \mathrm{d}(M_0; P).$$

Deoarece $M_1 \in P$ rezultă $ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$. Înlocuim în relaţia de sus şi obţinem

$$\mathrm{d}(M_0; P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

4.3. *Unghiul dintre o dreaptă orientată şi un plan orientat.* Presupunem că dreapta D intersectează planul P (fig. 37). Fie D' proiecţia dreptei D pe planul P. Unghiul căutat este unghiul dintre dreapta D şi D'. Întrucît vectorul director al dreptei D' este mai greu de găsit, vom calcula unghiul complementar $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{(\bar{n}, \bar{a})}{\|\bar{n}\|\,\|\bar{a}\|}$ sau

$$\sin\varphi = \frac{al + bm + cn}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Dreapta este paralelă cu planul sau $D \subset P$ dacă şi numai dacă $(\bar{n}, \bar{a}) = 0$ sau $al + bm + cn = 0$.

Dreapta este perpendiculară pe plan dacă şi numai dacă $\bar{n} \times \bar{a} = \bar{0}$ sau $(a, b, c) = k(l, m, n)$, $k \in \mathbb{R} - \{0\}$.

4.4. *Perpendiculara comună a două drepte oarecare din spaţiu.* Două drepte din spaţiu pot fi confundate, paralele, concurente sau oarecare. Pentru două drepte D_1 şi D_2 care admit pe $\bar{a}_1$, respectiv $\bar{a}_2$ ca vectori directori, există o *direcţie normală comună unică* dacă şi numai dacă dreptele D_1 şi D_2 sînt oarecare sau concurente. În acest caz există o dreaptă şi numai una care se sprijină simultan pe cele două drepte avînd direcţia $\bar{n} = \bar{a}_1 \times \bar{a}_2$ (fig. 38) numită *perpendiculara comună* a dreptelor D_1 şi D_2.

Pentru a stabili ecuaţiile perpendicularei comune D, observăm că această dreaptă apare ca intersecţia a două plane: planul P_1, care conţine pe D_1 şi $\bar{n}$ şi planul P_2 care conţine pe D_2 şi $\bar{n}$. Presupunînd că dreptele D_1 şi D_2 trec respectiv prin punctele M_1 şi M_2 şi că N este punctul curent în P_1, iar M este punctul curent în P_2, ecuaţiile perpendicularei comune sînt

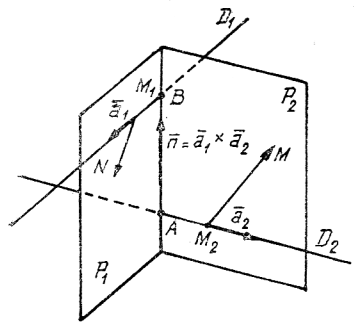


Fig. 38

$$D: \begin{cases} (\overline{M_1N},\ \bar{a}_1 \times \bar{n}) = 0 \\ (\overline{M_2M},\ \bar{a}_2 \times \bar{n}) = 0. \end{cases}$$

4.5. *Distanţa dintre două drepte.* Fie două drepte D_1 şi D_2 descrise respectiv de punctele M şi N. Numărul $\inf \mathrm{d}(M, N)$ se numeşte

3.9. *Fascicule de plane.* În 3.7 am văzut cum se poate cerceta o dreaptă determinată de intersecţia a două plane. Reciproc, dacă se dă o dreaptă, atunci prin ea trec o infinitate de plane.

Mulţimea tuturor planelor care trec printr-o dreaptă dată D se numeşte *fascicul de plane.* Dreapta D se numeşte *axa* fasciculului.

Considerăm planele de ecuaţii $P_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ şi $P_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ care determină dreapta D (fig. 33). Deoarece orice vector nenul $\bar{n}$ perpendicular pe D se scrie în forma $\bar{n} = r\bar{n}_1 + s\bar{n}_2$, $r^2 + s^2 \neq 0$, rezultă că ecuaţia unui plan oarecare din fasciculul de axă D are ecuaţia

$$r(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + s(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0, \quad r^2 + s^2 \neq 0.$$

Mulţimea planelor de forma

$$a_1x + b_1y + c_1z + \lambda = 0$$

se numeşte *fascicul de plane paralele.*

Folosind fasciculele de plane putem justifica şi pe această cale ecuaţiile planelor particulare din 3.2. Astfel ştiind că axa absciselor este $Ox : \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, ecuaţia unui plan care trece prin Ox este $by + cz = 0$, iar ecuaţia unui plan paralel cu acesta este $by + cz + d = 0$ etc. . . .

§4. Probleme asupra dreptei şi planului

4.1. *Distanţa de la un punct la o dreaptă.* Fie dreapta D de ecuaţii $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$; această dreaptă conţine punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi are vectorul director $\bar{a}(l, m, n)$. Fie A un punct din $\mathbb{E}_3$ şi A' proiecţia sa pe dreapta D (fig. 35). Lungimea segmentului $[AA']$ este *distanţa de la punctul A la dreapta D* şi se notează $\mathrm{d}(A\,;D)$. Din formula care dă aria paralelogramului construit pe reprezentanţii vectorilor $\bar{a}$ şi $\overline{M_0A}$ obţinem

$$\mathrm{d}(A\,;D) = \frac{\|\bar{a} \times \overline{M_0A}\|}{\|\bar{a}\|}$$

4.2. *Distanţa de la un punct la un plan.* Fie planul P de ecuaţie $ax + by + cz + d = 0$, al cărui vector normal este $\bar{n}(a, b, c)$. Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct din $\mathbb{E}_3$ exterior planului şi fie $M_1(x_1, y_1, z_1)$ proiecţia lui M_0 pe planul P (fig. 36). Lungimea $\|\overline{M_1M_0}\|$ este *distanţa de la punctul M_0 la planul P* şi se notează cu $\mathrm{d}(M_0\,;P)$.

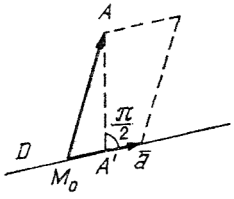


Fig. 35

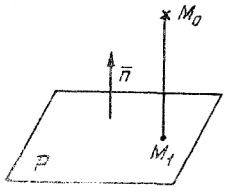


Fig. 36

distanța dintre dreptele D_1 *și* D_2 și se notează cu $d(D_1; D_2)$. Din considerente geometrice rezultă că $d(D_1; D_2)$ se află astfel:

1) dacă dreptele D_1 și D_2 sînt concurente, atunci $d(D_1, D_2) = 0$;

2) dacă $D_1 \| D_2$, atunci prin $M_0 \in D_1$ se duce un plan perpendicular pe D_1 care taie pe D_2 în N_0 și avem $d(D_1; D_2) = d(M_0, N_0)$;

3) dacă D_1 și D_2 sînt oarecare, $d(D_1; D_2) = \|\overline{AB}\|$, punctele A și B fiind pe perpendiculara comună D (fig. 38).

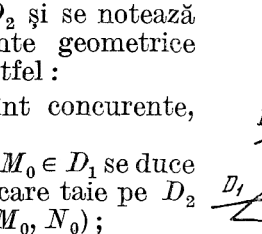


Fig. 39

Această distanță se mai poate afla astfel: prin dreapta D_1 ducem un plan P paralel cu dreapta D_2. Atunci $d(D_1; D_2) = d(M_2; P)$, unde M_2 este un punct cunoscut al dreptei D_2. Figura 39 arată că această distanță este lungimea înălțimii paralelipipedului construit pe vectorii $\overline{M_1M_2}$, $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$. Din semnificația produsului mixt rezultă

$$d(D_1; D_2) = \frac{|(\overline{M_1M_2}, \bar{a}_1 \times \bar{a}_2)|}{\|\bar{a}_1 \times \bar{a}_2\|}.$$

§5. Probleme

1. Să se figureze punctele $A(5, 0, 0)$, $B(0, -2, 0)$, $C(0, 0, 3)$, $D(-3, 2, 0)$, $E(0, -1, -4)$, $F(2, 0, 4)$, $G(3, -5, 8)$ și să se scrie expresia vectorului de poziție al punctului G față de reperul cartezian $\{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$.

2. Fie D_1 și D_2 două drepte paralele respectiv cu vectorii $(1, 0, 1)$ și $(-1, 1, 2)$. Să se scrie ecuațiile parametrice ale unei drepte perpendiculare simultan pe D_1, D_2 și care trece prin punctul $(2, 3, 0)$.

3. Se consideră punctele $A(1, 3, 0)$, $B(3, -2, 1)$, $C(\alpha, 1, -3)$, $D(7, -2, 3)$. Să se determine α astfel încît punctele să fie coplanare; pentru α astfel găsit, să se scrie ecuația carteziană a planului determinat de ele.

4. Să se scrie ecuația planului care trece prin punctul $M_0(-1, 3, 3)$ și conține dreapta D, unde (1) $D: \begin{cases} x + 2y + 3z - 1 = 0 \\ 2x - y - z - 3 = 0 \end{cases}$, (2) $D: \frac{x-4}{1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z+1}{2}$, (3) $D: x = 1 + 2t$, $y = -1 + t$, $z = 1 + 3t$, $t \in \mathbb{R}$.

5. Să se calculeze unghiul dintre dreptele $D_1: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z}{1}$, $D_2: \frac{x}{-1} = \frac{y}{4} = \frac{z}{1}$ și să se scrie ecuația planului determinat de aceste drepte.

6. Se dau punctele $A(1, 3, 2)$, $B(-1, 2, 1)$, $C(0, 1, -1)$, $D(2, 0, -1)$ și planul $P: 2x + y - z - 1 = 0$. Să se stabilească care dintre ele se găsesc de aceeași parte cu originea axelor de coordonate față de planul dat.

7. Să se scrie ecuațiile perpendicularei comune dreptelor $D_1: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z}{1}$, $D_2: \frac{x}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ și să se calculeze distanța dintre ele.

3. Fie dreptele $D_1: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1}$, $D_2: \frac{x-2}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{\alpha}$.

1) să se determine α astfel încît dreptele D_1 şi D_2 să fie concurente;
2) să se scrie ecuaţia planului P determinat de aceste drepte;
3) să se calculeze $d(M_0; P)$, unde $M_0(5, -4, 1)$.

Capitolul 3

SCHIMBĂRI DE REPERE CARTEZIENE

Mulţimea izometriilor formează un grup, cu ajutorul căruia introducem în spaţiul punctual $\mathbb{E}_3$ noţiunea de congruenţă a figurilor. Izometriile de bază sînt rotaţia, simetria în raport cu un plan, simetria în raport cu un punct şi translaţia.

Rotaţia şi simetriile se mai numesc transformări ortogonale; ele sînt aplicaţii liniare date prin matrice ortogonale.

Orice izometrie este de forma $\mathcal{J}=\mathcal{T}\circ\mathcal{O}$, unde $\mathcal{T}$ este o translaţie, iar $\mathcal{O}$ este o transformare ortogonală.

Fie $\mathcal{J}=\mathcal{T}\circ\mathcal{O}$ o izometrie determinată de reperele $R=\{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ şi $R'=\{O; \bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\}$. Izometria $\mathcal{J}$ se numeşte *pozitivă (deplasare)* dacă baza $\{\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\}$ este orientată pozitiv şi *negativă (antideplasare)* în caz contrar.

Principalele izometrii pozitive sînt *translaţiile şi rotaţiile*, iar principalele izometrii negative sînt simetria în raport cu un plan şi simetria în raport cu un punct.

§1. Translaţia

Translaţia unui sistem de axe de coordonate $Oxyz$ este deplasarea sistemului astfel ca axele noului sistem $O'x'y'z'$ să rămînă paralele cu axele vechi şi de acelaşi sens (fig. 40).

Prin urmare reperul $\{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ supus translaţiei $\mathcal{T}$ devine $\{O'; \bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\}$, unde $O'(a, b, c)$ şi $O'=\mathcal{T}(O)$, $\bar{i}'=\mathcal{T}(\bar{i})=\bar{i}$, $\bar{j}'=\mathcal{T}(\bar{j})=\bar{j}$, $\bar{k}'=\mathcal{T}(\bar{k})=\bar{k}$.

Ne propunem să stabilim relaţiile între coordonatele x, y, z ale punctului M raportat la sistemul $Oxyz$ şi coordonatele x', y', z' ale aceluiaşi punct raportat la sistemul translatat $O'x'y'z'$.

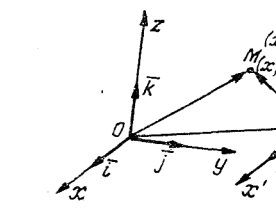


Fig. 40

Se observă că $\overline{OM}=\overline{OO'}+\overline{O'M}$. Scrisă în coordonate, această relaţie vectorială devine

$$x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}=a\bar{i}+b\bar{j}+c\bar{k}+$$
$$+x'\bar{i}+y'\bar{j}+z'\bar{k},$$

de unde

$$x'=x-a,\ y'=y-a,\ z'=z-a.$$

Scrierea matriceală a acestor relații este

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

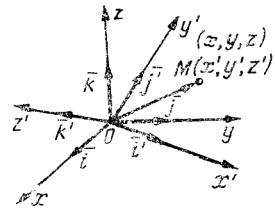


Fig. 41

Evident, translația este o izometrie pozitivă.

Caz particular. Translația în planul xOy este dată de relațiile

$$x' = x - a, \quad y' = y - a.$$

§2. Rotația

Fie în $\mathbb{E}_3$ două repere carteziene $\{O\,;\,\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$, $\{O\,;\,\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\}$ care au originea comună O (fig. 41). Cunoscînd coordonatele versorilor $\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$ față de baza $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ și coordonatele (x, y, z) ale punctului M în raport cu primul reper, ne propunem să găsim coordonatele x', y', z' ale lui M în raport cu al doilea reper.

Observăm că o asemenea schimbare de repere în $\mathbb{E}_3$ este echivalentă cu trecerea de la baza ortonormată $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ la baza ortonormată $\{\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\}$ din V_3.

În baza rezultatelor anterioare avem

$$\bar{i}' = \mathcal{O}(\bar{i}) = (\bar{i}', \bar{i})\bar{i} + (\bar{i}', \bar{j})\bar{j} + (\bar{i}', \bar{k})\bar{k}$$

$$\bar{j}' = \mathcal{O}(\bar{j}) = (\bar{j}', \bar{i})\bar{i} + (\bar{j}', \bar{j})\bar{j} + (\bar{j}', \bar{k})\bar{k}$$

$$\bar{k}' = \mathcal{O}(\bar{k}) = (\bar{k}', \bar{i})\bar{i} + (\bar{k}', \bar{j})\bar{j} + (\bar{k}', \bar{k})\bar{k}.$$

Notăm $a_{11} = (\bar{i}', \bar{i})$, $a_{21} = (\bar{i}', \bar{j})$, $a_{31} = (\bar{i}', \bar{k})$, $a_{12} = (\bar{j}', \bar{i})$, $a_{22} = (\bar{j}', \bar{j})$, $a_{32} = (\bar{j}', \bar{k})$, $a_{13} = (\bar{k}', \bar{i})$, $a_{23} = (\bar{k}', \bar{j})$, $a_{33} = (\bar{k}', \bar{k})$ și

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Matricea A este matricea de trecere de la baza $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ la baza $\{\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\}$ și este o matrice ortogonală. Într-adevăr $\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$ fiind versori (coordonatele lor sînt cosinusuri directoare) reciproc ortogonali, deducem $A^tA = I$. Ultima relație implică $(\det A)(\det {}^tA) = 1$, deci $(\det A)^2 = 1$, adică $\det A = \pm 1$. De aceea relația $A^tA = I$ este echivalentă cu ${}^tA = A^{-1}$.

Rezultă că trecerea de la baza ortonormată $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ la baza ortonormată $\{\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\}$ se face cu ajutorul matricei ortogonale A, iar trecerea inversă se face cu

Pentru a stabili relaţia de legătură între coordonatele x, y, z ale punctului M raportat la sistemul $Oxyz$ şi coordonatele x', y', z' ale aceluiaşi punct raportat la sistemul rotit $Ox'y'z'$, observăm că $\overline{OM} = \overline{OM}$ sau echivalent $x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = x'\bar{i}' + y'\bar{j}' + z'\bar{k}'$. De aceea

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \text{ sau } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}.$$

Invers, avem

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = {}^tA \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Aceste relaţii caracterizează o izometrie care păstrează originea. O astfel de izometrie dată de relaţiile de mai sus se mai numeşte *transformare ortogonală* şi se notează cu $\mathcal{O}$. Deoarece $(\bar{i}', \bar{j}' \times \bar{k}') = \det A$, rezultă că o asemenea izometrie este pozitivă dacă $\det A = +1$ *(rotaţie)* şi negativă dacă $\det A = -1$*(rotaţie şi simetrie)*.

Exemple. 1) *Rotaţia în jurul lui Oz.* În reperul cartezian $\{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ considerăm rotaţia $\mathcal{R}$ de axă Oz şi de unghi θ (fig. 42).

Din figură rezultă

$$\bar{i}' = \mathcal{R}(\bar{i}) = \bar{i}\cos\theta + \bar{j}\sin\theta$$

$$\bar{j}' = \mathcal{R}(\bar{j}) = -\bar{i}\sin\theta + \bar{j}\cos\theta$$

$$\bar{k}' = \mathcal{R}(\bar{k}) = \bar{k}.$$

Astfel din relaţia $x'\bar{i}' + y'\bar{j}' + z'\bar{k}' = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, găsim

$$\mathcal{R}: \begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \\ z = z'. \end{cases}$$

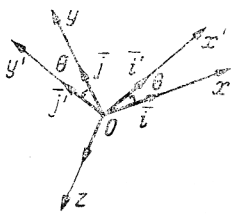


Fig. 42

Evident determinantul matricei lui $\mathcal{R}$ este $+1$ şi deci $\mathcal{R}$ este o izometrie pozitivă.

În particular o rotaţie în planul xOy, de unghi θ, în jurul originii este caracterizată prin

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta. \end{cases}$$

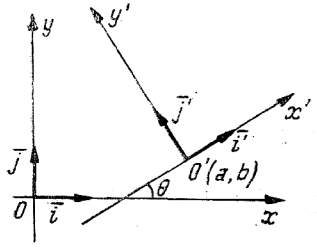


Fig. 43

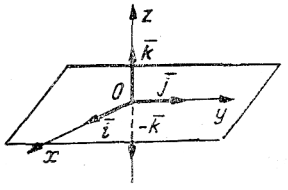


Fig. 44

Dintre izometriile în plan reţinem *roto-translaţia* (fig. 43) caracterizată prin

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta + a \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta + b. \end{cases}$$

2) *Simetria faţă de un plan.* Fie reperul ortonormat $\{O\,;\,\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ şi $\mathcal{S}$ simetria (fig. 44) în raport cu planul $(O\,;\,\bar{i}, \bar{j})$.

$$\bar{i}' = \mathcal{S}(\bar{i}) = \bar{i}$$

$$\bar{j}' = \mathcal{S}(\bar{j}) = \bar{j}$$

$$\bar{k}' = \mathcal{S}(\bar{k}) = -\bar{k}.$$

Astfel, din $x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = x'\bar{i}' + y'\bar{j}' + z'\bar{k}'$, găsim

$$\mathcal{S} : x = x',\ y = y',\ z = -z'$$

sau scris matriceal

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

Determinantul matricei lui $\mathcal{S}$ este -1 şi deci $\mathcal{S}$ este o izometrie negativă.

§3. Probleme

1. Fie reperul cartezian $Oxyz$ faţă de care considerăm punctele $A(3, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 6)$. Construim sistemul rotit $Ox'y'z'$ astfel: Oz' are direcţia şi sensul înălţimii OO' a tetraedrului $OABC$; Oy' este paralelă cu $O'A'$, unde A' este piciorul înălţimii dusă din A' în triunghiul ABC, iar axa Ox' este astfel aleasă încît sistemul $Ox'y'z'$ să fie orientat pozitiv.

Să se scrie matricea rotaţiei şi să se determine direcţia invariantă (subspaţiul propriu real unidimensional) faţă de această rotaţie.

2. Se consideră dreapta $D : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z}{2}$. Fie $\bar{i}'$ versorul director al dreptei D. Fie $\bar{j}'$ un versor perpendicular pe D care aparţine planului yOz, iar $\bar{k}'$ versorul ales astfel încît $\{\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\}$ să fie o bază ortonormată.

Să se stabilească formulele de schimbare a bazei şi să se compare orientările celor două baze.

CONICE

§1. Noțiuni generale

Fie $\mathbb{E}_2$ spațiul punctual euclidian real bidimensional raportat la un reper cartezian $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ și fie $g : \mathbb{E}_2 \to \mathbb{R}$ forma pătratică afină definită prin

$$g(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00},$$

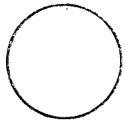
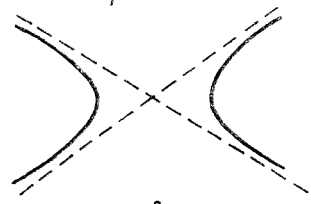
$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0.$$

1.1. *Definiție. Mulțimea de nivel constant zero*

$$\Gamma = g^{-1}(0) = \{M(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x, y) = 0\}$$

se numește conică sau curbă algebrică de ordinul al doilea. Se notează $\Gamma : g(x, y) = 0$.

Tabelul 1

Cerc	Elipsă	Hiperbolă
		
$x^2+y^2=r^2$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$
Parabolă	Pereche de drepte concurente	Pereche de drepte paralele
$y^2=2px$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	$x^2-a^2=0$
Pereche de drepte confundate	Mulțime cu un singur element	Mulțimea vidă
	$\bullet$	$\varnothing$
$x^2=0$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$ sau $x^2+a^2=0$

Din punct de vedere topologic, conicele sînt mulțimi închise în plan deoarece $\{0\}$ este o mulțime închisă în $\mathbb{R}$, $\Gamma = g^{-1}(0)$ și g este o funcție continuă.

Una dintre problemele importante ale geometriei analitice este de a dovedi că orice conică este congruentă cu una dintre următoarele mulțimi: cerc, elipsă, hiperbolă, parabolă, pereche de drepte, mulțime care conține un singur punct sau mulțimea vidă (tabelul 1).

Rezolvarea problemei menționate o vom face în două variante: fie folosind schimbarea axelor de coordonate, fie folosind elemente din teoria formelor pătratice.

Utilizînd rototranslația, realizăm trecerea de la reperul cartezian $\{O; \bar{i}, \bar{j}\}$ la un reper adecvat orientat pozitiv (numit *reper canonic* sau *natural*) față de care ecuația $g(x, y) = 0$ să aibă forma cea mai simplă posibilă, numită *ecuația canonică* sau *redusă*.

După cum vom vedea ulterior, în discuție intervin următoarele numere atașate polinomului $g(x, y)$,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ a_{01} & a_{02} & a_{00} \end{vmatrix} \qquad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad I = a_{11} + a_{22}$$

$$a_{12} = a_{21},\ a_{10} = a_{01},\ a_{20} = a_{02}.$$

Prin trecerea de la reperul $\{O; \bar{i}, \bar{j}\}$ la reperul canonic, polinomul $g(x, y)$ se schimbă în $g'(x', y')$. Se poate arăta că numerele Δ', δ', I' atașate polinomului g' sînt respectiv egale cu numerele Δ, δ, I. De aceea Δ, δ, I se numesc *invarianții metrici* ai conicei.

§2. Centrul unei conice

Există conice $\Gamma: g(x,y) = 0$ care admit un centru de simetrie. Acesta este de fapt originea reperului canonic. Pentru a găsi relațiile ce conduc direct la centrul unei conice, efectuăm translația

$$x = x_0 + x', \quad y = y_0 + y'.$$

Ecuația conicei față de sistemul translatat în $C(x_0, y_0)$ va fi $g(x_0 + x', y_0 + y') = 0$. Aplicînd formula Taylor, această ecuație se transcrie

$$g(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}\left(x' \frac{\partial g}{\partial x_0} + y' \frac{\partial g}{\partial y_0}\right) + \frac{1}{2!}\left(x'^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x_0^2} + \right.$$

$$\left. + 2x'y' \frac{\partial^2 g}{\partial x_0 \partial y_0} + y'^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y_0^2}\right) = 0,$$

unde

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2a_{11}x + 2a_{12}y + 2a_{10}, \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = 2a_{21}x + 2a_{22}y + 2a_{20},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 2a_{11}, \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 2a_{12}, \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 2a_{22}.$$

Punctele (x', y') şi $(-x', -y')$ sînt simultan pe curba Γ dacă şi numai dacă punctul (x_0, y_0) satisface relaţiile

$$\frac{\partial g}{\partial x_0} = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \qquad \frac{\partial g}{\partial y_0} = \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

De aceea dacă conica Γ are centru, atunci coordonatele sale sînt în mod necesar soluţia sistemului

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial x} = a_{11}x + a_{12}y + a_{10} = 0 \\[2ex] \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial y} = a_{21}x + a_{22}y + a_{20} = 0. \end{cases}$$

Determinantul sistemului este

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad a_{12} = a_{21}.$$

Dacă $\delta \neq 0$, atunci sistemul are soluţie unică şi deci Γ admite centru de simetrie (cerc, elipsă, hiperbolă, pereche de drepte concurente, punct). În acest caz, *ecuaţia conicei redusă* la centru este $a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + g(x_0, y_0) = 0$.

Semnificaţia invariantului Δ. Ne propunem să determinăm constanta $g(x_0, y_0)$ pentru $\delta \neq 0$. Putem scrie $g(x_0, y_0) = x_0(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10}) + y_0(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20}) + a_{10}x_0 + a_{20}y_0 + a_{00} = 0$. Rezultă $g(x_0, y_0) = a_{10}x_0 + a_{20}y_0 + a_{00}$.

Sistemul

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10} = 0 \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20} = 0 \\ a_{10}x_0 + a_{20}y_0 + a_{00} - g(x_0, y_0) = 0, \end{cases}$$

de trei ecuaţii cu două necunoscute este compatibil dacă determinantul caracteristic este nul, adică

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & -a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & -a_{20} \\ a_{01} & a_{02} & -(a_{00} - g(x_0, y_0)) \end{vmatrix} = 0.$$

Acesta se mai poate scrie

$$-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ a_{01} & a_{02} & a_{00} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{01} & a_{02} & g(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0,$$

de unde $g(x_0, y_0) = \dfrac{\Delta}{\delta}$.

Astfel ecuaţia redusă la centru este

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

Dacă $\Delta = 0$, ecuaţia redusă devine

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 = 0.$$

În cazul $\delta < 0$, această ecuaţie reprezintă două drepte care trec prin centrul conicei. În cazul $\delta > 0$, ecuaţia reprezintă mulţimea $\{(0, 0)\}$. Prin urmare, dacă $\delta \neq 0$, $\Delta = 0$, conica este *degenerată* în două drepte sau într-un punct; dacă $\Delta \neq 0$, conica este nedegenerată (cerc, elipsă, hiperbolă, parabolă, mulţime vidă).

O b s e r v a ţ i i. 1) Conica pentru care $\delta > 0$ (elipsă, mulţime vidă) se numeşte de *gen eliptic*. Conica pentru care $\delta < 0$ (hiperbolă, pereche de drepte concurente) se numeşte de *gen hiperbolic*. Conica pentru care $\delta = 0$ (parabola, drepte paralele sau confundate, mulţimea vidă) se numeşte de *gen parabolic*.

2) Ecuaţia generală a unei conice, $g(x, y) = 0$, conţine şase coeficienţi a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{10}, a_{20}, a_{00} care se numesc *parametri neesenţiali*. Prin împărţire cu unul (diferit de zero) se obţin cinci coeficienţi care se numesc parametri esenţiali. De aceea pentru determinarea unei conice sînt suficiente cinci condiţii (de exemplu conica să treacă prin cinci puncte).

3) Dacă $a_{12} = 0$ şi $a_{11} = a_{22} = a \neq 0$ şi dacă $\left(\dfrac{a_{10}}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{a_{20}}{a}\right)^2 - \dfrac{a_{00}}{a} < 0$, atunci $\Gamma = \Phi$. Dacă $\left(\dfrac{a_{10}}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{a_{20}}{a}\right)^2 - \dfrac{a_{00}}{a} \geqslant 0$, atunci Γ este un cerc cu centrul în $C\left(-\dfrac{a_{10}}{a}, -\dfrac{a_{20}}{a}\right)$ şi de rază $r = \sqrt{\left(\dfrac{a_{10}}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{a_{20}}{a}\right)^2 - \dfrac{a_{00}}{a}}$.

§3. Reducerea la forma canonică

Fie conica

$$\Gamma : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0.$$

Pentru stabilirea ecuaţiei canonice avem în vedere următoarele situaţii

(i) Dacă $a_{12} = 0$, atunci se face o translaţie.

(ii) Dacă $a_{12} \neq 0$, atunci se face mai întîi o rotaţie. În acest caz se poate proceda fie ca în 3.1, fie ca în 3.2.

3.1. *Metoda valorilor proprii.* Tipul conicei de ecuaţie generală $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$ este determinat de expresia termenilor de gradul doi, adică de forma pătratică $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$. Matriceal această formă pătratică se scrie

$$[x \quad y]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad a_{12} = a_{21}.$$

Matricei simetrice $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ îi ataşăm ecuaţia caracteristică

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ sau } \lambda^2 - I\lambda + \delta = 0$$

ale cărei rădăcini λ_1 şi λ_2 sînt reale şi distincte. Dacă

1) λ_1 şi λ_2 au semne contrare, adică $\delta < 0$, conica este gen hiperbolic;
2) λ_1 şi λ_2 au acelaşi semn, adică $\delta > 0$, conica este gen eliptic;
3) una din rădăcini este zero, adică $\delta = 0$, conica este gen parabolic.

Sistemele

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_i)u_i + a_{12}v_i = 0 \\ a_{21}u_i + (a_{22} - \lambda_i)v_i = 0, \end{cases} \qquad i = 1, 2$$

dau coordonatele vectorilor proprii (u_1, v_1), respectiv (u_2, v_2) care sînt ortogonali. Vectorii proprii astfel găsiţi îi normăm şi-i notăm cu $\bar{e}_1$, respectiv $\bar{e}_2$.

Fie R matricea formată cu coordonatele versorilor $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ aşezate pe coloane; avînd în vedere posibilitatea înlocuirii unuia dintre versorii $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ prin opusul său sau posibilitatea renumerotării valorilor proprii, putem presupune $\det R = +1$. Rotaţia

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

reduce forma pătratică la forma diagonală $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$. Versorii proprii $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ dau direcţiile noilor axe Ox', respectiv Oy'.

Prin rotaţia efectuată, ecuaţia conicei devine

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + a'_{00} = 0.$$

Restrîngem pătratele şi efectuăm o translaţie

$$\lambda_1(x' + \ldots)^2 + \lambda_2(y' + \ldots)^2 + a = 0.$$

Dacă notăm $x'' = x' + \ldots, y'' = y' + \ldots$ obţinem ecuaţia canonică

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + a = 0.$$

Exemplu. Să se reducă ecuația

$$3x^2 - 4xy - 2x + 4y - 3 = 0$$

la forma canonică și să se construiască conica corespunzătoare.

Soluție. Matricea formei pătratice $3x^2 - 4xy$ este

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ecuația caracteristică a acestei matrice este

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{sau} \quad \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0.$$

Rădăcinile ecuației caracteristice sînt valorile proprii $\lambda_1 = -1$ și $\lambda_2 = 4$.

Coordonatele (u_1, v_1), ale vectorului propriu corespunzător lui $\lambda_1 = -1$, constituie soluția sistemului $4u_1 - 2v_1 = 0$, $-2u_1 + v_1 = 0$ adică $(k, 2k)$, $k \in \mathbb{R} - \{0\}$. Prin normalizare obținem versorul propriu $\bar{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. Analog pentru $\lambda_2 = 4$ găsim $\bar{e}_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Deoarece

$$\det R = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = -1 \text{ (rotație și simetrie)},$$

pentru a avea numai rotație folosim unul din următoarele procedee.

1) Renumerotăm $\lambda_1' = \lambda_2$, $\lambda_2' = \lambda_1$, de unde rezultă $\bar{e}_1' = \bar{e}_2$, $\bar{e}_2' = \bar{e}_1$. Rotația

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-x' + 2y') \end{cases}$$

conduce la $4x'^2 - y'^2 - \frac{8}{\sqrt{5}}x' + \frac{6}{\sqrt{5}}y' - 3 = 0$. Completăm pătratele în x' și y' și găsim $4\left(x' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(y' - \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 - 2 = 0$.

Efectuăm o translație a sistemului $x'Oy'$ în punctul $C_1\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$ dată de $x' = x'' + \frac{1}{\sqrt{5}}$, $y' = y'' + \frac{3}{\sqrt{5}}$. Obținem ecuația canonică a hiperbolei

$$\frac{x''^2}{\frac{1}{2}} - \frac{y''^2}{2} - 1 = 0$$

care are vîrfurile pe axa C_1x''.

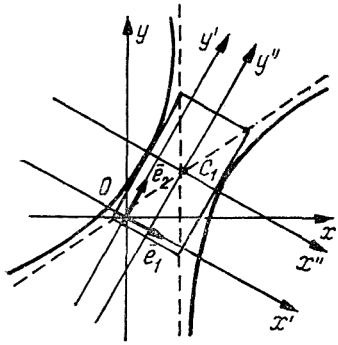


Fig. 45

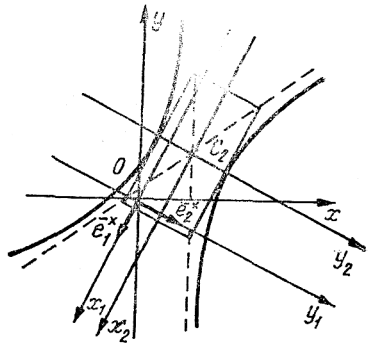


Fig. 46

Pentru construcţie efectuăm o rotaţie a sistemului de axe xOy. Noile axe de coordonate Ox', Oy' au direcţiile versorilor $\bar{e}_1'$, respectiv $\bar{e}_2'$ (fig. 45).

2) Întrucît orice direcţie în plan este caracterizată de perechi de numere reale proporţionale, convenim să luăm versorii $\bar{e}_1^* = -\bar{e}_1$, $\bar{e}_2^* = \bar{e}_2$. Rotaţia

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

conduce la ecuaţia $-x_1^2 + 4y_1^2 + \frac{6}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{8}{\sqrt{5}}y_1 - 3 = 0$. Direcţiile axelor de coordonate Ox_1, Oy_1 sînt determinate de versorii $\bar{e}_1^*$, respectiv $\bar{e}_2^*$. Sistemul rotit este translatat în $C_2\left(-\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, folosind formulele $x_1 = x_2 + \frac{3}{\sqrt{5}}$, $y_1 = y_2 - \frac{1}{\sqrt{5}}$. Obţinem forma canonică a hiperbolei

$$\frac{x_2^2}{2} - \frac{y_2^2}{\frac{1}{2}} + 1 = 0$$

raportată la sistemul canonic $x_2C_2y_2$ (fig. 46). Hiperbola are vîrfurile pe C_2y_2.

3.2. *Metoda roto-translaţiei.* Matricea de trecere, R fiind o matrice ortogonală, este matricea ataşată unei rototranslaţii în raport cu o bază ortonormată.

Teoremă. Dacă $a_{12} \neq 0$, atunci unghiul θ dat de ecuaţia $(a_{11} - a_{22}) \cdot \sin 2\theta = 2a_{12}\cos 2\theta$ determină o rotaţie în plan

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$$

astfel încît în ecuaţia $g'(x', y') = 0$ coeficientul produsului $x'y'$ se anulează.

Demonstrație. Observăm că după efectuarea rotației ecuația $g(x, y) = 0$ trece în $g'(x', y') = 0$. Coeficientul lui $x'y'$ din ultima ecuație este

$$2a'_{12} = (a_{22} - a_{11}) \sin 2\theta + 2a_{12} \cos 2\theta.$$

Astfel teorema devine evidentă.

Întrucît ecuația conicei obținută prin rotație nu conține termenul în $x'y'$, urmează să completăm pătratele dacă este cazul și în urma unei translații să obținem ecuația canonică.

Teoremele care se pot formula relativ la reducerea la forma canonică se rezumă prin tabelul 2.

Tabelul 2

Condiții			Curba	Ce transformare se face pentru a găsi ecuația canonică
$\Delta = 0$	$\delta > 0$		$\Gamma = \{(x_0, y_0)\}$	Dacă $a_{12} = 0$, atunci se face o translație. Dacă $a_{12} \neq 0$, atunci se face mai întîi rotația $\begin{cases} x = x' \cos\theta - y' \sin\theta \\ y = x' \sin\theta + y' \cos\theta \end{cases}$ unde θ este unghiul determinat de ecuația $(a_{11} - a_{22}) \sin 2\theta = 2a_{12} \cos 2\theta$. După aceea, dacă este cazul, se face o translație
	$\delta = 0$		$\Gamma = D_1 \cup D_2$, unde D_1 și D_2 sînt drepte paralele sau confundate, sau $\Gamma = \Phi$	
	$\delta < 0$		$\Gamma = D_1 \cup D_2$, unde D_1 și D_2 sînt drepte concurente. $I = 0 \Rightarrow D_1 \perp D_2$.	
$\Delta \neq 0$	$\delta > 0$	$I\Delta < 0$	elipsă	
		$I\Delta > 0$	$\Gamma = \Phi$	
	$\delta = 0$		parabolă	
	$\delta < 0$		hiperbolă $I = 0 \Rightarrow$ hiperbolă echilateră	

Exemplu. Să se stabilească natura și genul conicei

$$\Gamma : 9x^2 - 6xy + y^2 + 20x = 0.$$

Să se reducă ecuația la forma canonică folosind metoda roto-translației și să se construiască conica Γ.

Soluție. Calculăm invarianții

$$\Delta = \begin{vmatrix} 9 & -3 & 10 \\ -3 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -100, \qquad \delta = \begin{vmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Astfel Γ este o parabolă.

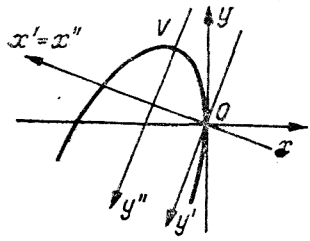


Fig. 47

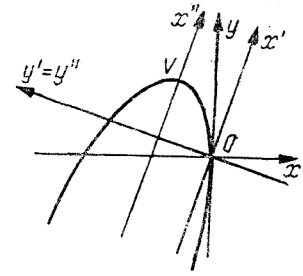


Fig. 48

Întrucît $a_{12} \neq 0$, efectuăm o rotație al cărei unghi θ este soluția ecuației $(a_{11} - a_{22}) \sin 2\theta - 2a_{12} \cos 2\theta = 0$. Pentru conica dată, ecuația devine $3\text{tg}^2\,\theta - 8\text{tg}\,\theta - 3 = 0$, cu soluțiile $\text{tg}\,\theta_1 = 3$, $\text{tg}\,\theta_2 = -\frac{1}{3}$.

Pentru $\text{tg}\,\theta_1 = 3$ obținem $\sin\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$ și $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$; formulele care dau rotația sistemului xOy sînt $x = \frac{1}{\sqrt{10}}(x' - 3y')$, $y = \frac{1}{\sqrt{10}}(3x' + y')$.

Față de sistemul rotit $x'Oy'$, ecuația conicei devine

$$y'^2 + \frac{2}{\sqrt{10}}x' - \frac{6}{\sqrt{10}}y' = 0.$$

Completăm pătratele și obținem $\left(y' - \frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 = \frac{9}{10} - \frac{2}{\sqrt{10}}x'$. Efectuăm translația, $x' = x''$, $y' = y'' + \frac{3}{\sqrt{10}}$ și găsim ecuația canonică a parabolei $y''^2 = -\frac{2}{\sqrt{10}}x'' + \frac{9}{10}$ (fig. 47).

Pentru $\text{tg}\,\theta_2 = -\frac{1}{3}$ obținem $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$ și $\cos\theta = -\frac{3}{\sqrt{10}}$. Ecuația conicei devine $x'^2 - \frac{6}{\sqrt{10}}x' + \frac{2}{\sqrt{10}}y' = 0$ prin rotația $x = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3x' - y')$, $y = \frac{1}{\sqrt{10}}(x' - 3y')$.

Completăm pătratele, efectuăm translația

$$x' = x'' + \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$y' = y''$$

și găsim ecuația canonică $x''^2 = \frac{2}{\sqrt{10}}y'' + \frac{9}{10}$ a parabolei (fig. 48) raportată la sistemul canonic obținut prin roto-translație.

§4. Intersecția dintre o dreaptă și o conică

Fie D o dreaptă de ecuații parametrice

$$x = x_0 + lt,\ y = y_0 + mt,\ t \in \mathbb{R},$$

și Γ o conică de ecuație carteziană implicită $g(x, y) = 0$. Intersecția $D \cap \Gamma$ corespunde rădăcinilor t_1 și t_2 în $\mathbb{R}$ ale ecuației

$$(1) \qquad t^2\varphi(l, m) + t\left(l\frac{\partial g}{\partial x_0} + m\frac{\partial g}{\partial y_0}\right) + g(x_0, y_0) = 0,$$

unde $\varphi(l, m) = a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2$. În cele ce urmează notăm $\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = g_{x_0}$, $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = g_{y_0}$.

Discuție. 1) Fie $\varphi(l, m) \neq 0$. Atunci ecuația (1) este de gradul doi. Dacă $q = (lg_{x_0} + mg_{y_0})^2 - 4\varphi(l, m)\, g(x_0, y_0) > 0$, atunci ecuația are două rădăcini reale și distincte t_1 și t_2. În acest caz D taie pe Γ în două puncte distincte P_1 și P_2. Dacă $q = 0$, atunci ecuația are două rădăcini reale confundate $t_1 = t_2$. În acest caz D taie pe Γ în două puncte confundate $P_1 = P_2$ și se numește *tangentă* la Γ în punctul P_1. Evident, din orice punct $P_0 \notin \Gamma$ se pot duce cel mult două tangente la Γ.

În particular, cînd $P_0 \in \Gamma$ și g_{x_0}, g_{y_0} nu se anulează simultan, observăm că tangenta la Γ în punctul P_0 are ecuația

$$(x - x_0)g_{x_0} + (y - y_0)g_{y_0} = 0.$$

Dreapta care trece prin $P_0(x_0, y_0) \in \Gamma$ și este perpendiculară pe tangentă se numește *normală*. Ea are ecuația

$$-(x - x_0)g_{y_0} + (y - y_0)g_{x_0} = 0.$$

Dacă $q < 0$, atunci ecuația (1) nu are soluții în $\mathbb{R}$ și deci D nu taie pe Γ.

2) Fie $\varphi(l, m) = 0$. Ecuația (1) este de gradul întîi. Dacă $lg_{x_0} + mg_{y_0} \neq 0$. atunci avem o soluție unică t_1 și deci D taie pe Γ într-un singur punct P_1. Dacă $lg_{x_0} + mg_{y_0} = 0$ și $g(x_0, y_0) \neq 0$, atunci ecuația (1) este o imposibilitate și deci D nu taie pe Γ. Dacă $lg_{x_0} + mg_{y_0} = 0$ și $g(x_0, y_0) = 0$, ecuația este identic satisfăcută și deci $D \subseteq \Gamma$.

Fie Γ o conică nedegenerată și $\bar{d}(l, m)$ o direcție în planul conicei.

4.1. *Definiție. Direcția $\bar{d}(l, m)$ se numește direcție asimptotică pentru Γ dacă*

$$\varphi(l, m) = a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0.$$

Evident o dreaptă care are o asemenea direcție taie conica nedegenerată într-un singur punct sau nu taie pe Γ.

Discuție. 1) Dacă $\delta < 0$, $\Delta \neq 0$ (hiperbolă), atunci ecuația $\varphi(l, m) = 0$ dă două direcții asimptotice distincte.

2) Dacă $\delta > 0$, $\Delta \neq 0$ (elipsă), atunci ecuația $\varphi(l, m) = 0$ nu admite soluții reale nebanale. De aceea elipsa nu admite direcții asimptotice.

3) Dacă $\delta = 0$, $\Delta \neq 0$ (parabolă), atunci ecuația $\varphi(l, m) = 0$ are o direcție asimptotică dublă care este de fapt direcția axei conicei.

4.2. *Definiție. O dreaptă D se numește asimptotă a unei conice nedegenerate Γ, dacă direcția ei este asimptotică și $D \cap \Gamma = \Phi$.*

Din ceea ce am prezentat mai sus, rezultă că este adevărată următoarea teoremă.

4.3. Teoremă. O asimptotă a conicei nedegenerate Γ este caracterizată analitic prin ecuația $lg_x + mg_y = 0$, unde (l, m) este o direcție asimptotică.

Discuție. 1) Hiperbola are două asimptote care trec prin centrul conicei.

2) Elipsa nu are direcție asimptotică și în consecință nu are asimptotă.

3) Parabola admite o direcție asimptotică pentru care ecuația $lg_x + mg_y = 0$ devine o imposibilitate. Deci parabola nu are asimptotă.

§5. Pol și polară

Fie $D: x = x_0 + lt,\ y = y_0 + mt,\ t \in \mathbb{R}$, o dreaptă orientată prin vectorul director $\bar{a} = l\bar{i} + m\bar{j}$ și P, Q două puncte ale acestei drepte.

5.1. *Definiție. Numărul* ρ_{PQ} *definit prin* $\overline{PQ} = \rho_{PQ}\dfrac{\bar{a}}{\|\bar{a}\|}$ *se numește mărimea relativă a segmentului* $[PQ]$.

Considerăm că pe dreapta D au fost fixate punctele $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$, $P(x, y)$, $P_2(x_2, y_2)$, corespunzătoare valorilor t_0, t_1, t, t_2 ale lui t (fig. 49, a).

5.2. *Definiție. Numărul*

$$[P_0, P; P_1, P_2] = \frac{\rho_{P_0P_1}}{\rho_{P_1P}} : \frac{\rho_{P_0P_2}}{\rho_{P_2P}} = \frac{t_1 - t_0}{t - t_1} : \frac{t_2 - t_0}{t - t_2},$$

se numește biraport al cuaternei ordonate de puncte (P_0, P_1, P, P_2).

Dacă $[P_0, P; P_1, P_2] = -1$, atunci biraportul se numește *armonic* și se spune că perechea de puncte P_0, P divide armonic perechea P_1, P_2 (sau invers). Diviziunea armonică este caracterizată prin

$$\frac{t_1 - t_0}{t - t_1} + \frac{t_2 - t_0}{t - t_2} = 0.$$

Dacă presupunem că punctul P_0 este luat drept origine pe D, adică $t_0 = 0$, atunci diviziunea armonică este caracterizată prin

$$\frac{2}{t} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}.$$

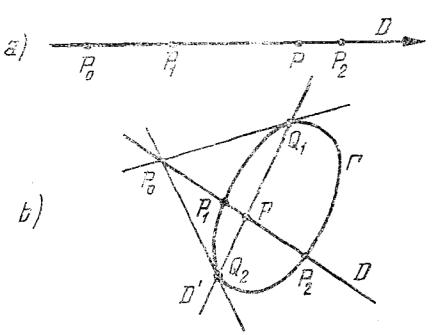


Fig. 49

Fie Γ o elipsă, hiperbolă sau parabolă. Dacă $P_0(x_0, y_0)$ este un punct dat, atunci fie $D: x = x_0 + lt,\ y = y_0 + mt,\ t \in \mathbb{R}$, o dreaptă care trece prin P_0 și care taie pe Γ în două puncte $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ (fig. 49, b).

5.3. Teoremă. Locul geometric al punctului P conjugatul armonic al

lui P_0 în raport cu P_1, P_2, atunci cînd direcția (l, m) a lui D variază, este o parte din dreapta D' de ecuație

$$a_{11}xx_0 + a_{12}(xy_0 + x_0y) + a_{22}yy_0 + a_{10}(x + x_0) + a_{20}(y + y_0) + a_{00} = 0.$$

Dreapta D' se numește *polara* punctului P_0 în raport cu conica Γ, iar punctul P_0 se numește *polul* dreptei D' în raport cu conica Γ.

Demonstrație. Prin ipoteză, intersectînd dreapta D cu conica Γ se obțin punctele P_1 și P_2 corespunzătoare valorilor t_1 și t_2 care sînt rădăcinile ecuației $t^2\varphi(l, m) + t(lg_{x_0} + mg_{y_0}) + g(x_0, y_0) = 0$. Pentru scurtarea demonstrației presupunem că $P_0 \notin \Gamma$. Din ecuația de mai sus, rezultă

$$\frac{t_1 + t_2}{t_1t_2} = -\frac{lg_{x_0} + mg_{y_0}}{g(x_0, y_0)}.$$

Pe de altă parte observăm că diviziunea armonică este caracterizată prin

$$\frac{2}{t} = \frac{t_1 + t_2}{t_1t_2}$$

și deci

$$\frac{2}{t} = \frac{lg_{x_0} + mg_{y_0}}{g(x_0, y_0)}.$$

Pentru a se obține ecuația carteziană a mulțimii care conține locul geometric căutat se elimină parametrii t, l, m între relația precedentă și ecuațiile dreptei D. Rezultă ecuația

$$(x - x_0)g_{x_0} + (y - y_0)g_{y_0} = -2g(x_0, y_0),$$

care este de fapt ecuația din teoremă.

Observăm că atunci cînd $P_0 \in \Gamma$, raționamentul anterior trebuie modificat. Din ecuația de mai sus se vede că în acest caz polara se confundă cu tangenta în P_0.

5.4. Observații. 1) Poziția polarei D' față de conica Γ depinde de poziția punctului P_0 față de Γ (sau invers). P_0 nu poate fi în centrul conicei deoarece în acest caz ecuația $(x - x_0)g_{x_0} + (y - y_0)g_{y_0} = -2g(x_0, y_0)$ este o imposibilitate.

2) Substituirile $x^2 \to xx_0$, $y^2 \to yy_0$, $xy \to \frac{1}{2}(xy_0 + x_0y)$, $x \to \frac{1}{2}(x + x_0)$, $y \to \frac{1}{2}(y + y_0)$ se numesc *dedublări*. Prin *dedublata ecuației de gradul doi* $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$ în punctul $P_0(x_0, y_0)$ înțelegem ecuația de gradul întîi $a_{11}xx_0 + a_{12}(xy_0 + x_0y) + a_{22}yy_0 + a_{10}(x + x_0) + a_{20}(y + y_0) + a_{00} = 0$. Ecuația polarei punctului P_0 (în particular ecuația tangentei în $P_0 \in \Gamma$) se obține prin dedublarea ecuației lui Γ.

3) Noțiunea de focar o presupunem cunoscută de la studiul conicelor pe ecuația redusă. Directoarea este polara focarului.

§6. Diametru conjugat cu o direcție dată

Fie conica Γ și o direcție $\bar{d}(l, m)$.

6.1. Teoremă. Locul geometric al mijloacelor corzilor conicei Γ paralele cu direcția $\bar{d}(l, m)$ este o parte din dreapta D'' de ecuație

$$lg_x + mg_y = 0.$$

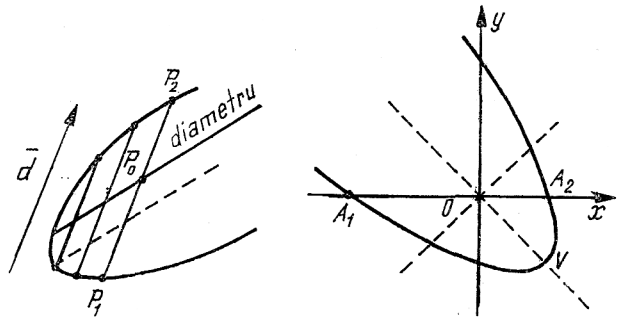


Fig. 50

Dreapta D'' se numește *diametrul lui* Γ *conjugat direcției* $\bar{d}(l, m)$.

Demonstrație. Dreapta care trece printr-un punct $P_0(x_0, y_0)$ și este paralelă cu $\bar{d}$ are ecuațiile $x = x_0 + lt$, $y = y_0 + mt$, $t \in \mathbb{R}$. Prin ipoteză această dreaptă taie conica Γ în două puncte $P_1(x_1 = x_0 + lt_1, y_1 = y_0 + mt_1)$ și $P_2(x_2 = x_0 + lt_2, y_2 = y_0 + mt_2)$, unde t_1 și t_2 sînt soluțiile ecuației $t^2\varphi(l, m) + t(lg_{x_0} + mg_{y_0}) + g(x_0, y_0) = 0$. Mijlocul segmentului $[P_1, P_2]$ (fig. 50) are coordonatele

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = x_0 + l\,\frac{t_1 + t_2}{2}, \quad \frac{y_1 + y_2}{2} = y_0 + m\,\frac{t_1 + t_2}{2}$$

și acest punct coincide cu P_0 dacă și numai dacă $t_1 + t_2 = 0$, adică $lg_{x_0} + mg_{y_0} = 0$. Deoarece P_0 este un mijloc arbitrar rezultă că teorema este adevărată.

Consecințe. 1) În ipoteza că $\delta \neq 0$ se observă că diametrii conjugați cu direcții arbitrare din plan formează un fascicul de drepte cu vîrful în centrul conicei.

2) Dacă $\delta = 0$ și $\Delta \neq 0$ (parabolă) atunci observăm că $g_x + \alpha = \beta g_y$ și ecuația diametrilor conjugați se reduce la ecuația unui fascicul de drepte paralele

$$g_x + \mu = 0.$$

Direcția acestui fascicul este $(a_{12}, -a_{11})$ sau $(a_{22}, -a_{12})$. Evident *axa de simetrie a parabolei* este un diametru și deci are direcția anterioară.

Observăm că direcției $(a_{12}, -a_{11})$ nu-i corespunde nici un diametru conjugat deoarece $a_{12}g_x - a_{11}g_y = 0$ este o imposibilitate.

3) Cazul conicelor cu dreaptă de centre se cercetează analog.

Să considerăm acum că Γ este o conică cu centru ($\delta \neq 0$) și să notăm cu (l_0, m_0) direcția diametrului de ecuație $lg_x + mg_y = 0$. Direcția (l_0, m_0) satisface relația

$$\frac{l_0}{la_{12} + ma_{22}} = \frac{m_0}{-(la_{11} + ma_{12})}$$

sau

$$a_{11}ll_0 + a_{12}(lm_0 + l_0m) + a_{22}mm_0 = 0 \tag{2}$$

care de fapt este dedublata relației $\varphi(l, m) = 0$. Reciproc, se poate arăta că direcția diametrului conjugat cu (l_0, m_0) este (l, m).

6.2. *Definiție. O pereche de diametri ale căror direcții sînt în relația (2) se numesc diametri conjugați unul altuia.*

§7. Direcții principale. Axele unei conice

Considerăm o conică Γ, o direcție $\bar{a}(l, m)$ și diametrul conjugat aceste direcții $lg_x + mg_y = 0$.

7.1. *Definiție. Direcția $\bar{d}(l, m)$ se numește direcție principală pentru conica Γ dacă este perpendiculară pe direcția diametrului $lg_x + mg_y = 0$.*

7.2. Teoremă. Diametrul conjugat unei direcții principale este o axă (de simetrie) a conicei. Invers, o direcție perpendiculară pe o axă este o irecție principală.

Demonstrație. Diametrul conjugat cu o direcție principală conține mijloacele corzilor conicei Γ, care sînt perpendiculare pe diametru. Astfel acest diametru este o axă de simetrie. Reciproca este evidentă.

În această problemă distingem două cazuri:

1) Dacă $\delta \neq 0$, atunci Γ poate să fie cerc, elipsă, hiperbolă sau pereche de drepte concurente. Axele reperului canonic sînt axe de simetrie. Notăm cu (l, m) și (l_0, m_0) direcțiile acestor axe și observăm că aceste direcții sînt perpendiculare, adică

$$ll_0 + mm_0 = 0.$$

Întrucît axele conțin doi diametri conjugați unul altuia, prin eliminarea lui (l_0, m_0) între ecuația precedentă și ecuația $a_{11}ll_0 + a_{12}(lm_0 + l_0m) + a_{22}mm_0 = 0$ deducem

$$(a_{11} - a_{22})ml + a_{12}(m^2 - l^2) = 0. \tag{3}$$

Ecuația (3) dă direcțiile axelor. Scriind ecuațiile diametrilor conjugați cu aceste direcții sau scriind ecuațiile dreptelor care trec prin centrul conicei Γ și au aceste direcții, obținem unul și același lucru și anume ecuațiile axelor.

Intersecțiile dintre Γ și axe se numesc *vîrfuri*.

2) Fie $\delta = 0$ și $\Delta \neq 0$ (parabolă). Anterior am văzut că direcția axei parabolei este $(a_{12}, -a_{11})$ sau $(a_{22}, -a_{21})$. Direcția perpendiculară pe axă

este (a_{11}, a_{12}) sau (a_{21}, a_{22}). De aici rezultă că ecuația axei parabolei este

$$a_{11}g_x + a_{12}g_y = 0 \text{ sau } a_{21}g_x + a_{22}g_y = 0$$

(diametru conjugat cu direcția (a_{11}, a_{12}) sau (a_{21}, a_{22})).

Intersecția dintre axă și parabolă se numește vîrf.

7.3. Observație. În ecuațiile anterioare, cel puțin unul dintre numerele l și m este diferit de zero. De aceea în exerciții, ecuațiile (2) și (3) se simplifică prin împărțire cu l sau cu m.

§8. Probleme

1. Sub influența unei forțe, punctul material M se mișcă pe cercul $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$. Acțiunea forței se întrerupe în momentul în care M a ajuns în poziția $(1, -2)$. Să se determine traiectoria pe care o va urma mai departe punctul material.

2. Se dau conicele $\Gamma_1: x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$, $\Gamma_2: x^2 - 2xy - y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$, $\Gamma_3: x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 4 = 0$. Să se calculeze invarianții, coordonatele centrului și dacă este cazul, să se scrie ecuația conicei redusă la centru sau ecuațiile dreptelor în care degenerează.

3. Să se reducă ecuațiile

$$5x^2 - 4xy + 2y^2 - 16x + 4y - 22 = 0,$$

$$11x^2 - 24xy + 4y^2 + 2x + 16y + 11 = 0,$$

$$x^2 - 2xy + y^2 - 4y + 6 = 0$$

la forma canonică și să se construiască conicele corespunzătoare.

4. Să se stabilească poziția dreptei D față de conica Γ:

$$1)\ 5x - y - 5 = 0,\ x^2 - 2xy - 3y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$$

$$2)\ x = 3 + t,\ y = -1 + 2t,\ x^2 - 2xy - 2y^2 + 7x + 6y + 132 = 0$$

$$3)\ x = 1 + 8t,\ y = 1 + 7t,\ x^2 + 2xy - 4y^2 + 3x - 2y = 0.$$

5. Să se scrie coordonatele polului axei Ox față de conica $\Gamma: x^2 - 2y^2 - 3x - 7y + 1 = 0$.

6. Să se scrie ecuația diametrului conjugat: (1) axei Ox, (2) axei Oy, (3) direcției $\vec{d}(1, -3)$ pentru conica $9x^2 + 6xy + y^2 - 5x - 7y - 4 = 0$. Să se scrie ecuația axei de simetrie a acestei conice.

7. Să se determine centrul, axele și vîrfurile conicei

$$\Gamma: 16x^2 + 4xy + 19y^2 + 4x - 22y - 5 = 0.$$

Capitolul 5

CUADRICE

§1. Sfera

Fie $\mathbb{E}_3$ un spaţiu punctual euclidian real tridimensional raportat la un reper cartezian $\{O\,;\,\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ şi punctele $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2$. Reamintim expresia distanţei

$$\mathrm{d}(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Fie $C(x_0, y_0, z_0)$ un punct fixat şi r un număr real strict pozitiv fixat. *Sfera S de centru C şi rază r* este mulţimea punctelor $M(x, y, z)$ cu proprietatea $\mathrm{d}(C, M) = r$ (fig. 51).

1.1. Teoremă. Punctul $M(x, y, z)$ aparţine sferei S de centru $C(x_0, y_0, z_0)$ şi raza r dacă şi numai dacă

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.$$

Demonstraţie. $M \in S \Leftrightarrow \mathrm{d}(C, M) = r \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = r \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$.

Astfel $S = \{M(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2\}$ sau mai scurt $S : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$. Ecuaţia $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se numeşte *ecuaţia carteziană implicită a sferei S de centru (x_0, y_0, z_0) şi rază r*. Această ecuaţie este echivalentă cu trei *ecuaţii parametrice* în $\mathbb{R}^3$ (fig. 52)

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos u \sin v \\ y = y_0 + r\sin u \sin v \\ z = z_0 + r\cos v, \ u \in [0, 2\pi], \ v \in [0, \pi], \ u, v = \text{parametrii} \end{cases}$$

sau cu ecuaţia $\bar{r} = \bar{r}_0 + r(\cos u \sin v\bar{i} + \sin u \sin v\bar{j} + \cos v\bar{k})$ în V_3.

Se observă că $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$ este un polinom de gradul doi în x, y, z, termenul de gradul doi fiind $x^2 + y^2 + z^2$. Aceasta sugerează să cercetăm mulţimea

$$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0.$$

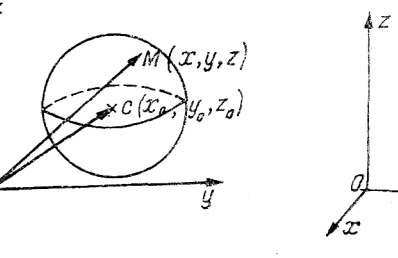


Fig. 51

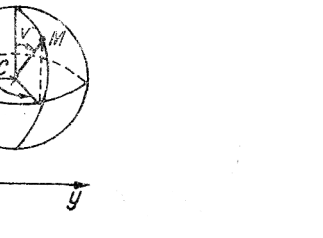


Fig. 52

Deoarece ecuația lui Σ se transcrie

$$(x+a)^2+(y+b)^2+(z+c)^2=a^2+b^2+c^2-d$$

rezultă:

1) dacă $a^2+b^2+c^2-d>0$, atunci Σ este o sferă cu centrul în $x_0=-a$, $y_0=-b$, $z_0=-c$ și de rază $r=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$;

2) dacă $a^2+b^2+c^2-d=0$, atunci $\Sigma=\{(-a,-b,-c)\}$;

3) dacă $a^2+b^2+c^2-d<0$, atunci $\Sigma=\Phi$.

Ecuația

$$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0,\ a^2+b^2+c^2-d>0,$$

$$(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,$$

se numește *ecuația carteziană generală a sferei*. Evident această ecuație este echivalentă cu

$$d(x^2+y^2+z^2)+2a_1x+2b_1y+2c_1z+d_1=0,\ d\neq 0,$$

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2-dd_1>0.$$

O sferă din spațiu este o mulțime mărginită și închisă, deci compactă. Ea are proprietatea că separă spațiul în două submulțimi disjuncte: *interiorul* lui S notat $\mathrm{int}(S)$ și *exteriorul* lui S notat $\mathrm{ext}(S)$. Acestea pot fi descrise cu ajutorul funcției

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ f(x,y,z)=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-r^2,$$

unde (x_0,y_0,z_0) este un punct fixat, iar $r>0$ este fixat. Într-adevăr (fig. 53) $\mathrm{int}(S)=\{(x,y,z)\,|\,f(x,y,z)<0\}$, $\mathrm{ext}(S)=\{(x,y,z)\,|\,f(x,y,z)>0\}$.

1.2. Teoremă. 1) Mulțimea $\mathrm{int}(S)$ este convexă; 2) $\forall M_1\in\mathrm{int}(S)$, $\forall M_2\in\mathrm{ext}(S)$, segmentul $[M_1M_2]$ taie pe S.

Demonstrație. Fără a scădea generalitatea putem presupune $x_0=y_0=z_0=0$. Fie $M_i(x_i,\ y_i,\ z_i)$, $i=1,2$, două puncte din spațiu. Segmentul $[M_1M_2]$ este caracterizat prin ecuațiile parametrice $x=(1-t)x_1+tx_2$, $y=(1-t)y_1+ty_2$, $z=(1-t)z_1+tz_2$, $t\in[0,1]$.

1) Dacă $M_1,\ M_2\in\mathrm{int}(S)$, adică $f(x_i,y_i,z_i)=x_i^2+y_i^2+z_i^2-r^2<0$, $i=1,2$, atunci

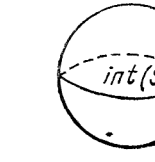


Fig. 53

$$f(x,y,z)=f[(1-t)x_1+tx_2,\ (1-t)y_1+ty_2,$$
$$(1-t)z_1+tz_2]=[(1-t)\,x_1+tx_2]^2+[(1-t)y_1+ty_2]^2+$$
$$+[(1-t)z_1+tz_2]^2-r^2\leqslant(1-t)f(x_1,y_1,z_1)+$$
$$+tf(x_2,y_2,z_2)<0,\ \forall t\in[0,1].$$

Cu alte cuvinte $[M_1M_2] \subset \operatorname{int}(S)$.

2) Fie $M_1 \in \operatorname{int}(S)$, adică $f(x_1, y_1, z_1) < 0$ şi $M_2 \in \operatorname{ext}(S)$, adică $f(x_2, y_2, z_2) > 0$. Rezultă funcţia continuă definită prin

$$\varphi(t) = f[(1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2, (1-t)z_1 + tz_2] =$$

$$= [(1-t)x_1 + tx_2]^2 + [(1-t)y_1 + ty_2]^2 + [(1-t)z_1 + tz_2]^2 - r^2,$$

$t \in [0, 1]$ cu proprietăţile $\varphi(0) = f(x_1, y_1, z_1) < 0$ şi $\varphi(1) = f(x_2, y_2, z_2) > 0$.

De aceea există o valoare $t_0 \in [0,1]$ astfel încît $0 = \varphi(0) = [(1-t_0)x_1 + t_0x_2]^2 + [(1-t_0)y_1 + t_0y_2]^2 + [(1-t_0)z_1 + t_0z_2]^2$ şi deci $((1-t_0)x_1 + t_0x_2, (1-t_0)y_1 + t_0y_2, (1-t_0)z_1 + t_0z_2) \in \Sigma$.

Numim *plan tangent* la sferă în punctul $M_1(x_1, y_1, z_1)$ locul geometric al tuturor tangentelor la sferă în punctul M_1 (fig. 54). Ecuaţia planului tangent în punctul $M_1 \in \Sigma$ se obţine prin dedublarea ecuaţiei sferei, adică

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) + (z - z_0)(z_1 - z_0) - r^2 = 0$$

sau

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 + a(x + x_1) + b(y + y_1) + c(z + z_1) + d = 0.$$

§2. Elipsoid, hiperboloid, paraboloid

2.1. *Definiţie. Cuadrica de ecuaţie*

$$\Sigma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \quad a, b, c > 0$$

se numeşte elipsoid.

Această suprafaţă este simetrică faţă de planele de coordonate, numite din acest motiv *plane principale* ale elipsoidului. Suprafaţa este simetrică şi faţă de axele de coordonate care se numesc *axele* suprafeţei. Rezultă că originea este centru de simetrie. Originea se numeşte *centrul* elipsoidului. Punctele în care axele înţeapă suprafaţa se numesc *vîrfuri*. Numerele a, b, c se numesc *semiaxe*. Intersecţiile dintre planele de coordonate şi elipsoid sînt respectiv următoarele elipse (fig. 55):

$$(1)\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad (2)\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad (3)\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0. \\ x = 0 \end{cases}$$

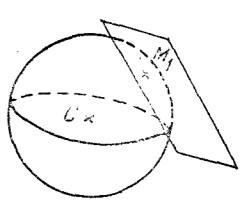


Fig. 54

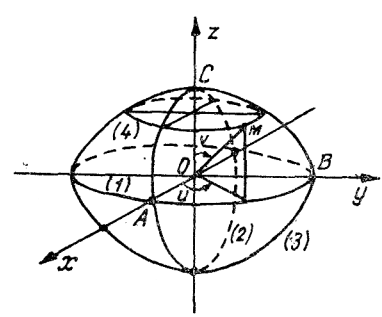


Fig. 55

Intersectînd elipsoidul cu plane paralele cu xOy, obţinem elipsele

$$(4)\begin{cases}\dfrac{x^2}{\dfrac{a^2}{c^2}(c^2-k^2)}+\dfrac{y^2}{\dfrac{b^2}{c^2}(c^2-k^2)}-1=0,\\ z=k \qquad\qquad k\in[-c,c]\end{cases}$$

care sînt asemenea cu elipsa (1).

2.2. Teoremă. Elipsoidul este o mulţime mărginită şi închisă (deci compactă) în spaţiu.

Demonstraţie. Din ecuaţia elipsoidului rezultă $\frac{x^2}{a^2}\leqslant 1$, $\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$, $\frac{z^2}{c^2}\leqslant$ $\leqslant 1$ sau $-a\leqslant x\leqslant a$, $-b\leqslant y\leqslant b$, $-c\leqslant z\leqslant c$. Astfel toate punctele elipsoidului sînt cuprinse în interiorul unui paralelipiped cu laturile de lungimi finite.

Elipsoidul Σ este o mulţime închisă în spaţiu deoarece $\{1\}$ este o mulţime închisă în $\mathbb{R}$, $\Sigma=g^{-1}(1)$, iar $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $g(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ este o funcţie continuă.

Ecuaţia carteziană implicită a elipsoidului $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ este echivalentă cu ecuaţiile parametrice

$$\begin{cases}x=a\cos u\ \sin v\\ y=b\sin u\ \sin v\\ z=c\cos v,\ u\in[0,2\pi],\ v\in[0,\pi],\ u,v=\text{parametrii (fig. 55).}\end{cases}$$

2.3. *Definiţie. Cuadrica de ecuaţie*

$$\Sigma:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0,\ a,b,c>0$$

se numeşte hiperboloid cu o pînză.

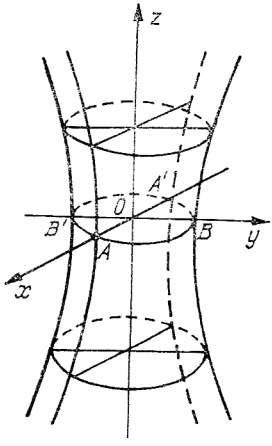


Fig. 56

Această suprafaţă are aceleaşi simetrii cu elipsoidul. Are patru vîrfuri. Intersecţiile lui Σ respectiv cu $x=0$ şi $y=0$ sînt hiperbolele

$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}-1=0,\\ x=0\end{cases}\qquad\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}-1=0.\\ y=0\end{cases}$$

Intersecţiile acestei suprafeţe cu planele $z=k$ sînt elipsele asemenea, reale oricare ar fi $k\in\mathbb{R}$ (fig. 56):

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{\dfrac{a^2}{c^2}(k^2+c^2)}+\dfrac{y^2}{\dfrac{b^2}{c^2}(k^2+c^2)}-1=0.\\ z=k\end{cases}$$

Se observă că hiperboloidul cu o pînză este o mulţime nemărginită şi închisă în spaţiu.

Cuadrica $\Sigma: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ se numeşte *conul asimptot* al hiperboloidului cu o pînză.

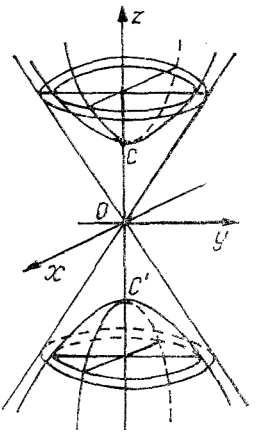


Fig. 57

2.4. *Definiţie. Cuadrica de ecuaţie*

$$\Sigma: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0,\ a, b, c>0$$

se numeşte hiperboloid cu două pînze.

Această suprafaţă are aceleaşi simetrii ca şi hiperboloidul cu o pînză. Are numai două vîrfuri situate pe axa Oz (fig. 57). Intersecţiile lui Σ cu planele $x=0$ şi $y=0$ sînt respectiv hiperbolele

$$\begin{cases}\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0,\\ x=0\end{cases}\qquad \begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0\\ y=0.\end{cases}$$

Observăm că în regiunea $-c<z<c$ nu avem puncte ale lui Σ. Intersecţia suprafeţei cu planele $z=k$, $|k|\geqslant c$, ne dă elipsele asemenea

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{\frac{a^2}{c^2}(k^2-c^2)}+\dfrac{y^2}{\frac{b^2}{c^2}(k^2-c^2)}-1=0\\ z=k.\end{cases}$$

Hiperboloidul cu două pînze este o mulţime nemărginită şi închisă în spaţiu.

Cuadrica $\Sigma: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ se numeşte *conul asimptot al hiperboloidului.*

2.5. *Definiţie. Cuadrica de ecuaţie*

$$\Sigma: z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2},\quad a, b>0$$

se numeşte paraboloid eliptic.

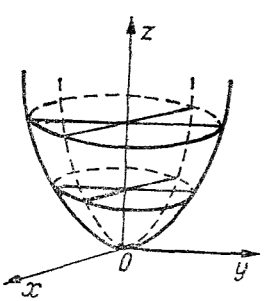


Fig. 58

Planele de simetrie $x=0$ şi $y=0$ se numesc plane principale. Oz este axă de simetrie (axă principală) şi înţeapă suprafaţa în origine. Acest punct se numeşte *vîrf* (fig. 58). Intersecţiile suprafeţei cu planele $x=0$ şi $y=0$ sînt respectiv parabolele

$$\begin{cases}z=\frac{y^2}{b^2},\\ x=0\end{cases}\qquad \begin{cases}z=\frac{x^2}{a^2}\\ y=0\end{cases}$$

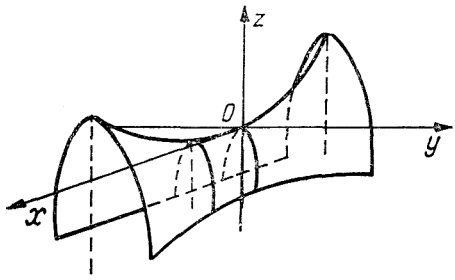


Fig. 59

și de aceea Σ este nemărginită. Evident suprafața există numai pentru $z \geqslant 0$. Dacă tăiem suprafața Σ cu planele $z = k (k > 0)$, atunci se obțin elipsele

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = k \\ z = k. \end{cases}$$

Paraboloidul eliptic este o mulțime închisă în spațiu.

2.6. *Definiție. Cuadrica de ecuație*

$$\Sigma : z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

se numește paraboloid hiperbolic sau șa.

Această suprafață are aceleași simetrii ca și suprafața anterioară. Originea este vîrf al suprafeței (fig. 59). Intersecția suprafeței cu planul $x = 0$ dă parabola

$$\begin{cases} z = -\dfrac{y^2}{b^2} \\ x = 0 \end{cases}$$

care are concavitatea înspre sensul negativ al axei Oz. Intersecția suprafeței cu planul $y = 0$ dă parabola

$$\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2} \\ y = 0 \end{cases}$$

care are axa de simetrie Oz și este dirijată în sensul pozitiv al acestei axe

Intersectăm suprafața cu planele $z = k (k > 0)$ și obținem hiperbolele

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = k \\ z = k \end{cases}$$

care au axa transversă paralelă cu Ox.

Intersectăm suprafața cu planele $z = k (k < 0)$ și obținem hiperbolele

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = k \\ z = k \end{cases}$$

care au axa netransversă paralelă cu Ox.

Ca mulțime, șaua este nemărginită și închisă.

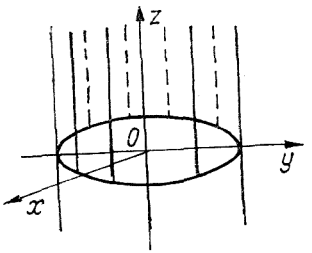


Fig. 60

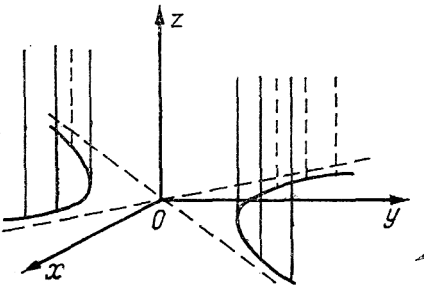


Fig. 61

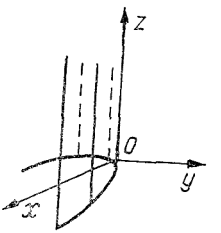


Fig. 62

Cuadrica de ecuaţie $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ se numeşte *cilindru eliptic* (fig. 60).

Cuadrica de ecuaţie $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$ se numeşte *cilindru hiperbolic* (fig. 61).

Cuadrica de ecuaţie $y^2=2px$ se numeşte *cilindru parabolic* (fig. 62).

Pereche de plane concurente $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$; *pereche de plane paralele* $x^2-a^2=0$; *pereche de plane confundate* $x^2=0$.

Dreaptă $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$; *punct* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$; *mulţimea vidă* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0$ sau $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$ sau $x^2+a^2=0$.

Elipsoizii, hiperboloizii şi paraboloizii se numesc *cuadrice nedegenerate*.

Hiperboloidul cu o pînză şi paraboloidul hiperbolic sînt *suprafeţe riglate* deoarece pot fi generate prin mişcarea unei drepte. Această dreaptă face parte dintr-o familie de *generatoare rectilinii*, fiecare dintre suprafeţele menţionate admiţînd două familii de generatoare rectilinii, de ecuaţii

$$D_\lambda:\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right) \text{ pentru } \frac{x}{a}-\frac{z}{c}\neq 0, 1+\frac{y}{b}\neq 0\\ \lambda\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=1-\frac{y}{b}\end{cases} \quad \text{şi } D_\infty:\begin{cases}\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0\\ 1+\frac{y}{b}=0\end{cases}$$

$$D_\mu:\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\mu\left(1-\frac{y}{b}\right) \text{ pentru } \frac{x}{a}-\frac{z}{c}\neq 0, 1-\frac{y}{b}\neq 0\\ \mu\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=1+\frac{y}{b}\end{cases} \quad \text{şi } D_\infty:\begin{cases}\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0\\ 1-\frac{y}{b}=0\end{cases}$$

respectiv

$$D_\lambda : \begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = \lambda z \\ \lambda\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) = 1 \end{cases} \quad \text{pentru } z \neq 0, \ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \neq 0 \text{ şi } D_\infty : \begin{cases} z = 0 \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 0 \end{cases}$$

$$D_\mu : \begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = \mu z \\ \mu\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) = 1 \end{cases} \quad \text{pentru } z \neq 0 \ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \neq 0 \text{ şi } D_\infty : \begin{cases} z = 0 \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 0. \end{cases}$$

§3. Cuadrice

În $\mathbb{E}_3$ considerăm reperul cartezian $\{O\,;\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ şi forma pătratică afină $g : \mathbb{E}_3 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$g(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{10}x +$$

$$+ 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00},$$

$$a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 \neq 0.$$

3.1. *Definiţie. Mulţimea de nivel constant zero*

$$\Sigma = g^{-1}(0) = \{M(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ g(x, y, z) = 0\},$$

se numeşte cuadrică sau suprafaţă algebrică de ordinul al doilea. Se notează $\Sigma : g(x, y, z) = 0$.

Din punct de vedere topologic, cuadricele sînt mulţimi închise în spaţiu deoarece $\{0\}$ este o mulţime închisă în $\mathbb{R}$, $\Sigma = g^{-1}(0)$ şi g este o funcţie continuă.

Prin trecerea de la reperul cartezian $\{O\,;\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ la un reper cartezian adecvat orientat pozitiv (numit *reper canonic* sau *natural*) faţă de care ecuaţia $g(x, y, z) = 0$ să aibă forma cea mai simplă posibilă (numită *ecuaţie redusă* sau *canonică*), se dovedeşte că Σ este congruentă cu una din mulţimile: sferă, elipsoid, hiperboloid cu o pînză, hiperboloid cu două pînze, paraboloid eliptic, paraboloid hiperbolic, con, cilindru circular, cilindru eliptic, cilindru hiperbolic, cilindru parabolic, pereche de drepte secante, pereche de plane paralele, pereche de plane confundate, dreaptă, mulţime care conţine un singur punct, mulţime vidă.

Faţă de roto-translaţii, ecuaţia $g(x, y, z) = 0$ are următorii invarianţi

$$\Delta = \det \bar{A}, \ \delta = \det A, \ J = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$I = \operatorname{tr} A,$$

unde

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{20} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{30} \\ a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{00} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} a_{ij} = a_{ji}, \ i \neq j \\ i, j = 0, 1, 2, 3. \end{matrix}$$

Felul cuadricei se poate stabili cu ajutorul invarianților.

De exemplu

Δ	Natura cuadricei
$\Delta = 0$	degenerată
$\Delta \neq 0$	nedegenerată

Dintre cuadricele nevide, sfera, elipsoidul, hiperboloizii și paraboloizii sînt cuadrice nedegenerate; conul, cilindrii și perechile de plane se numesc cuadrice degenerate.

Sfera este o cuadrică în care $a_{11} = a_{22} = a_{33} = m \neq 0$, $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$ și $\left(\frac{a_{10}}{m}\right)^2 + \left(\frac{a_{20}}{m}\right)^2 + \left(\frac{a_{30}}{m}\right)^2 - \frac{a_{00}}{m} \geqslant 0$. Centrul sferei este $\left(-\frac{a_{10}}{m}, -\frac{a_{20}}{m}, -\frac{a_{30}}{m}\right)$ și raza sferei $r = \sqrt{\left(\frac{a_{10}}{m}\right)^2 + \left(\frac{a_{20}}{m}\right)^2 + \left(\frac{a_{30}}{m}\right)^2 - \frac{a_{00}}{m}}$.

3.2. *Centrul cuadricei.* Analog cu conicele, coordonatele centrului unei cuadrice constituie soluția sistemului liniar

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial x} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{10} = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial y} = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{20} = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial z} = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{30} = 0.$$

Pot interveni următoarele situații:

1) Dacă $\det A = \delta \neq 0$, sistemul liniar este compatibil unic determinat, deci cele trei plane $a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z + a_{i0} = 0$, $i = 1, 2, 3$ se intersectează într-un punct unic; prin urmare cuadrica admite un singur centru la distanță finită. Este cazul sferei, elipsoidului, hiperboloidului cu o pînză, hiperboloidului cu două pînze și conului.

2) Dacă $\delta = 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ și unicul determinant caracteristic al sistemului este nenul, sistemul este incompatibil. Cele trei plane formează o prismă triunghiulară. Este cazul paraboloidului eliptic și paraboloidului hiperbolic.

3) Dacă $\delta = 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ și unicul determinant caracteristic este nul, sistemul liniar este compatibil simplu nedeterminat.

Cele trei plane se intersectează după o dreaptă numită *dreaptă de centre*. Este cazul cilindrilor circulari, eliptici și hiperbolici.

4) Dacă $\delta = 0$ și rangul sistemului este unu și cei doi determinanți caracteristici nu sînt nuli, sistemul este incompatibil. Planele sînt paralele. Este cazul cilindrului parabolic.

5) Dacă $\delta = 0$, rangul sistemului este unu și cei doi determinanți caracteristici sînt nuli, atunci sistemul este compatibil dublu nedeterminat. Cele trei plane sînt confundate. Cuadrica are un plan de centre. Este cazul planelor paralele distincte sau confundate.

Exemplu. Cuadrica Σ conține punctele $A(-1, 2, 3)$, $B(1, 1, -1)$, trece prin axa Oy și prin cercul Γ care are centrul în ω $(0, 0, 3)$ și este tangent axei Ox în origine.

Să se scrie ecuația cuadricei Σ, să se calculeze invarianții ei și coordonatele centrului.

Soluție. Cercul Γ se află în planul xOz și are ecuațiile $x^2 + z^2 - 6z = 0$, $y = 0$.

Ecuația cuadricei Σ este de forma

$$x^2 + z^2 - 6z + y(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta) = 0$$

întrucît intersecția acestei suprafețe cu planul xOz este cercul Γ.

Deoarece cuadrica Σ conține axa Oy, ecuația ei devine identitate pentru $x = 0$, $z = 0$. Rezultă $\beta = \delta = 0$.

Din condițiile $A \in \Sigma$, $B \in \Sigma$, rezultă sistemul $\alpha - 3\gamma = 4$, $\alpha + \gamma = 8$, cu soluția $\alpha = 7$, $\gamma = 1$.

Deci $\Sigma : x^2 + z^2 + 7xy + yz - 6z = 0$.

Invarianții cuadricei sînt

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} 1 & \frac{7}{2} & 0 & 0 \\ \frac{7}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \frac{441}{4} \text{ (cuadrică nedegenerată)},$$

$$\delta = -\frac{25}{2} \text{ (cuadrică cu centru)}, \quad J = -\frac{23}{2}, \quad I = 2.$$

Coordonatele centrului sînt $\left(-\frac{21}{50}, \frac{3}{25}, \frac{147}{50}\right)$, ca soluție a sistemului $x + \frac{7}{2} y = 0$, $\frac{7}{2} x + \frac{1}{2} z = 0$, $\frac{1}{2} y + z - 3 = 0$.

§4. Reducerea la forma canonică

Pentru stabilirea ecuației canonice a unei cuadrice se poate proceda astfel

(i) Dacă $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$, se face o translație.

(ii) Dacă cel puţin unul din numerele a_{12}, a_{13}, a_{23} este nenul,atunci tipul cuadricei de ecuaţie

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{10}x +$$

$$+ 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00} = 0$$

este determinat de expresia termenilor de gradul doi, adică de forma pătratică

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz.$$

Matriceal această formă pătratică se scrie

$$[x \;\; y \;\; z] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad a_{12} = a_{21}, \; a_{13} = a_{31}, \; a_{23} = a_{32}$$

sau $[x\, y\, z]\, A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, A fiind o matrice simetrică.

Pentru matricea A se determină valorile proprii λ_1, λ_2, λ_3 şi vectorii proprii corespunzători care sînt ortogonali. Prin normare obţinem versorii $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$. Se notează cu R matricea formată cu coordonatele versorilor $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ aşezate pe coloane; avînd în vedere posibilitatea înlocuirii unuia dintre versorii $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ prin opusul său sau posibilitatea renumerotării valorilor proprii, putem presupune det $R = +1$.

Rotaţia

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

reduce forma pătratică la forma diagonală $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2$.

Direcţiile noilor axe de coordonate sînt date de direcţiile versorilor proprii $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, respectiv $\bar{e}_3$.

În final, dacă este cazul, se face o translaţie.

Exemplu. Să se reducă ecuaţia

$$x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy + 2xz - 2yz - 4x + 8y - 12z + 14 = 0$$

la forma canonică şi să se construiască cuadrica corespunzătoare.

Soluţie. Matricea formei pătratice $x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy + 2xz - 2yz$ este

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Valorile proprii ale matricei sînt soluţiile ecuaţiei

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 1 \\ -3 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Obţinem valorile proprii reale şi distincte $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$.

Coordonatele (u, v, w), ale vectorului propriu corespunzător valorii proprii λ, sînt soluţiie sistemului

$$\begin{cases} (1-\lambda)u - 3v + w = 0 \\ -3u + (1-\lambda)v - w = 0 \\ u - v + (5-\lambda)w = 0. \end{cases}$$

Pentru $\lambda = -2$, sistemul are soluţia $u = k$, $v = k$, $w = 0$; normalizăm şi obţinem versorul propriu $\bar{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

Pentru $\lambda_2 = 3$, sistemul are soluţia $(-k, k, k)$; prin normalizare obţinem versorul $\bar{e}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; procedăm analog pentru $\lambda_3 = 6$ şi obţinem $\bar{e}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

Matricea ortogonală ale cărei coloane sînt coordonatele versorilor proprii

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

are determinantul 1.

Prin rotaţia

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \text{ sau } \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} x' - \frac{1}{\sqrt{3}} y' + \frac{1}{\sqrt{6}} z' \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{3}} y' - \frac{1}{\sqrt{6}} z' \\ z = \frac{1}{\sqrt{3}} y' + \frac{2}{\sqrt{6}} z' \end{cases}$$

ecuaţia carteziană devine

$$-2x'^2 + 3y'^2 + 6z'^2 + \frac{4}{\sqrt{2}} x' - \frac{36}{\sqrt{6}} z' + 14 = 0.$$

Completăm pătratele în x', y', z' și obținem

$$-2\left(x'-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+3y'^2+6\left(z'-\frac{3}{\sqrt{6}}\right)^2+6=0.$$

Efectuăm translația $x'=\frac{1}{\sqrt{2}}+x''$, $y'=y''$, $z'=\frac{3}{\sqrt{6}}+z''$ și obținem ecuația canonică a hiperboloidului cu două pînze

$$-\frac{x''^2}{3}+\frac{y''^2}{2}+\frac{z''^2}{1}+1=0$$

ale cărui vîrfuri se află pe axa absciselor Cx'' (fig. 63).

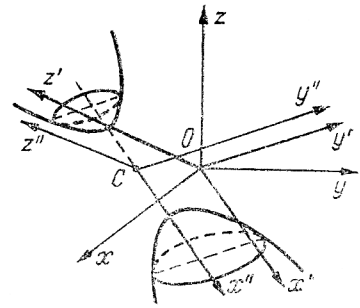


Fig. 63

§5. Intersecția dintre o dreaptă și o cuadrică

Fie D o dreaptă de ecuații

$$x=x_0+lt,\ y=y_0+mt,\ z=z_0+nt,\ t\in\mathbb{R}$$

și Σ o cuadrică de ecuație $g(x,y,z)=0$. Intersecția $D\cap\Sigma$ corespunde rădăcinilor t_1 și t_2 ale ecuației în $\mathbb{R}$,

(1) $t^2\varphi(l,m,n)+t(lg_{x_0}+mg_{y_0}+ng_{z_0})+g(x_0,y_0,z_0)=0,$

unde $\varphi(l,m,n)=a_{11}l^2+a_{22}m^2+a_{33}n^2+2a_{12}lm+2a_{13}ln+2a_{23}mn,$

iar $g_{x_0}=g_x(x_0,y_0,z_0)$ etc. . . .

Discuție. 1) Fie $\varphi(l,m,n)\neq 0$. În acest caz ecuația (1) este o ecuație de gradul doi. Dacă $q=(lg_{x_0}+mg_{y_0}+ng_{z_0})^2-\varphi(l,m,n)g(x_0,y_0,z_0)>0$, atunci ecuația are două rădăcini reale distincte t_1 și t_2. Astfel dreapta D intersectează cuadrica Σ în două puncte M_1, M_2. Dacă $q=0$, atunci $t_1=t_2$; corespunzător, D va intersecta pe Σ în două puncte confundate. În acest caz dreapta D se numește tangentă la Σ. Dacă $q<0$, atunci ecuația (1) nu are rădăcini și deci D nu intersectează pe Σ.

2) Fie $\varphi(l,m,n)=0$. Atunci ecuația (1) devine o ecuație de gradul întîi. Dacă $lg_{x_0}+mg_{y_0}+ng_{z_0}\neq 0$, atunci există o soluție unică și deci D intersectează cuadrica Σ într-un singur punct. Dacă $lg_{x_0}+mg_{y_0}+ng_{z_0}=0$ și $g(x_0,y_0,z_0)\neq 0$, atunci relația (1) este o imposibilitate. În aceste condiții D nu intersectează cuadrica Σ. Dacă $lg_{x_0}+mg_{y_0}+ng_{z_0}=0$ și $g(x_0,y_0,z_0)=0$, atunci (1) este o identitate și astfel $D\subset\Sigma$.

Fie Σ o cuadrică dată prin ecuația $g(x,y,z)=0$ și $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma$ un punct în care cel puțin unul dintre numerele g_{x_0}, g_{y_0}, g_{z_0} este diferit de zero.

5.1. Teoremă. O dreaptă D de parametrii directori (l,m,n) este tangentă la o cuadrică Σ în punctul $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma$ dacă și numai dacă

$$lg_{x_0}+mg_{y_0}+ng_{z_0}=0.$$

Demonstrație. Intersecția dintre dreapta $D: x=x_0+lt,\ y=y_0+mt,\ z=z_0+nt,\ t\in\mathbb{R}$ și cuadrica Σ corespunde la rădăcinile t_1 și t_2 ale ecuației (1).

Deoarece $M_0 \in \Sigma$, avem $g(x_0, y_0, z_0) = 0$. Ecuaţia (1) va avea rădăcina dublă $t = 0$ dacă şi numai dacă $lg_{x_0} + mg_{y_0} + ng_{z_0} = 0$.

5.2. Teoremă. Locul geometric al tuturor tangentelor la cuadrica Σ în punctul M_0 este planul de ecuaţie

$$(x - x_0)g_{x_0} + (y - y_0)g_{y_0} + (z - z_0)g_{z_0} = 0.$$

Acest plan se numeşte *planul tangent* la cuadrica Σ în punctul $M_0 \in \Sigma$.

Demonstraţie. Dreapta D este tangentă în M_0 la Σ dacă şi numai dacă $lg_{x_0} + mg_{y_0} + ng_{z_0} = 0$. Eliminînd parametrii l, m, n, t, găsim

$$(x - x_0)g_{x_0} + (y - y_0)g_{y_0} + (z - z_0)g_{z_0} = 0.$$

Menţionăm că ecuaţia planului tangent într-un punct $M_0 \in \Sigma$ se poate obţine şi prin dedublarea ecuaţiei $g(x, y, z) = 0$ în punctul M_0.

Dreapta care trece prin M_0 şi este perpendiculară pe planul tangent se numeşte *normală* şi are ecuaţiile:

$$\frac{x - x_0}{g_{x_0}} = \frac{y - y_0}{g_{y_0}} = \frac{z - z_0}{g_{z_0}}.$$

§6. Intersecţia dintre un plan şi o cuadrică

Intersecţia dintre un plan P şi o cuadrică Σ se obţine rezolvînd sistemul

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0, \ a^2 + b^2 + c^2 \neq 0, \\ g(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

În ipoteza că $c \neq 0$, din ecuaţia planului obţinem pe z şi înlocuim în $g(x, y, z) = 0$. Astfel găsim că intersecţia $P \cap \Sigma$ este o *mulţime de puncte din planul P caracterizată printr-o ecuaţie de forma*

$$a'_{11}x^2 + 2a'_{12}xy + a'_{22}y^2 + 2a'_{10}x + 2a'_{20}y + a'_{00} = 0.$$

Deci $P \cap \Sigma$ este o conică.

§7. Probleme

1. Să se scrie ecuaţia sferei care

1) are centrul în $C(2, 0, 3)$ şi este tangentă planului $3x + \sqrt{2}y + 4z - 45 = 0$;

2) trece prin punctele $A(-1, 0, 0)$, $B(0, 2, 1)$, $C(0, -1, -1)$, $D(3, 1, -1)$;

3) are centrul în $C(1, -2, 1)$ şi este tangentă interior sferei $\Sigma_1: x^2 + y^2 + z^2 - x - 3y + 3z - 2 = 0$.

2. Să se determine coordonatele centrului cuadricei $x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy + 2xz - 2yz - 4x + 8y - 12z + 14 = 0$; să se efectueze o translaţie în centrul cuadricei şi să se scrie ecuaţia cuadricei raportată la noul sistem translatat $Ox'y'z'$.

3. Să se reducă la forma canonică,

$$2y^2 + 4xy - 8xz - 4yz + 6x - 5 = 0;$$

$$2y^2 - 7z^2 + 112x - 16y - 14z - 87 = 0;$$

$$xy + z^2 - 2 = 0.$$

4. Să se calculeze distanța dintre punctele de intersecție ale dreptei $D: x = t,\ y = 2 - t,\ z = -3 + 2t$ cu cuadrica $x^2 - y^2 + z^2 - 4y + 6z + 9 = 0$.

5. Fiind dat hiperboloidul cu o pînză $\Sigma: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 - 1 = 0$ și planul $P: 4x - 3y - 12z - 6 = 0$, se cere să se studieze curba $P \cap \Sigma$ folosind proiecțiile acestei curbe pe planele de coordonate.

6. Fiind dat paraboloidul hiperbolic $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = z$ și punctul $M_0(0, 2, -1)$, să se scrie ecuațiile generatoarelor rectilinii care trec prin M_0 și să se calculeze măsura unghiului dintre aceste generatoare.

7. Să se arate că planul $6x + 3y - 2z + 6 = 0$ intersectează hiperboloidul cu o pînză $x^2 - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - 1 = 0$ după două generatoare ale căror ecuații se cer.

Capitolul 6

COORDONATE POLARE ȘI SEMIPOLARE

§1. Coordonate polare

Presupunem că spațiul $\mathbb{E}_2$ este raportat la un reper cartezian xOy. Orice punct $M \in \mathbb{E}_2$ este unic determinat de coordonatele sale carteziene (x, y).

Poziția unui punct $M \in \mathbb{E}_2 - \{O\}$ mai poate fi caracterizată și prin coordonatele polare (ρ, θ). Un sistem de coordonate polare în plan se definește printr-un punct O, numit *pol* și printr-o axă Ox, numită *axă polară* (fig. 64). Coordonata ρ este distanța de la pol la punctul considerat M; coordonata θ este unghiul pe care-l face direcția pozitivă a axei polare cu semidreapta OM.

Între coordonatele polare (ρ, θ) și coordonatele carteziene (x, y) ale punctului M există relațiile

$$x = \rho \cos \theta$$

$$x = \rho \sin \theta.$$

Dacă impunem $\rho > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$, atunci relațiile anterioare asigură corespondența biunivocă între mulțimea $\mathbb{R}^2 - \{O\}$ și mulțimea $(0, \infty) \times [0, 2\pi)$.

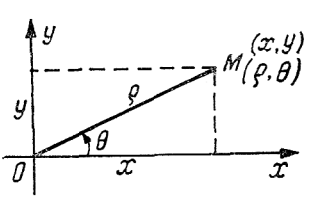


Fig. 64

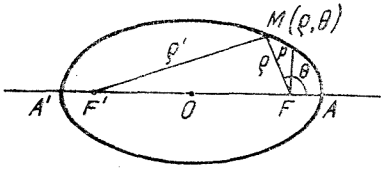


Fig. 65

Aplicaţie. Ecuaţia conicelor în coordonate polare. Raportăm elipsa la un reper polar, al cărui pol coincide cu focarul F, axa polară coincide cu axa mare a elipsei şi are sensul pozitiv de la F la cel mai apropiat vîrf, adică A.

Un punct oarecare M al elipsei (fig. 65) are coordonatele polare (ρ, θ).

Stabilim ecuaţia elipsei în coordonate polare, aplicînd teorema cosinusului în triunghiul MFF', ţinînd seama de relaţia ce defineşte elipsa ca oc geometric şi avînd în vedere că excentricitatea e are valoarea $e = \frac{c}{a}$, unde $e \in (0,1)$:

$$\rho'^2 = \rho^2 + 4c^2 - 4c\rho \cos(\pi - \theta)$$

sau

$$(2a - \rho)^2 = \rho^2 + 4c^2 + 4c\rho \cos \theta.$$

Luăm $c = ea$, $p = a(1 - e^2)$ şi obţinem

$$\rho = p(1 + e\cos\theta)^{-1}.$$

Pentru hiperbolă luăm ca pol focarul corespunzător ramurii de hiperbolă a cărei ecuaţie vrem să o scriem în coordonate polare (fig. 66).

Ţinînd seama că parametrul p este $p = a(e^2 - 1)$ şi $e = \frac{c}{a}$, $e > 1$, obţinem aceeaşi ecuaţie în coordonate polare.

Pentru $e = 1$, obţinem ecuaţia parabolei.

§2. Coordonate cilindrice

Presupunem că spaţiul $\mathbb{E}_3$ este raportat la un reper cartezian $Oxyz$. Orice punct $M \in \mathbb{E}_3$ este unic determinat de coordonatele sale carteziene (x, y, z).

Fie $\mathbb{E}_3^* = \mathbb{E}_3$ — axa Oz. Poziţia unui punct $M \in \mathbb{E}_3^*$ poate fi caracterizată şi prin tripletul ordonat (ρ, θ, z), unde ρ este distanţa de la origine la proiecţia M' a punctului M în planul xOy, iar θ este unghiul dintre semidreptele Ox şi OM' (fig. 67).

Numerele ρ, θ, z se numesc *coordonatele cilindrice* ale punctului M sau coordonate semipolare în spaţiu. Între coordonatele cilindrice şi coordona-

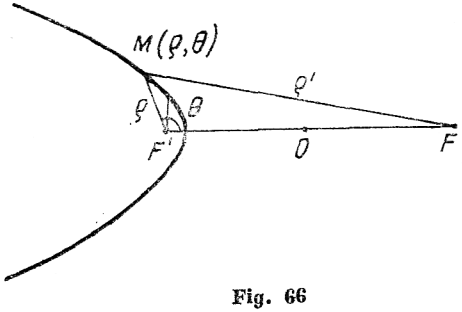


Fig. 66

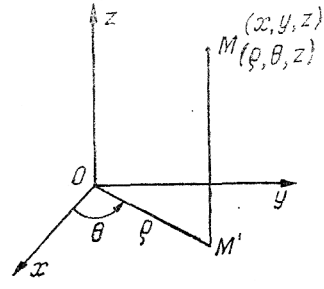


Fig. 67

tele carteziene există relațiile

$$x = \rho \cos\theta$$
$$y = \rho \sin\theta$$
$$z = z.$$

Dacă impunem $\rho > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $z \in \mathbb{R}$, atunci relațiile precedente asigură corespondența biunivocă între mulțimea $\mathbb{R}^3 - Oz$ și $(0, \infty) \times \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$.

Evident, următoarele ecuații caracterizează respectiv figurile menționate.

$\rho = \rho_0$: cilindru circular cu generatoarele paralele cu Oz.

$\theta = \theta_0$: semiplan a cărui prelungire trece prin Oz.

$z = z_0$: plan paralel cu xOy din care s-a scos punctul $(0, 0, z_0)$.

$\theta = \theta_0$, $z = z_0$: semidreaptă paralelă cu xOy a cărei prelungire trece prin Oz.

$z = z_0$, $\rho = \rho_0$: cerc cu centrul pe Oz și situat într-un plan paralel cu xOy.

$\rho = \rho_0$, $\theta = \theta_0$: dreaptă perpendiculară pe planul xOy.

§3. Coordonate sferice

Uneori poziția unui punct $M \in \mathbb{E}_3^*$ este caracterizată cu ajutorul unui alt triplet ordonat de numere (r, θ, φ), unde r reprezintă distanța $d(O, M)$, θ este unghiul dintre semidreptele Ox și OM', iar φ este unghiul dintre semidreptele Oz și OM (fig. 68).

Numerele r, φ, θ se numesc *coordonatele sferice* ale lui M sau coordonate polare în spațiu. Între coordonatele sferice și cele carteziene ale punctului M, există relațiile

$$x = r \sin\varphi \cos\theta$$
$$y = r \sin\varphi \sin\theta$$
$$z = r \cos\varphi.$$

Dacă impunem restricțiile $r > 0$, $\varphi \in (0, \pi)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, atunci formulele anterioare asigură corespondența biunivocă între mulțimile $\mathbb{R}^3 - - Oz$ și $(0, \infty) \times (0, \pi) \times [0, 2\pi)$.

Evident, următoarele ecuații caracterizează respectiv figurile menționate.

$r = r_0$: sfera cu centrul în origine din care au fost scoși polii;

$\theta = \theta_0$: semiplan a cărui prelungire trece prin Oz.

$\varphi = \varphi_0$: semicon fără vîrf (origine).

$\theta = \theta_0$, $\varphi = \varphi_0$ semidreaptă a cărei prelungire trece prin origine.

$\varphi = \varphi_0$, $r = r_0$: cerc cu centrul pe Oz, situat într-un plan paralel cu xOy.

$r = r_0$, $\theta = \theta_0$: semicerc (mare, deschis).

Probleme. 1. Față de reperul polar se dau punctele $M_1(\rho_1, \theta_1)$, $M_2(\rho_2, \theta_2)$; să se calculeze lungimea segmentului $[M_1M_2]$.

2. Se dau punctele $A\left(5, \frac{\pi}{3}, 4\right)$, $B\left(7, \frac{4\pi}{3}, -2\right)$, $C\left(2, \frac{5\pi}{6}, -1\right)$ în coordonate cilindrice. Să se arate că A și B aparțin unui plan care trece prin Oz și să se afle coordonatele carteziene ale punctelor A și C, precum și distanța dintre ele.

3. Să se scrie ecuațiile suprafețelor $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2+y^2)$, $(x^2 + y^2 + z^2)^2(x^2 + y^2) = 4a^2x^2y^2$ în coordonate sferice.

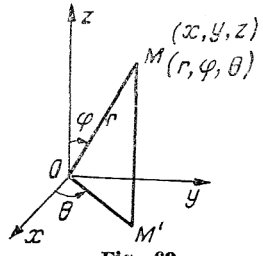


Fig. 68

3

GEOMETRIE DIFERENȚIALĂ

Capitolul 1

NOȚIUNI INTRODUCTIVE

§1. Funcții diferențiabile

1.1. În această parte, prin *funcție diferențiabilă* vom înțelege o funcție de clasă C^∞. Clasa de indice minim impusă de context poate fi ușor recunoscută.

1.2. Să considerăm o funcție de tipul $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Funcțiile $f_i = y_i \circ f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, unde y_i sînt funcțiile coordonate ale lui $\mathbb{R}^m$, se numesc *coordonatele euclidiene* ale lui f și se scrie $f = (f_1, \ldots, f_m)$.

Mulțimea

$G(f) = \{(x_1, \ldots, x_n, f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) \mid (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \equiv \mathbb{R}^{n+m}$ se numește *graficul* funcției $f = (f_1, \ldots, f_m)$. Evident $G(f)$ coincide cu mulțimea valorilor funcției $(x_1, \ldots, x_n) \to (x_1, \ldots, x_n, f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$.

Funcția $f = (f_1, \ldots, f_m)$ este diferențiabilă dacă și numai dacă f_i sînt funcții diferențiabile. Unei funcții diferențiabile f i se asociază *matricea jacobian*

$$J(f) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Dacă $n = m$, atunci determinantul $\det J(f)$ se numește *jacobianul* lui f și se notează cu $\dfrac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}$.

1.3. Funcția $f = (f_1, \ldots, f_m)$ se numește:

1) *injectivă* dacă relațiile $P, Q \in \mathbb{R}^n$, $f(P) = f(Q) \in \mathbb{R}^m$ implică $P = Q$;
2) *surjectivă* dacă $\forall\, Q \in \mathbb{R}^m$, $\exists\, P \in \mathbb{R}^n$ astfel încît $f(P) = Q$;
3) *bijectivă* dacă este injectivă și surjectivă;
4) *imersie* dacă $J(f)$ are rangul n, $\forall\, P \in \mathbb{R}^n$ $(n \leqslant m)$;
5) *submersie* dacă $J(f)$ are rangul m, $\forall\, P \in \mathbb{R}^n (m \leqslant n)$;
6) *regulată* dacă este imersie sau submersie;
7) *difeomorfism* dacă $n = m$, dacă este diferențiabilă și dacă posedă inversă diferențiabilă.

1.4. Dacă funcția $f = (f_1, \ldots, f_m)$ nu este regulată într-un punct P, atunci P se numește *punct singular* sau *punct critic*, iar $f(P)$ se numește *valoare singulară* sau *valoare critică*.

1.5. Fie $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă și

$$d^2f(P)(dx) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(P) dx_i \, dx_j$$

hessiana sa (*diferențiala de ordinul doi*). Fie P un punct critic al lui f. Dacă forma pătratică $d^2f(P)$ este nedegenerată, adică $\det\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(P)\right] \neq 0$, atunci P se numește *punct critic nedegenerat*. În caz contrar P se numește *punct critic degenerat*.

Punctele critice nedegenerate ale unei funcții diferențiabile $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sînt izolate.

1.6. Teorema funcției inverse. Fie $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o funcție diferențiabilă. Dacă $P \in \mathbb{R}^n$ este un punct în care $\det J(f) \neq 0$, atunci există o vecinătate $\mathbb{D}$ a lui P astfel încît restricția lui f la $\mathbb{D}$ să fie un difeomorfism.

1.7. Teorema funcției implicite. Fie $f = (f_1, \ldots, f_m): \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ o funcție diferențiabilă. Dacă în $(A, B) \in \mathbb{R}^{n+m}$ avem $f(A, B) = 0$ și $\frac{D(f_1, \ldots, f_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}(A, B) \neq 0$, atunci există o vecinătate $\mathbb{D}$ a lui A și o funcție diferențiabilă (unică) $g: \mathbb{D} \to \mathbb{R}^m$ astfel încît $g(A) = B$ și $f(P, g(P)) = 0$, $\forall P \in \mathbb{D}$.

1.8. Pentru definiția diferențiabilității nu este necesar ca domeniul de definiție al funcției să fie toată mulțimea $\mathbb{R}^n$, dar este necesar ca acest domeniu să fie o mulțime deschisă în $\mathbb{R}^n$.

Fie S o mulțime oarecare din $\mathbb{R}^n$. O funcție $f: S \to \mathbb{R}^m$ se numește diferențiabilă pe S dacă poate fi extinsă diferențiabil la un interval deschis din $\mathbb{R}^n$ care conține pe S.

1.9. Fie I un interval din $\mathbb{R}$ și $f: I \to \mathbb{R}^m$. În acest caz noțiunea de derivată parțială se reduce la noțiunea de derivată de la funcțiile de o singură variabilă. De asemenea, au sens și noțiunile de derivată la stînga și derivată la dreapta.

Exemplu. Fie funcția $F: \mathbb{D} \to \mathbb{R}^3$, unde $F(u, v) = (u^2, uv, v^2)$, iar $\mathbb{D}: u > 0, v > 0$. Deoarece, $\forall (u, v) \in \mathbb{D}$, matricea

$$J(F) = \begin{bmatrix} 2u & 0 \\ v & u \\ 0 & 2v \end{bmatrix}$$

are rangul doi, aplicația F este o imersie.

Din $(u_1^2, u_1v_1, v_1^2) = (u_2^2, u_2v_2, v_2^2)$ rezultă $u_1 = u_2$ și $v_1 = v_2$, adică $(u_1, v_1) = (u_2, v_2)$. Deci F este injectivă.

Notînd $x = u^2$, $y = uv$, $z = v^2$, observăm că $F(\mathbb{D})$ este porțiunea din cuadrica $y^2 = xz$ cuprinsă în primul octant. Rotația

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(z' - x') \\ y = y' \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + z') \end{cases}$$

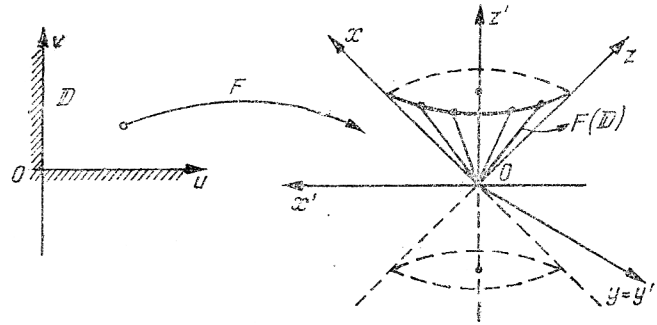


Fig. 1

ne conduce la ecuaţia canonică

$$\frac{x'^2}{2} + y'^2 - \frac{z'^2}{2} = 0$$

şi deci cuadrica $y^2 = xz$ este un con (fig. 1).

Dacă ne restrîngem la $F(\mathbb{D}) \subset \mathbb{R}^3$, atunci $F : \mathbb{D} \to F(\mathbb{D})$ este o bijecţie. Expresia inversei $F^{-1} : F(\mathbb{D}) \to \mathbb{D}$ se obţine din

$$u^2 = x, \ uv = y, \ v^2 = z.$$

Găsim $u = \sqrt{x}$, $v = \sqrt{z}$ şi deci

$$F^{-1} : F(\mathbb{D}) \to \mathbb{D}, \ F^{-1}(x, y, z) = (\sqrt{x}, \sqrt{z}),$$

care este o funcţie continuă.

§2. Vectori tangenţi. Cîmpuri vectoriale

Fie $\mathbb{R}^n$ spaţiul vectorial (real) euclidian canonic cu dimensiunea n. Ca orice spaţiu vectorial euclidian, $\mathbb{R}^n$ este implicit un spaţiu punctual euclidian.

Fie P şi Q două puncte oarecare din $\mathbb{R}^n$ şi $\overrightarrow{PQ}$ *vectorul tangent* la $\mathbb{R}^n$ în punctul P. În spaţiile $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ acesta se reprezintă grafic printr-o *săgeată* care începe din punctul P şi se termină în punctul Q (fig. 2).

Punctul $\vec{v} = Q - P$ se numeşte *partea vectorială* a vectorului tangent şi în loc de (P, Q) putem nota $\vec{v}_P$ sau chiar $\vec{v}$ dacă punctul de aplicaţie se subînţelege.

Doi vectori tangenţi $\vec{v}_P$ şi $\vec{w}_Q$ se numesc *egali* dacă au aceeaşi parte vectorială, $\vec{v} = \vec{w}$, şi acelaşi punct de aplicaţie, $P = Q$. Doi vectori $\vec{v}_P$ şi $\vec{w}_Q$ care au aceeaşi parte vectorială, $\vec{v} = \vec{w}$, dar care au puncte de aplicaţie diferite se numesc *paraleli* (fig. 3).

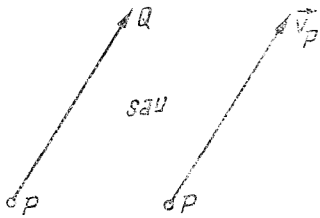


Fig. 2

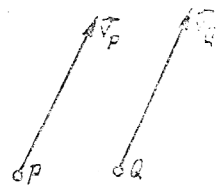


Fig. 3

Fixăm un punct $P \in \mathbb{R}^n$ şi considerăm toţi vectorii tangenţi la $\mathbb{R}^n$ în P. Mulţimea tuturor vectorilor tangenţi la $\mathbb{R}^n$ în P se numeşte *spa-*

ţiul tangent la $\mathbb{R}^n$ în P şi se notează cu $T_P\mathbb{R}^n$ (fig. 4). Spaţiul tangent se organizează ca *spaţiu vectorial* cu operaţiile

$$\vec{v}_P + \vec{w}_P = (\vec{v} + \vec{w})_P$$

$$r\vec{v}_P = (r\vec{v})_P.$$

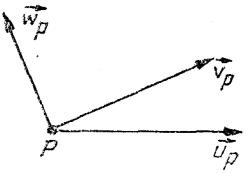


Fig. 4

Astfel, ca spaţiu vectorial, $T_P\mathbb{R}^n$ este izomorf cu $\mathbb{R}^n$, izomorfismul fiind dat de corespondenţa $\vec{v} \leftrightarrow \vec{v}_P$.

Produsul scalar în $T_P\mathbb{R}^n$ se defineşte astfel

$$(\vec{v}_P, \vec{w}_P) = (\vec{v}, \vec{w}).$$

În particular, *norma* (*lungimea*) vectorului $\vec{v}_P$ este numărul $\|\vec{v}_P\| = \|\vec{v}\|$. Un vector de lungime unu se numeşte *vector unitate* sau *versor*. Dacă $(\vec{v}, \vec{w}) = 0$, atunci vectorii tangenţi $\vec{v}_P$, $\vec{w}_P$ se numesc *ortogonali*.

Din inegalitatea Cauchy-Schwarz rezultă

$$-1 \leqslant \frac{(\vec{v}, \vec{w})}{\|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|} \leqslant 1.$$

De aceea putem defini *unghiul* φ dintre doi vectori tangenţi nenuli $\vec{v}_P$ şi $\vec{w}_P$ prin (fig. 5)

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{v}, \vec{w})}{\|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|}, \quad \varphi \in [0, \pi].$$

Un sistem ordonat de n vectori unitate, reciproc ortogonali, tangenţi la $\mathbb{R}^n$ în P, se numeşte *reper* în punctul P. Dacă $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ este un reper în punctul $P \in \mathbb{R}^n$, atunci $\forall\, \vec{v} \in T_P\mathbb{R}^n$ putem scrie

$$\vec{v} = (\vec{v}, \vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{v}, \vec{e}_2)\vec{e}_2 + \ldots + (\vec{v}, \vec{e}_n)\vec{e}_n.$$

Numerele reale $r_i = (\vec{v}, \vec{e}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, se numesc *coordonatele* lui $\vec{v}$ în raport cu reperul fixat şi sînt mărimi algebrice ale unor proiecţii.

Reperul $(1, 0, \ldots, 0)_P, (0, 1, \ldots, 0)_P, \ldots, (0, 0, \ldots, 1)_P$ se numeşte *reper natural*, iar coordonatele unui vector în raport cu acest reper se numesc *coordonate euclidiene*.

Fie
$$\begin{aligned} \vec{v}_2 &= r_{21}\vec{e}_1 + r_{22}\vec{e}_2 + \ldots + r_{2n}\vec{e}_n, \\ &\vdots \\ \vec{v}_n &= r_{n1}\vec{e}_1 + r_{n2}\vec{e}_2 + \ldots + r_{nn}\vec{e}_n, \end{aligned}$$
$n - 1$ vectori din $T_P\mathbb{R}^n$.

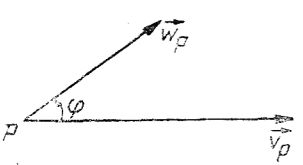


Fig. 5

2.1. *Definiţie. Vectorul*

$$\vec{v}_2 \times \ldots \times \vec{v}_n = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \ldots & \vec{e}_n \\ r_{21} & r_{22} & \ldots & r_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{n1} & r_{n2} & \ldots & r_{nn} \end{vmatrix} \in T_P\mathbb{R}^n,$$

unde membrul doi este un determinant simbolic ce se dezvoltă după prima linie, se numeşte produsul vectorial dintre $\vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$.

Evident, $\vec{v}_2 \times \ldots \times \vec{v}_n$ este perpendicular pe fiecare dintre vectorii $\vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$.

Considerăm acum n vectori $\vec{v}_i \in T_P\mathbb{R}^n$.

2.2. *Definiţie. Numărul*

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2 \times \ldots \times \vec{v}_n)$$

se numeşte produsul mixt al celor n vectori.

Dacă

$\vec{v}_1 = (r_{11}, r_{12}, \ldots, r_{1n})$, $\vec{v}_2 = (r_{21}, r_{22}, \ldots, r_{2n})$, $\ldots$, $\vec{v}_n = (r_{n1}, r_{n2}, \ldots, r_{nn})$, atunci

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2 \times \ldots \times \vec{v}_n) = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \ldots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \ldots & r_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{n1} & r_{n2} & & r_{nn} \end{vmatrix}.$$

Modulul acestui număr reprezintă volumul n-paralelipipedului construit pe vectorii de mai sus.

În $\mathbb{R}^3$ reperul natural este $\vec{i}_P = (1, 0, 0)_P$, $\vec{j}_P = (0, 1, 0)_P$, $\vec{k}_P = (0, 0, 1)_P$. În acest caz se poate vorbi despre produsul vectorial a doi vectori tangenţi

$\vec{v}_P = v_1\vec{i}_P + v_2\vec{j}_P + v_3\vec{k}_P$ şi $\vec{w}_P = w_1\vec{i}_P + w_2\vec{j}_P + w_3\vec{k}_P$,

$$\vec{v}_P \times \vec{w}_P = \begin{vmatrix} \vec{i}_P & \vec{j}_P & \vec{k}_P \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}, \text{ (fig. 6).}$$

2.3. *Definiţie. O funcţie* $\vec{V}$ *care asociază fiecărui punct P al lui* $\mathbb{R}^n$ *un vector* $\vec{V}(P)$ *tangent la* $\mathbb{R}^n$ *în P se numeşte cîmp vectorial.*

Dacă funcţia $\vec{V}$ este constantă, atunci cîmpul se numeşte *paralel*. Mulţimea valorilor unui cîmp paralel se identifică cu un vector liber.

Cîmpurile paralele $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \ldots, \vec{U}_n$ definite prin $\vec{U}_1(P) = (1, 0, \ldots, 0)_P$, $\vec{U}_2(P) = (0, 1, \ldots, 0)_P, \ldots, \vec{U}_n(P) = (0, 0, \ldots, 1)_P$, se numesc *cîmpuri fundamentale*, iar ansamblul lor se numeşte *cîmpul reperului natural.*

2.4. Teoremă. Dacă $\vec{V}$ este un cîmp vectorial pe $\mathbb{R}^n$, atunci există n funcţii reale $v_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, astfel încît

$$\vec{V} = v_1\vec{U}_1 + v_2\vec{U}_2 + \ldots + v_n\vec{U}_n.$$

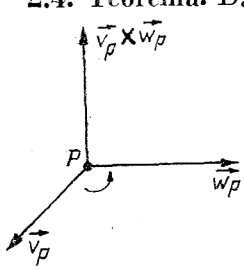


Fig. 6

Funcţiile v_i se numesc *coordonatele euclidiene* ale cîmpului $\vec{V}$.

Demonstraţie. Prin definiţie $\vec{V}$ asociază lui P un vector $\vec{V}(P)$ tangent la $\mathbb{R}^n$ în P. Deoarece partea vec-

torială a lui $\vec{V}(P)$ depinde de P, ea poate fi scrisă în forma $(v_1(P), v_2(P), \ldots, v_n(P))$ și astfel obținem funcțiile $v_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. În plus, $\forall\, P$, avem

$$\vec{V}(P) = (v_1(P), v_2(P), \ldots, v_n(P))_P = v_1(P)(1, 0, \ldots, 0)_P +$$

$$+ v_2(P)(0, 1, \ldots, 0)_P + \ldots + v_n(P)(0, 0, \ldots, 1)_P = v_1(P)\vec{U}_1(P) +$$

$$+ v_2(P)\vec{U}_2(P) + \ldots + v_n(P)\vec{U}_n(P).$$

Aceasta înseamnă că, $\forall\, P$, cîmpurile vectoriale $\vec{V}$ și $\sum_{i=1}^{n} v_i \vec{U}_i$ sînt egale. Deci $\vec{V} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{U}_i$. Evident funcțiile v_i sînt unic determinate.

În particular, orice vector tangent $\vec{v}_P$ se reprezintă în forma $\vec{v}_P = \sum_{i=1}^{n} r_i \vec{U}_i(P)$.

Algebra cîmpurilor vectoriale se construiește pe baza următoarelor operații definite punctual:

$$(\vec{V} + \vec{W})(P) = \vec{V}(P) + \vec{W}(P),$$

$$(f\vec{V})(P) = f(P)\vec{V}(P).$$

De asemenea *produsul scalar* al cîmpurilor vectoriale $\vec{V}$ și $\vec{W}$ se definește prin

$$(\vec{V}, \vec{W})(P) = (\vec{V}(P), \vec{W}(P)).$$

Produsul vectorial al cîmpurilor $\vec{V}_2, \ldots, \vec{V}_n$ se definește prin $(\vec{V}_2 \times \ldots \times \vec{V}_n)(P) = \vec{V}_2(P) \times \ldots \times \vec{V}_n(P)$. Produsul mixt al cîmpurilor $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \ldots, \vec{V}_n$ de definește prin $(\vec{V}_1, \vec{V}_2 \times \ldots \times \vec{V}_n)(P) = (\vec{V}_1(P), \vec{V}_2(P) \times \ldots \times \vec{V}_n(P))$.

Operațiile definite anterior punctual se pot exprima prin operații asupra funcțiilor coordonate ale cîmpurilor respective. De asemenea facem observația că în baza teoremei 2.4, orice cîmp vectorial $\vec{V}$ din $\mathbb{R}^n$ este echivalent cu o aplicație de tipul $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. De aceea apare naturală definiția: $\vec{V}$ se numește *diferențiabil* dacă coordonatele sale sînt diferențiabile. În continuare presupunem că folosim numai cîmpuri vectoriale diferențiabile.

Să presupunem că ne situăm în $\mathbb{R}^3$. În acest caz cîmpul reperului natural $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ este definit prin (fig. 7):

$$\vec{i}(P) = \vec{i}_P = (1, 0, 0)_P, \vec{j}(P) = \vec{j}_P = (0, 1, 0)_P, \vec{k}(P) = \vec{k}_P = (0, 0, 1)_P.$$

Orice cîmp vectorial din spațiu se scrie în forma (fig. 8)

$$\vec{V} = v_1(x, y, z)\vec{i} + v_2(x, y, z)\vec{j} + v_3(x, y, z)\vec{k}.$$

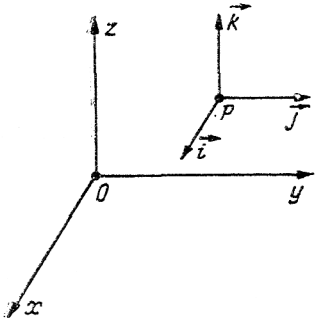


Fig. 7

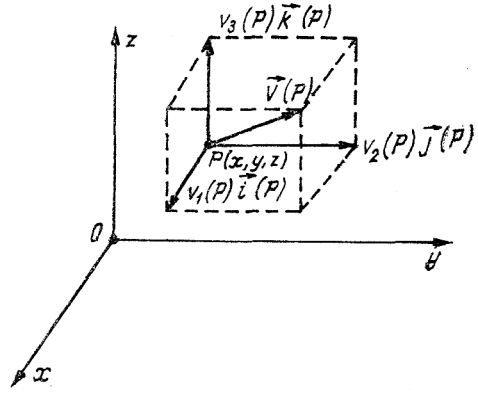


Fig. 8

În spaţiul $\mathbb{R}^3$ se poate defini produsul vectorial a două cîmpuri $\vec{V}$ şi $\vec{W}$ şi anume

$$(\vec{V} \times \vec{W})(P) = \vec{V}(P) \times \vec{W}(P).$$

2.5. Exemplu (fig. 9). Fie q_0 o sarcină electrică situată în punctul O. Forţa $\vec{E}$ cu care sarcina q_0 acţionează asupra sarcinii $q = +1$ (unitate de sarcină electrică în SI, 1 coulomb = 1A·s) situată în punctul arbitrar P este (vezi legea Coulomb)

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q_0}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r},$$

unde $\vec{r}$ este vectorul de poziţie al punctului P în raport cu O, iar ε este permitivitatea mediului în care sînt plasate sarcinile.

Funcţia $P \to \vec{E}(P)$ se numeşte *cîmp electrostatic* produs de sarcina q_0. Domeniul pe care este definit acest cîmp este $\mathbb{R}^3 - \{O\}$.

§ 3. Derivata covariantă

Presupunem că toate funcţiile utilizate sînt diferenţiabile (de clasă C^∞).

I. Fie $\mathbb{D}$ o mulţime deschisă din $\mathbb{R}^n$ şi $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ o funcţie reală. Fie $P \in \mathbb{D}$ şi $\vec{v}$ un vector tangent la $\mathbb{D}$ în punctul P. Fixăm intervalul $I \ni t$ astfel încît $P + tV \in \mathbb{D}$, unde V este punctul corespunzător vectorului $\vec{v}$. Evident $t \to P + tV$ reprezintă restricţia unei drepte şi dacă f este diferenţiabilă, atunci funcţia compusă $t \to f(P + tV)$ este tot diferenţiabilă.

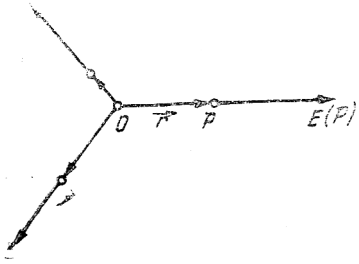


Fig. 9

3.1. *Definiţie. Numărul*

$$D_{\vec{v}} f(P) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(P + tV)\Big|_{t=0}$$

se numeşte derivata lui f în raport cu $\vec{v}$.

Numărul $D_{\vec{v}} f(P)$ indică cantitativ schimbarea lui $f(P)$ cînd P se mişcă în sensul lui $\vec{v}$. Dacă $\vec{v}$ este un versor, atunci $D_{\vec{v}} f$ poartă numele de *derivata lui f după direcţia $\vec{v}$.*

3.2. Lemă. Dacă $\vec{v}_P = (v_1, \ldots, v_n)_P$, atunci

$$D_{\vec{v}} f(P) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(P) + \ldots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) = (\vec{v}, \nabla f(P)) = df(P)(\vec{v}),$$

unde ∇f este gradientul lui f, iar df este diferențiala lui f.

Demonstrația este imediată ca urmare a teoremei de derivare a unei funcții compuse.

Utilizînd inegalitatea Schwarz

$$|D_{\vec{v}} f(P)| = |(\vec{v}, \nabla f(P)| \leqslant \|\vec{v}\| \, \|\nabla f(P)\|$$

în care egalitatea are loc dacă și numai dacă $\vec{v}$ și $\nabla f(P)$ sînt coliniari, rezultă că $\vec{v} \to D_{\vec{v}} f(P)$ are un minim (maxim) egal cu $-\|\vec{v}\| \, \|\nabla f(P)\|$ (respectiv $\|\vec{v}\| \, \|\nabla f(P)\|$) dacă $\vec{v}$ are sensul și direcția lui $-\nabla f(P)$ (respectiv $\nabla f(P)$). Astfel, $-\nabla f(P)$ (respectiv $\nabla f(P)$) indică local direcția și sensul în care f descrește (crește) cel mai repede.

3.3. Teoremă. Fie $f, g : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $\vec{v}, \vec{w} \in T_P\mathbb{D}$ și $a, b \in \mathbb{R}$. Avem

$$D_{a\vec{v}+b\vec{w}} f(P) = aD_{\vec{v}} f(P) + bD_{\vec{w}} f(P)$$

$$D_{\vec{v}}(af + bg)(P) = aD_{\vec{v}} f(P) + bD_{\vec{v}} g(P)$$

$$D_{\vec{v}}(fg)(P) = g(P)D_{\vec{v}} f(P) + f(P)D_{\vec{v}} g(P).$$

Demonstrația se bazează pe lema 3.2 și pe proprietățile gradienților.

Folosind noțiunea precedentă putem defini acțiunea unui cîmp vectorial $\vec{V}$ asupra unei funcții f (ambele definite pe $\mathbb{D}$) ca fiind funcția cu valori reale notată cu $D_{\vec{V}} f$ și a cărei valoare în fiecare punct $P \in \mathbb{D}$ este numărul $D_{\vec{V}(P)} f(P)$. Funcția $D_{\vec{V}} f$ se numește *derivata funcției f în raport cu cîmpul $\vec{V}$*. În particular, pentru cazul $n = 3$, avem

$$D_{\vec{i}} f = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad D_{\vec{j}} f = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad D_{\vec{k}} f = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

În baza teoremei 3.3 deducem că derivata $D_{\vec{V}} f$ are următoarele proprietăți

$$D_{f\vec{V}+g\vec{W}} h = fD_{\vec{V}} h + gD_{\vec{W}} h$$

$$D_{\vec{V}}(af + bg) = aD_{\vec{V}} f + bD_{\vec{V}} g$$

$$D_{\vec{V}}(fg) = fD_{\vec{V}} g + gD_{\vec{V}} f.$$

II. Noțiunea pe care o introducem acum generalizează derivata $D_{\vec{V}} f(P)$ și reprezintă o operație asupra cîmpurilor vectoriale. Fie $\vec{W}$ un cîmp

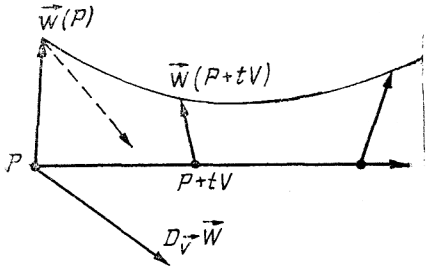


Fig. 10

vectorial definit pe mulțimea deschisă $\mathbb{D}$ din $\mathbb{R}^n$ și $\vec{v}$ un vector tangent la $\mathbb{D}$ în punctul x. Considerăm funcția compusă $t \to \vec{W}(P+tV)$ unde $I \ni t$ este determinat de condiția $P + tV \in \mathbb{D}$.

3.4. *Definiție. Vectorul*

$$D_{\vec{v}}\vec{W}(P) = \frac{d}{dt}\vec{W}(P+tV)\Big|_{t=0}$$

tangent la $\mathbb{D}$ *în punctul* P *se numește derivata covariantă a lui* $\vec{W}$ *în raport cu* $\vec{v}$.

Derivata covariantă $D_{\vec{v}}\vec{W}(P)$ măsoară rata inițială a schimbării lui $\vec{W}(P)$ cînd P se mișcă în sensul lui $\vec{v}$(fig. 10).

3.5. Lemă. Dacă $\vec{W} = w_1\vec{U}_1 + \ldots + w_n\vec{U}_n$ și $\vec{v}$ este un vector tangent la $\mathbb{D}$ în punctul P, atunci

$$D_{\vec{v}}\vec{W}(P) = D_{\vec{v}}\, w_1(P)\vec{U}_1(P) + \ldots + D_{\vec{v}}\, w_n(P)\vec{U}_n(P).$$

Demonstrație. Se observă că $\vec{W}(P+tV) = w_1(P+tV)\,\vec{U}_1(P+tV) + \ldots + w_n(P+tV)\,\vec{U}_n(P+tV)$. Pentru a deriva un astfel de cîmp în $t = 0$, se derivează coordonatele sale în $t = 0$. Ținînd seama de definiția 3.1 lema devine evidentă.

Proprietățile derivatei covariante rezultă din lema 3.5 și din proprietățile derivatei $D_{\vec{v}}f(P)$ date în teorema 3.3.

3.6. Teoremă. Fie $\vec{V}$ și $\vec{W}$ două cîmpuri vectoriale pe $\mathbb{D}$, fie $\vec{v}, \vec{w} \in T_P\mathbb{D}$ și $a, b \in \mathbb{R}$. Avem

$$D_{a\vec{v}+b\vec{w}}\vec{W} = aD_{\vec{v}}\vec{W} + b\,D_{\vec{w}}\vec{W}.$$

$$D_{\vec{v}}(a\vec{V} + b\vec{W}) = aD_{\vec{v}}\vec{V} + bD_{\vec{v}}\vec{W}$$

$$D_{\vec{v}}(f\vec{W}) = (D_{\vec{v}}f)\vec{W} + fD_{\vec{v}}\vec{W}$$

$$D_{\vec{v}}(\vec{V}, \vec{W}) = (D_{\vec{v}}\vec{V}, \vec{W}) + (\vec{V}, D_{\vec{v}}\vec{W}).$$

Noțiunea de mai sus se poate extinde considerînd derivata covariantă a unui cîmp vectorial $\vec{W}$ în raport cu cîmpul vectorial $\vec{V}$. Rezultatul este un cîmp vectorial care se notează cu $D_{\vec{V}}\vec{W}$ și a cărui valoare în P este $D_{\vec{V}(P)}\vec{W}(P)$. Dacă $\vec{W} = w_1\vec{U}_1 + \ldots + w_n\vec{U}_n$, atunci $D_{\vec{V}}\vec{W} = (D_{\vec{V}}w_1)\vec{U}_1 + \ldots + (D_{\vec{V}}w_n)\vec{U}_n$. În baza celor precedente rezultă că $D_{\vec{V}}\vec{W}$ are următoa-

rele proprietăţi

$$D_{f\vec{V}+g\vec{W}}\vec{Y} = fD_{\vec{V}}\vec{Y} + gD_{\vec{W}}\vec{Y}$$

$$D_{\vec{V}}(a\vec{Y} + b\vec{Z}) = aD_{\vec{V}}\vec{Y} + bD_{\vec{V}}\vec{Z}$$

$$D_{\vec{V}}(f\vec{Y}) = (D_{\vec{V}}f)\vec{Y} + fD_{\vec{V}}\vec{Y}$$

$$D_{\vec{V}}(\vec{Y}, \vec{Z}) = (D_{\vec{V}}(\vec{Y}, \vec{Z}) + (\vec{Y}, D_{\vec{V}}\vec{Z}).$$

Observaţii. 1) Fie derivata covariantă $D_{\vec{V}}\vec{W}$. Rolul lui $\vec{V}$ este algebric, iar $\vec{W}$ se derivează.

2) Derivatele covariante ale cîmpurilor fundamentale $\vec{U}_i$, $i = 1, \ldots, n$ sînt nule.

§ 4. Probleme

1. Fie $P = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Să se arate că

$$\max\{|x_i|,\ i = 1, \ldots, n\} \leqslant \|P\| \leqslant \sqrt{n}\max\{|x_i|,\ i = 1, \ldots, n\}.$$

2. Să se arate că pe $\mathbb{R}^n$ nu există nici o distanţă diferenţiabilă.

3. Fie $P = (x_1, \ldots, x_n)$, $f(P) = a_1x_1^{\alpha_1} + \ldots + a_nx_n^{\alpha_n}$, unde $\alpha_i > 0$, iar $a_1, \ldots, a_n$ este o progresie geometrică cu raţia r. Să se calculeze $D_{\vec{v}}f(Q)$ pentru $\vec{v} = \left(\frac{1}{\alpha_1}, \ldots, \frac{1}{\alpha_n}\right)$ şi $Q = (1, \ldots, 1)$.

4. Fie cîmpurile vectoriale $X = x_1U_1 + \ldots + x_n\vec{U}_n$ şi $\vec{Y} = \frac{\vec{X}}{\|\vec{X}\|}$. Să se determine $D_{\vec{X}}\vec{Y}$.

Capitolul 2

CURBE

CURBE ÎN $\mathbb{R}^n$

§ 1. Definiţii şi exemple

Fie $\mathbb{R}^n$ spaţiul euclidian canonic cu n dimensiuni, $T_P\mathbb{R}^n$ spaţiul tangent în punctul P la $\mathbb{R}^n$ şi $\mathcal{J}_P : \mathbb{R}^n \to T_P\mathbb{R}^n$ izomorfismul canonic. Notăm cu I

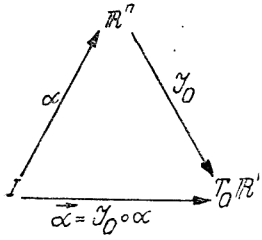


Fig. 11

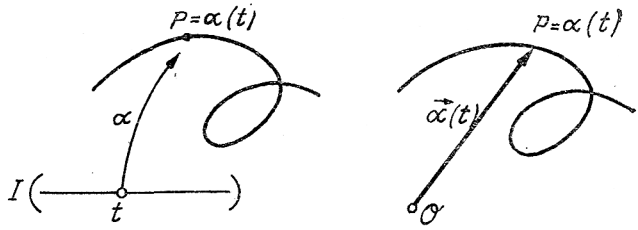


Fig. 12

un interval deschis (alteori închis, semiînchis sau reuniune de intervale) din $\mathbb{R}$.

1.1. *Definiţie. O funcţie diferenţiabilă* $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ *se numeşte curbă şi se notează cu* α.

Uneori numai imaginea $\alpha(I)$ este numită *curbă*. În acest caz α se numeşte *parametrizare*, iar $t \in I$ se numeşte *parametru*. Noi vom folosi ambele accepţiuni ale cuvîntului „*curbă*", semnificaţia decurgînd din context. De asemenea menţionăm că deşi consideraţiile teoretice se fac în $\mathbb{R}^n$ imaginile grafice aparţin lui $\mathbb{R}^2$ sau $\mathbb{R}^3$.

Observăm compunerea marcată prin figura 11. Rezultă că lui α putem să-i ataşăm o funcţie şi numai una de tipul $\vec{\alpha} : I \to T_O\mathbb{R}^n$, ceea ce permite să privim mulţimea $\alpha(I)$ ca fiind descrisă de extremitatea unui vector variabil $\vec{\alpha}$ cu originea fixată în originea O a lui $\mathbb{R}^n$(fig. 12).

Din definiţia lui $\alpha(I)$ rezultă echivalenţa:

$$P \in \alpha(I) \Leftrightarrow \exists\ t \in I,\ P = \alpha(t).$$

Dacă raportăm pe $\mathbb{R}^n$ la baza canonică, atunci funcţiile α şi $\vec{\alpha}$ sînt caracterizate prin coordonatele lor euclidiene:

$$\alpha(t) = (x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots,\ x_n(t)),\ t \in I$$

$$\vec{\alpha}(t) = x_1(t)\vec{e}_1 + x_2(t)\vec{e}_2 + \ldots + x_n(t)\vec{e}_n,\ t \in I.$$

Într-un context în care numai imaginea $\alpha(I)$ este numită curbă, relaţiile $x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t),\ \ldots,\ x_n = x_n(t)$ se numesc *ecuaţiile parametrice* ale curbei, iar $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(t)$ se numeşte *ecuaţia vectorială* a curbei.

1.2. *Definiţie. Un punct* P *al lui* $\alpha(I)$ *se numeşte simplu dacă există o singură valoare* $t \in I$ *aşa ca* $\alpha(t) = P$. *Dacă există mai multe valori distincte* t *astfel încît* $\alpha(t) = P$, *atunci punctul* P *se numeşte multiplu.*

De exemplu, dacă există numerele $t_1 \neq t_2$ şi numai acestea (din I) pentru care $\alpha(t_1) = \alpha(t_2) = Q$, atunci punctul Q se numeşte *dublu* (fig. 13). Dacă există trei numere distincte t_1, t_2, t_3 şi numai acestea (din I) pentru care $\alpha(t_1) = \alpha(t_2) = \alpha(t_3) = Q$, atunci punctul Q se numeşte triplu (fig. 14).

Fig. 13

Fig. 14

În general, cardinalul mulţimii $\alpha^{-1}(P)$ se numeşte *multiplicitatea* punctului P.

Dacă toate punctele unei curbe $\alpha(I)$ sînt simple,

atunci după definiţiile anterioare, aplicaţia α este injectivă. De aceea admitem

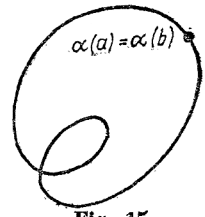


Fig. 15

1.3. *Definiţie. O funcţie diferenţiabilă şi injectivă* $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ *se numeşte curbă simplă.*

Să presupunem acum că avem o funcţie de tipul $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Această funcţie se numeşte diferenţiabilă dacă poate fi extinsă diferenţiabil la un interval deschis ce conţine pe $[a, b]$.

1.4. *Definiţie. O funcţie diferenţiabilă* $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *pentru care* $\alpha(a) = \alpha(b)$ *se numeşte curbă închisă* (fig. 15).

Această definiţie nu are acelaşi conţinut cu definiţia topologică a unei mulţimi închise. Într-adevăr, pentru orice curbă $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, imaginea $\alpha([a, b])$ este închisă în $\mathbb{R}^n$ în sens topologic, deoarece α este implicit o funcţie continuă, dar aceasta n-are nici o legătură cu condiţia $\alpha(a) = \alpha(b)$.

O curbă închisă pentru care restricţia la $[a, b)$ este injectivă se numeşte *curbă simplă şi închisă.*

O curbă $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ se numeşte *periodică* dacă există un număr $T > 0$ astfel încît $t + T \in I$, $\alpha(t + T) = \alpha(t)$, $\forall t \in I$. Cel mai mic număr T care se bucură de această proprietate se numeşte *perioada* lui α. Se poate demonstra că imaginea unei curbe închise admite o reprezentare parametrică periodică.

1.5. Exemple.

1) Fie $P = (p_1, \ldots, p_n)$ şi $Q = (q_1, \ldots, q_n) \neq O(0, \ldots, 0)$ două elemente fixate în $\mathbb{R}^n$. Curba $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$,

$$\alpha(t) = P + tQ = (p_1 + tq_1, \ldots, p_n + tq_n),$$

se numeşte *dreaptă determinată de punctul* $P = \alpha(0)$ *şi direcţia* Q.

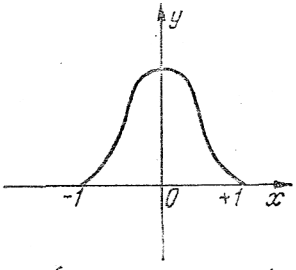
Cele n ecuaţii parametrice $x_i = p_i + tq_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, sînt echivalente cu $n - 1$ *ecuaţii carteziene* în $\mathbb{R}^n$,

$$\frac{x_1 - p_1}{q_1} = \ldots = \frac{x_n - p_n}{q_n},$$

cu convenţia că dacă un numitor este nul, atunci numărătorul respectiv trebuie egalat cu zero.

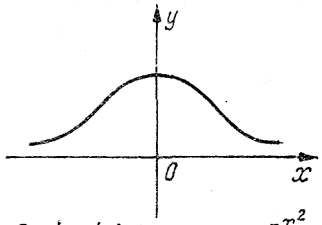
Submulţimea lui $\mathbb{R}^n$ caracterizată prin ecuaţia carteziană implicită $\sum_{i=1}^{n} q_i(x_i - p_i) = 0$ este *hiperplanul* ce trece prin punctul P şi pentru care Q este o direcţie normală.

2) Graficul unei funcţii diferenţiabile de tipul $f : I \to \mathbb{R}$ este o curbă în plan deoarece acest grafic poate fi privit ca imaginea funcţiei $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (t, f(t))$. O curbă de acest tip (fig. 16, 17, 18, 19) nu poate avea puncte multiple, nu poate fi periodică şi nici închisă,



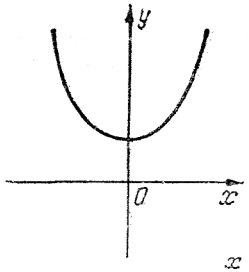
$$y = \begin{cases} 0 & |x| \geq 1 \\ e^{-\frac{1}{1-x^2}} & |x| \leq 1 \end{cases}$$

Fig. 16



Curba lui Gauss : $y = e^{-x^2}$

Fig. 17



Lănţişor : $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$

Fig.18

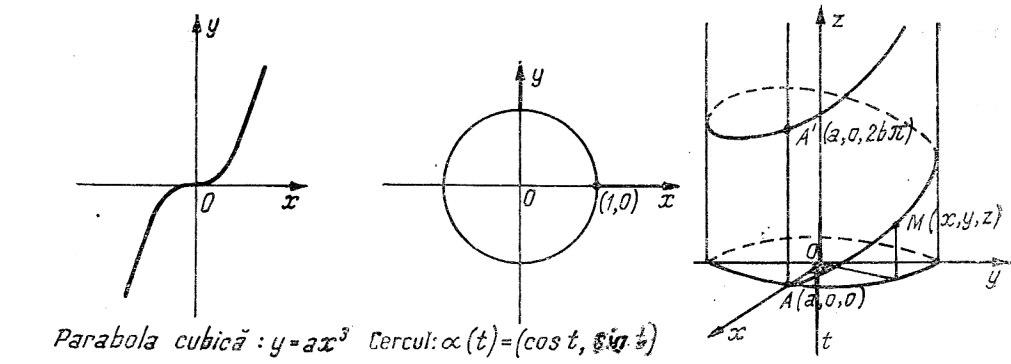


Fig. 19 Fig. 20 Fig. 21

deoarece $t_1 \neq t_2$ implică existenţa punctelor $(t_1, f(t_1))$ şi $(t_2, f(t_2))$ care nu pot fi identice (au abscise diferite).

$y = f(x)$ se numeşte *ecuaţia carteziană explicită* a curbei $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (t, f(t))$, $t \in I$.

În practică se întîlnesc şi curbe de tipul $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (g(t), t)$, $t \in I$, cărora le corespund ecuaţii carteziene explicite de forma $x = g(y)$ (vezi § 8).

3) Fie curba $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Deoarece $\alpha(0) = \alpha(2\pi) = (1, 0)$, curba este închisă.

Imaginea $\alpha([0, 2\pi])$ este cercul cu centrul în origine şi de rază unu (fig. 20). Restricţia lui α la $[0, 2\pi)$ este injectivă şi deci cercul este o curbă simplă şi închisă.

Să considerăm acum funcţia $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$. Evident, imaginea $\alpha(\mathbb{R})$ este tot cercul de rază unu şi cu centrul în origine. Observăm însă că în acest caz, $\alpha(t) = \alpha(t + 2\pi)$ şi de aceea, cercul poate fi privit ca o curbă periodică cu perioada $T = 2\pi$. În acest sens toate punctele cercului sînt puncte multiple.

4) Ne situăm în spaţiul cu trei dimensiuni şi considerăm curbe pentru care cel puţin una dintre coordonate este funcţia identitate (grafice ale funcţiilor de tipul $f : I \to \mathbb{R}^2$) sau funcţia liniară. Ne oprim la cazul $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (x(t), y(t), bt)$ deoarece celelalte situaţii sînt analoage. O curbă de acest tip nu poate avea puncte multiple, nu poate fi periodică şi nici închisă deoarece $t_1 \neq t_2$ implică $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$ — puncte cu cote diferite.

Pentru concretizare să considerăm curba descrisă de un punct situat pe o suprafaţă cilindrică de rotaţie şi avînd o mişcare compusă dintr-o rotaţie în jurul axei cilindrului şi o translaţie de-a lungul acestei axe, cele două mişcări fiind proporţionale între ele, curbă ce se numeşte *elice circulară* (fig. 21).

Presupunînd că mobilul pleacă din $A(a, 0, 0)$ găsim ecuaţiile parametrice ale curbei, $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, $t \in \mathbb{R}$, unde z reprezintă translaţia, t rotaţia, iar $b = \text{const}$. Curba întîlneşte fiecare generatoare a suprafeţei cilindrice $x^2 + y^2 = a^2$ într-o infinitate de puncte. De exemplu, generatoarea ce trece prin punctul A este întîlnită în punctele de cotă $z = 2nb\pi$, unde n este întreg.

Arcul de curbă cuprins între două puncte consecutive $A(a, 0, 0)$ şi $A'(a, 0, 2b\pi)$ se numeşte *spiră* a elicei, iar lungimea AA' se numeşte *pasul elicei*.

§ 2. Tangenta

Fie $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ o curbă. Notăm cu t variabila din I şi $\alpha(t) = P$, $\alpha(t + h) = Q$, $t + h \in I$. Construim derivata

$$\overline{\alpha}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\overline{\alpha}(t + h) - \overline{\alpha}(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\overline{PQ}}{h}.$$

Vectorul $\vec{\alpha}'(t)$ cu originea în $\alpha(t) = P$ apare ca poziţie limită a vectorului $\overrightarrow{PQ}$, cînd $Q \in \alpha(I)$ se apropie de P şi se numeşte *vector viteză* (fig. 22). Evident $\vec{\alpha}'(t) \in T_{\alpha(t)}\mathbb{R}^n$.

Dacă raportăm pe $\mathbb{R}^n$ la baza canonică, atunci:

$$\vec{\alpha}'(t) = x_1'(t)\vec{e}_1 + x_2'(t)\vec{e}_2 + \ldots + x_n'(t)\vec{e}_n.$$

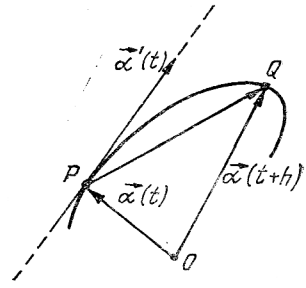


Fig. 22

2.1. *Definiţie. Un punct $P = \alpha(t)$ al curbei α în care $\vec{\alpha}'(t) \neq \vec{0}$ se numeşte punct regulat. Dacă $\vec{\alpha}'(t) \neq \vec{0}$, $\forall\, t \in I$, atunci curba α se numeşte regulată.*

Dacă P este un punct regulat, atunci punctul P şi vectorul $\vec{\alpha}'(t)$ determină o dreaptă care apare ca limita dreptei PQ cînd $P = \alpha(t)$ este fix, iar Q tinde către P de-a lungul curbei.

2.2. *Definiţie. Fie P un punct regulat al curbei α. Dreapta care trece prin P şi are ca vector director pe $\vec{\alpha}'(t)$ se numeşte tangenta la curba α în P.*

Hiperplanul care trece prin P şi are drept vector normal pe $\vec{\alpha}'(t)$ se numeşte hiperplan normal la curba α în P (fig. 23 şi 24).

Pentru elementele descrise anterior avem următoarele ecuaţii

$$\text{Tangenta}: \quad \frac{x_1 - x_1(t)}{x_1'(t)} = \frac{x_2 - x_2(t)}{x_2'(t)} = \ldots = \frac{x_n - x_n(t)}{x_n'(t)},$$

Hiperplanul
normal: $(x_1 - x_1(t))x_1'(t) + (x_2 - x_2(t))x_2'(t) + \ldots + (x_n - x_n(t))x_n'(t) = 0.$

Un punct al unei curbe poate să nu fie regulat. De aceea admitem

2.3. *Definiţie. Un punct $\alpha(t) = P \in \alpha(I)$ corespunzător unei valori a lui t pentru care $\vec{\alpha}'(t) = \vec{0}$ se numeşte punct singular.*

Observăm că dacă $\vec{\alpha}'(t) = \vec{0}$, $\forall\, t \in J \subset I$, atunci $\vec{\alpha} = \vec{c}$, $\forall\, t \in J$, şi astfel restricţia lui α la J se reduce la un punct. În consecinţă, dacă α admite puncte singulare şi nu se reduce la constante pe porţiuni, atunci aceste puncte sînt în general izolate. Dacă $\exists\, m > 1$ aşa ca $\vec{\alpha}'(t) = \vec{\alpha}''(t) = \ldots = \vec{\alpha}^{(m-1)}(t) = \vec{0}$ şi $\vec{\alpha}^{(m)}(t) \neq \vec{0}$, atunci punctul P corespunzător se numeşte *punct singular de ordinul m*. În vecinătatea unui punct singular de ordinul m formula Taylor dă:

$$\bar{\alpha}(t + h) = \bar{\alpha}(t) + \frac{h^m}{m!}[\bar{\alpha}^{(m)}(t) + \bar{\varepsilon}(h)], \quad t + h \in I \text{ cu } \lim_{h \to 0} \bar{\varepsilon}(h) = \bar{0}.$$

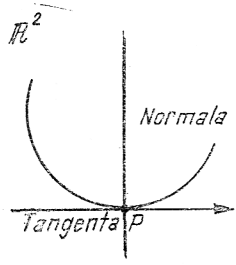


Fig. 23

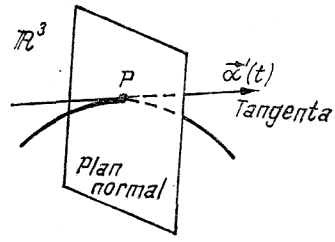


Fig. 24

Notînd $P = \alpha(t)$ şi $Q = \alpha(t + h)$ avem

$$\lim_{h\to 0} m!\,\frac{\vec{\alpha}(t+h) - \vec{\alpha}(t)}{h^m} = \lim_{h\to 0} m!\,\frac{\overline{PQ}}{h^m} = \vec{\alpha}^{(m)}(t).$$

Vectorii $\vec{\alpha}(t)$, $\vec{\alpha}(t + h)$ au originea fixată în O, iar vectorii $\vec{\alpha}'(t)$, $\vec{\alpha}''(t)$ etc. au originea fixată în extremitatea lui $\vec{\alpha}(t)$. Formula Taylor are sens pentru vectorii liberi corespunzători celor legaţi.

Vectorul $\vec{\alpha}^{(m)}(t)$ se numeşte *vector tangent* la curba α în punctul singular P. Punctul P şi vectorul $\vec{\alpha}^{(m)}(t)$ definesc o dreaptă care este limita dreptei PQ cînd $P = \alpha(t)$ este fix, iar Q tinde către P de-a lungul curbei.

2.4. *Definiţie. Fie P un punct singular de ordinul m. Dreapta determinată de punctul P şi vectorul $\vec{\alpha}^{(m)}(t)$ se numeşte tangenta curbei în punctul P.*

Hiperplanul care trece prin P şi are drept vector normal pe $\vec{\alpha}^{(m)}(t)$ se numeşte hiperplan normal la curba α în P.

Sumarul definiţiei 2.4 este următorul

$$\text{Tangenta}: \frac{x_1 - x_1(t)}{x_1^{(m)}(t)} = \frac{x_2 - x_2(t)}{x_2^{(m)}(t)} = \ldots = \frac{x_n - x_n(t)}{x_n^{(m)}(t)},$$

$$\text{Hiperplanul normal}: (x_1 - x_1(t))\, x_1^{(m)}(t) + (x_2 - x_2(t))\, x_2^{(m)}(t) + \ldots$$
$$\ldots + (x_n - x_n(t)) x_n^{(m)}(t) = 0.$$

2.5. Observaţii

1) Dacă $\alpha(t) = P$ este un punct regulat, rezultă că într-o vecinătate a lui P, α este injectivă. Dacă $\alpha(t) = P$ este punct singular de ordinul m rezultă că α nu este injectivă într-o vecinătate a lui P.

2) Un punct al unei curbe poate fi simplu şi regulat sau simplu şi singular sau multiplu şi regulat sau multiplu şi singular.

3) Fie $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$, $\beta : J \to \mathbb{R}^n$ două curbe astfel încît $\alpha(I) \cap \beta(J) \neq \emptyset$ şi fie $P \in \alpha(I) \cap \beta(J)$ un punct regulat sau singular de ordinul m. Unghiul dintre vectorii tangenţi la cele două curbe în P se numeşte *unghiul celor două curbe*. Dacă cei doi vectori sînt perpendiculari curbele se numesc *ortogonale*. Dacă unghiul dintre cei doi vectori este zero sau π, atunci curbele se numesc *tangente*.

4) În cinematică o curbă este privită ca fiind traiectoria unui punct material în mişcare. În acest caz variabila t se numeşte *timp*, $\alpha(I)$ se numeşte *traiectorie*, $\vec{\alpha}'(t)$ se numeşte *viteza curbei* la momentul t, iar $\vec{\alpha}''(t)$ se numeşte *accelerafia curbei* la momentul t.

2.6. Orientare

Pe o curbă dată $\alpha(I)$, presupusă mulţime conexă, se pot stabili două şi numai două sensuri de parcurs (ordine a punctelor curbei care corespunde ordinei din I) pe care convenim să le notăm cu $+$ şi $-$. O curbă α împreună cu o alegere a unui sens de parcurs pe $\alpha(I)$ se numeşte *curbă orientată*.

Fie α o curbă regulată. Dacă $\vec{\alpha}'(t)$ este vectorul tangent la α în $\alpha(t)$, atunci este natural să considerăm drept pozitiv acel sens de parcurs pe $\alpha(I)$ care să fie coerent cu sensul lui $\vec{\alpha}'(t)$ şi deci cu sensul pozitiv pe tangentă (vezi orientarea unei drepte).

Convenim să precizăm orientarea unei curbe şi a tangentei sale prin săgeţi (fig. 25).

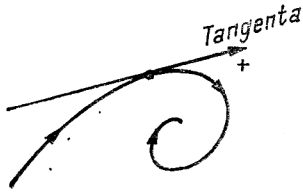


Fig. 25

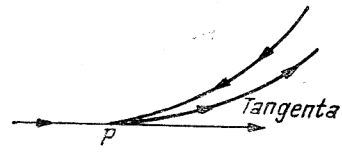


Fig. 26

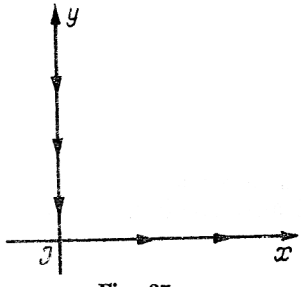


Fig. 27

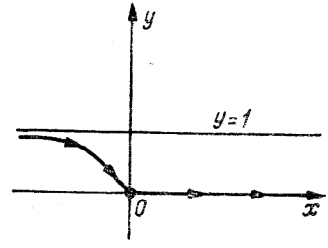


Fig. 28

Dacă α posedă puncte singulare, atunci există situații cînd nu este posibil să alegem pe curbă un sens de parcurs coerent cu cel de pe tangentă (fig. 26).

2.7. Exemple

1) Curbele din $\mathbb{R}^2$ care se pot reprezenta printr-o ecuație carteziană explicită $y = f(x)$ sînt regulate. Într-adevăr din $\alpha(t) = (t, f(t))$ construim $\vec{\alpha} = t\vec{i} + f(t)\vec{j}$ și deci $\vec{\alpha}' = \vec{i} + f'(t)\vec{j}$ nu se anulează, $\forall\ t \in I$ (fig. 16, 17, 18, 19).

2) Fie curba plană (fig. 27)

$$\alpha(t) = \begin{cases} (0,\ e^{1/t}) & t < 0 \\ (0,\ 0) & t = 0 \\ (e^{-1/t}, 0) & t > 0. \end{cases}$$

Observăm că în $t = 0$, aplicația $\alpha(t)$ nu este o imersie. De aceea punctul O (0, 0) este un punct singular. Mai mult, observăm că în acest punct singular avem $\vec{\alpha}'(0) = \vec{\alpha}''(0) = \ldots \vec{\alpha}^{(m)}(0) = \ldots = (0, 0)$.

Pentru fiecare m întreg, putem considera curba (fig. 28 pentru $m = 1$)

$$\alpha_m(t) = \begin{cases} (t^m, e^{1/t}) & t < 0 \\ (0, 0) & t = 0 \\ (t^m + e^{-1/t}, 0) & t > 0. \end{cases}$$

Observăm că în acest caz avem:

$$\vec{\alpha}_m'(0) = \vec{\alpha}_m''(0) = \ldots = \vec{\alpha}_m^{(m-1)}(0) = \vec{\alpha}_m^{(m+1)}(0) = \ldots = (0, 0) \text{ și } \vec{\alpha}_m^{(m)}(0) = (m!, 0).$$

Pentru $m = 1$, originea este un punct regulat (fig. 28). Pentru $m > 1$, originea este un punct singular de ordinul m.

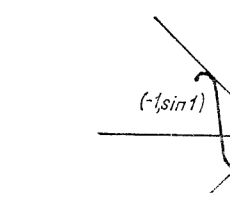


Fig. 29

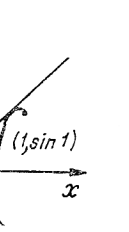


Fig. 30

3) Aplicația $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definită prin

$$\alpha(t) = \begin{cases} (e^{-1/t},\ e^{-1/t} \sin e^{1/t}) & t > 0 \\ (0, 0) & t = 0 \\ (-e^{-1/t},\ e^{1/t} \sin e^{-1/t}) & t < 0 \end{cases}$$

are o imagine cuprinsă între dreptele $y = \pm x$, avînd o infinitate de tangente în $(0, 0)$. De asemenea, observăm că α este diferențiabilă și $\vec{\alpha}'(0) = \vec{\alpha}''(0) = \ldots = \vec{\alpha}^{(m)}(0) = \ldots = (0, 0)$. De aceea originea este un punct singular (fig. 29). Punctele $(-1, \sin 1)$, $(1, \sin 1)$ sînt puncte asimptotice (vezi § 4).

4) În $\mathbb{R}^3$ considerăm curbe de tipul $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (x(t), y(t), t)$. Ele sînt regulate. Într-adevăr avem $\vec{\alpha} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + t\vec{k}$ și deci $\vec{\alpha}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + \vec{k}$, care nu se anulează, $\forall t \in I$ (vezi fig. 21).

Aceeași proprietate o au și curbele $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (x(t), t, z(t))$ sau $\alpha(t) = (t, y(t), z(t))$. Pentru exemplificare fie curba dată prin

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t,\ 0,\ e^{1/t}) & t < 0 \\ (0, 0, 0) & t = 0 \\ (t,\ e^{-1/t},\ 0) & t > 0. \end{cases}$$

Observăm că arcul $t \leqslant 0$ este situat în planul xOz, iar arcul $t \geqslant 0$ este situat în planul xOy (fig. 30). Observăm că α este o curbă regulată pentru care

$$\vec{\alpha}'(0) = (1, 0, 0),\ \vec{\alpha}''(0) = \ldots = \vec{\alpha}^{(m)}(0) = \ldots = (0, 0, 0).$$

§ 3. Cîmpuri vectoriale pe o curbă

Noțiunea de cîmp vectorial pe o curbă este o variantă a noțiunii generale de cîmp vectorial.

Fie $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ o curbă și $P = \alpha(t)$, $t \in I$, un punct arbitrar al său.

3.1. *Definiție. O funcție $\vec{Y}$ care asociază fiecărui $t \in I$ un vector $\vec{Y}(t)$ tangent la $\mathbb{R}^n$ în punctul $\alpha(t)$* se numește *cîmp vectorial* pe curba α (fig. 31).

Evident, viteza $\vec{\alpha}'$ este un cîmp vectorial pe curba α. Acest cîmp se mai numește și *cîmp tangent* la curba α (fig. 32).

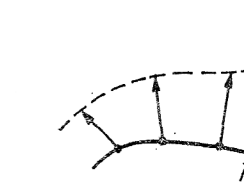


Fig. 31

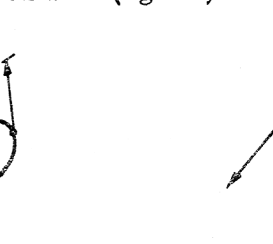


Fig. 32

Precizăm însă că spre deosebire de $\vec{\alpha}'$, cîmpurile vectoriale arbitrare pe α pot să conţină sau nu vectori al căror suport să fie tangent la curbă (fig. 31).

Proprietăţile cîmpurilor vectoriale pe curbe sînt analoage cu cele ale cîmpurilor vectoriale pe $\mathbb{R}^n$. Astfel avem

$$\vec{Y}(t) = y_1(t)\vec{e}_1(\alpha(t)) + y_2(t)\vec{e}_2(\alpha(t)) + \ldots + y_n(t)\vec{e}_n(\alpha(t)),$$

funcţiile $y_i : I \to \mathbb{R}$ numindu-se *coordonatele euclidiene* ale lui $\vec{Y}$.

Funcţiile compuse $\vec{e}_1(\alpha(t)), \ldots, \vec{e}_n(\alpha(t))$ sînt cîmpuri vectoriale pe α. Aceste cîmpuri vor fi notate pe scurt cu $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$.

Pentru cîmpurile $\vec{Y}(t)$ admitem definiţiile:

$$(\vec{Y} + \vec{Z})(t) = \vec{Y}(t) + \vec{Z}(t)$$

$$(f\vec{Y})(t) = f(t)\,\vec{Y}(t)$$

$$(\vec{Y}, \vec{Z})(t) = (\vec{Y}(t), \vec{Z}(t))$$

$$(\vec{Y} \times \vec{Z})(t) = \vec{Y}(t) \times \vec{Z}(t).$$

Evident aceste operaţii se traduc prin operaţii asupra coordonatelor cîmpurilor.

3.2. *Definiţie. Fie α o curbă regulată şi $\vec{Y}$ un cîmp vectorial pe α. Dacă $(\vec{Y}, \vec{\alpha}') = 0$, atunci $\vec{Y}$ se numeşte cîmp normal la α.*

Deoarece $\vec{Y}(t) = y_1(t)\vec{e}_1 + y_2(t)\vec{e}_2 + \ldots + y_n(t)\vec{e}_n$, deducem că orice cîmp Y este echivalent cu o aplicaţie de tipul $F : I \to \mathbb{R}^n$. De aceea apare naturală definiţia: $\vec{Y}$ se numeşte *diferenţiabil* dacă coordonatele sale sînt diferenţiabile. De asemenea precizăm că derivata unui cîmp $\vec{Y}$,

$$\vec{Y}' = \frac{dy_1}{dt}\vec{e}_1 + \frac{dy_2}{dt}\vec{e}_2 + \ldots + \frac{dy_n}{dt}\vec{e}_n,$$

este tot un cîmp pe curba α. În particular, derivata $\vec{\alpha}''$ a cîmpului viteză $\vec{\alpha}'$ asociat lui α dă *cîmpul accelerajie*. În general accelerajia nu este dirijată după tangenta la curbă. Avem

$$(a\vec{Y} + b\vec{Z})' = a\vec{Y}' + b\vec{Z}', \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$(f\vec{Y})' = f'\vec{Y} + f\vec{Y}'$$

$$(\vec{Y}, \vec{Z})' = (\vec{Y}', \vec{Z}) + (\vec{Y}, \vec{Z}')$$

$$(\vec{Y} \times \vec{Z})' = \vec{Y}' \times \vec{Z} + \vec{Y} \times \vec{Z}'.$$

Penultima formulă arată că dacă $(\vec{Y}, \vec{Z}) = \text{const.}$, atunci $(\vec{Y}', \vec{Z}) + (\vec{Y}, \vec{Z}') = 0$. În particular, dacă $\vec{Y}$ are lungimea constantă, atunci $\vec{Y}$ şi $\vec{Y}'$ sînt ortogonali în orice punct (fig. 33). Într-adevăr relaţia $\|\vec{Y}\|^2 = (\vec{Y}, \vec{Y}) = \text{const.}$, implică $(\vec{Y}, \vec{Y}') = 0$.

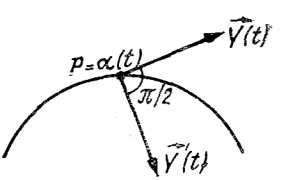


Fig. 33

De aceea dacă ne imaginăm că α este traiectoria

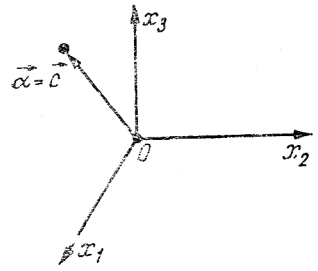


Fig. 34

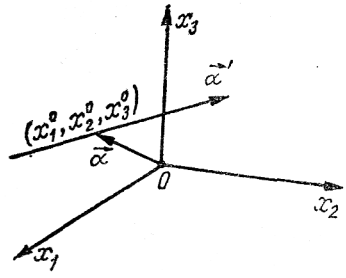


Fig. 35

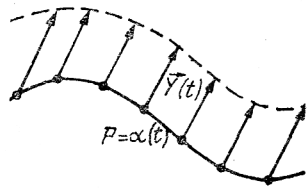


Fig. 36

unui punct material ce se deplasează cu o viteză de modul constant, atunci accelerația este un cîmp normal la α (dirijată după normala la curbă).

3.3. *Definiție. Un cîmp $\vec{Y}$ se numește paralel dacă coordonatele sale sînt constante.*

3.4. Teoremă. Fie curba $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$, unde I este un interval deschis din $\mathbb{R}$.

1) Curba α este constantă (se reduce la un punct) dacă și numai dacă cîmpul viteză $\vec{\alpha}'$ este identic nul.

2) Curba neconstantă α este o dreaptă dacă și numai dacă cîmpul accelerație este identic nul (cîmpul viteză este paralel).

3) Un cîmp $\vec{Y}$ pe α este paralel dacă și numai dacă $\vec{Y}' = \vec{0}$.

Demonstrație. 1) Fie curba $\vec{\alpha}(t) = x_1(t)\vec{e}_1 + x_2(t)\vec{e}_2 + \ldots + x_n(t)\vec{e}_n$. Dacă $x_1(t) = a_1$, $x_2(t) = a_2, \ldots, x_n(t) = a_n$, $\forall\, t \in I$, atunci $\vec{\alpha}(t) = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \ldots + a_n\vec{e}_n$ și $\vec{\alpha}'(t) = (0, 0, \ldots, 0)$, $\forall\, t$. Reciproc, din $\vec{\alpha}'(t) = \vec{0}$, $\forall\, t \in I$, rezultă $x_1'(t) = 0$, $x_2'(t) = 0, \ldots, x_n'(t) = 0, \forall\, t \in I$ și deci $x_1(t) = a_1$, $x_2(t) = a_2, \ldots, x_n(t) = a_n$ (fig. 34).

2) Fie $\vec{\alpha}(t) = (x_1^0 + l_1t)\vec{e}_1 + (x_2^0 + l_2t)\vec{e}_2 + \ldots + (x_n^0 + l_nt)\vec{e}_n$. Găsim $\vec{\alpha}'(t) = l_1\vec{e}_1 + l_2\vec{e}_2 + \ldots + l_n\vec{e}_n$ și $\vec{\alpha}''(t) = (0, 0, \ldots, 0)$. Reciproc, din $x_1''(t) = 0$, $x_2''(t) = 0, \ldots, x_n''(t) = 0$, $\forall t \in I$, obținem $x_1 = x_1^0 + l_1t$, $x_2 = x_2^0 + l_2t, \ldots, x_n = x_n^0 + l_nt$ (fig. 35).

3) Fie $\vec{Y} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + \ldots + b_n\vec{e}_n$. Rezultă $\vec{Y}' = (0, 0, \ldots, 0)$. Reciproc, din $Y' = \vec{0}$, rezultă $\dfrac{dy_1}{dt} = 0$, $\dfrac{dy_2}{dt} = 0, \ldots, \dfrac{dy_n}{dt} = 0$, $\forall\, t \in I$, sau $y_1 = b_1, y_2 = b_2, \ldots, y_n = b_n$ (fig. 36).

§ 4. Ramuri infinite

Fie I un interval deschis (a, b), a poate fi și $-\infty$, iar b poate fi și $+\infty$ și $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ o curbă.

4.1. *Definiție. Dacă într-o extremitate t_0 a intervalului deschis I avem $\lim\limits_{t \to t_0} \|\vec{\alpha}(t)\| = \infty$, atunci spunem că α posedă o ramură infinită.*

Este evident că α posedă o ramură infinită în extremitatea t_0 dacă și numai dacă cel puțin una dintre coordonatele lui α tinde către ∞ pentru $t \to t_0$ (adică mulțimea $\alpha(I)$ nu este mărginită în $\mathbb{R}^n$).

4.2. *Definiție. Dacă există versorul*

$$\vec{u} = \lim_{t \to t_0} \frac{\vec{\alpha}(t)}{\|\vec{\alpha}(t)\|}$$

atunci direcția sa se numește direcția asimptotică a ramurii infinite.

4.3. *Definiție. Fie α o curbă care posedă o ramură infinită pentru o extremitate t_0 a lui I și $P = \alpha(t)$. Dreapta D se numește asimptotă la ramura infinită dacă* (fig. 37)

$$\lim_{t \to t_0} d(P\,;D) = 0,$$

unde $d(P\,;D)$ *este distanța de la punctul P la dreapta D.*

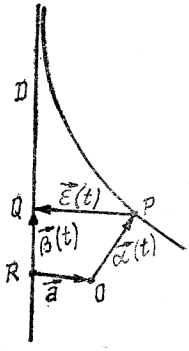


Fig. 37

Uneori se spune că ramura infinită se apropie asimptotic de D. De asemenea, observăm că proprietatea $\lim_{t \to t_0} d(P\,;D) = 0$ care definește asimptota D este echivalentă cu a spune că paralela dusă prin $P = \alpha(t)$ la D tinde către D pentru $t \to t_0$ (fig. 37).

4.4. Teoremă. Dacă D este o asimptotă a unei ramuri infinite, atunci direcția lui D este o direcție asimptotică a ramurii respective.

Demonstrație. Fie α o curbă care posedă o ramură infinită într-o extremitate t_0 a lui I. Presupunem că acéastă ramură posedă o asimptotă D (fig. 37). Notăm cu Q proiecția lui P pe D și punem $\overrightarrow{PQ} = \vec{\varepsilon}(t)$. Prin ipoteză avem

$$\lim_{t \to t_0} \|\vec{\varepsilon}(t)\| = 0 \Rightarrow \lim_{t \to t_0} \vec{\varepsilon}(t) = \vec{0}.$$

De asemenea notăm cu R proiecția originii O a spațiului $\mathbb{R}^n$ pe D și punem $\overrightarrow{RO} = \vec{a}$. Segmentul orientat $\overrightarrow{RQ}$ reprezintă pe $\vec{\beta}(t) = \vec{a} + \vec{\alpha}(t) + \vec{\varepsilon}(t)$ și deci versorul asimptotei D este

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\vec{\beta}(t)}{\|\vec{\beta}(t)\|}.$$

Pe de altă parte, $\forall\, t \in I$, avem

$$\|\vec{\beta}(t)\| - \|\vec{a} + \vec{\varepsilon}(t)\| \leqslant \|\vec{\alpha}(t)\| \leqslant \|\vec{\beta}(t)\| + \|\vec{a} + \vec{\varepsilon}(t)\|.$$

Astfel din $\lim_{t \to t_0} \|\vec{\alpha}(t)\| = \infty$ rezultă $\lim_{t \to t_0} \|\vec{\beta}(t)\| = \infty$. Aceasta înseamnă că în vecinătatea lui t_0 avem $\|\vec{\beta}(t)\| > 0$. Dacă în inegalitățile anterioare împărțim cu $\|\vec{\beta}(t)\|$ și trecem la limită, atunci găsim:

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\|\vec{\alpha}(t)\|}{\|\vec{\beta}(t)\|} = 1.$$

Prin urmare

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\vec{\beta}(t)}{\|\vec{\beta}(t)\|} = \lim_{t \to t_0} \frac{\vec{\beta}(t)}{\|\vec{\alpha}(t)\|} = \lim_{t \to t_0} \frac{\vec{\alpha}(t) + \vec{a} + \vec{\varepsilon}(t)}{\|\vec{\alpha}(t)\|} = \vec{u} + \lim_{t \to t_0} \frac{\vec{a} + \vec{\varepsilon}(t)}{\|\vec{\alpha}(t)\|} = \vec{u}.$$

De aici rezultă că dacă asimptota există, atunci ea este unică.

4.5. Observaţii

1) Studiul anterior arată că pentru a decide dacă o ramură infinită posedă o asimptotă trebuie mai întîi să vedem dacă ea admite o direcţie asimptotică.

Dacă ramura nu admite o direcţie asimptotică, atunci ea nu admite nici asimptotă.

Dacă ramura admite o direcţie asimptotică $\vec{u}$, atunci prin $P = \alpha(t)$, se duce o dreaptă D_P care are direcţia $\vec{u}$. Dacă D_P are o limită D pentru $t \to t_0$, atunci dreapta D este asimptota ramurii considerate. Dacă D_P nu are o limită pentru $t \to t_0$, atunci ramura infinită studiată nu are asimptotă.

2) Pentru studiul ramurilor infinite ale curbelor plane $C : f(x, y) = a$ recomandăm lucrarea [18].

3) Fie $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ o curbă şi t_0 o extremitate a intervalului deschis I. Dacă $\lim\limits_{t \to t_0} \alpha(t) = A$, atunci A se numeşte *punct asimptotic* al curbei α.

4.6. Exemple

1) Să cercetăm ramurile infinite ale *foliului lui Descartes*, curba $\alpha = (x, y) : ((-\infty, -1) \cup \cup (-1, \infty)) \to \mathbb{R}^2$, $x = \dfrac{3at}{1 + t^3}$, $y = \dfrac{3at^2}{1 + t^3}$. Pentru aceasta calculăm limitele:

$$\lim_{t \to \pm\infty} x(t) = 0 \qquad \lim_{t \nearrow -1} x(t) = \infty \qquad \lim_{t \searrow -1} x(t) = -\infty.$$

$$\lim_{t \to \pm\infty} y(t) = 0 \qquad \lim_{t \nearrow -1} y(t) = -\infty \qquad \lim_{t \searrow -1} y(t) = \infty.$$

De aici rezultă că $O(0, 0)$ este un punct asimptotic al curbei care se suprapune peste punctul obişnuit $t = 0$. De asemenea pentru $t \to -1$ se obţin două ramuri infinite. Deoarece

$$\lim_{t \to -1} \frac{y(t)}{x(t)} = -1,$$

deducem că ambele ramuri infinite admit aceeaşi direcţie asimptotică $(1, -1)$. Pe de altă parte

$$\lim_{t \to -1} (y(t) + x(t)) = \lim_{t \to -1} \frac{3at}{1 + t^2 - t} = -a$$

şi astfel avem asimptota oblică $y + x + a = 0$ (fig. 38).

2) Să cercetăm ramurile infinite ale elicei (fig. 21), $\alpha = (x, y, z) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$. Deoarece $\lim\limits_{t \to \pm\infty} z(t) = \pm\infty$, rezultă că elicea admite două ramuri infinite. Ambele ramuri au direcţia asimptotică $(0, 0, 1)$, direcţia axei Oz, întrucît

$$\lim_{t \to \pm\infty} \frac{x(t)}{z(t)} = \lim_{t \to \pm\infty} \frac{y(t)}{z(t)} = 0.$$

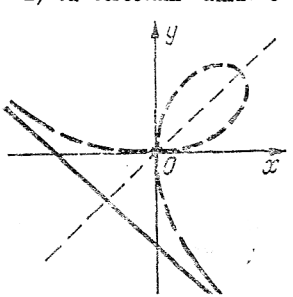


Fig. 38

Evident, dreapta ce trece prin punctul $(a \cos t, a \sin t, bt)$ şi este paralelă cu Oz nu admite o poziţie limită pentru $t \to \pm\infty$. De aceea cele două ramuri infinite ale elicei nu admit asimptote.

§ 5. Reprezentarea normală a unei curbe

Fiind dată o curbă $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ putem construi alte curbe care au aceeaşi imagine cu α dar care parcurg această imagine cu viteze diferite.

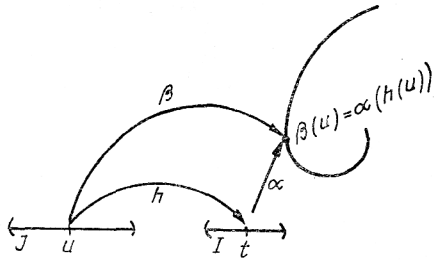


Fig. 39

5.1. *Definiţie. Fie I, J două intervale deschise ale dreptei reale, $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ o curbă şi $h : J \to I$ o funcţie diferenţiabilă. Funcţia compusă $\beta = \alpha \circ h : J \to \mathbb{R}^n$ este o curbă care se numeşte reparametrizarea lui α prin h* (fig. 39).

În orice moment u din intervalul J, curba β este localizată în punctul $\beta(u) = \alpha(h(u))$, care este atins de curba α la momentul $h(u)$ din intervalul I. Astfel β şi α urmează aceeaşi traiectorie dar, în general, cu viteze diferite. Practic, pentru a obţine coordonatele lui β se substituie $t = h(u)$ în coordonatele lui α.

Observăm că trecerea de la α la β păstrează multiplicitatea punctelor lui $\alpha(I)$ dacă şi numai dacă h este o bijecţie.

5.2. Exemple

1) Fie arcul de cerc $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t)$, $t \in (0, 2\pi)$. Punînd $u = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}$ găsim reparametrizarea

$$\beta(u) = \left(r \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}, r \frac{2u}{u^2 + 1} \right), \ u \in \mathbb{R}.$$

2) Fie curba $\alpha(t) = (2\cos^2 t, \sin 2t, 2\sin t)$, $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Observăm că α se obţine intersectînd cilindrul $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ cu sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (fig. 40).

Punem $u = \sin t$. Reparametrizarea lui α prin u este

$$\beta(u) = (2(1 - u^2), \ 2u\sqrt{1 - u^2}, 2u), \ u \in (0, 1).$$

5.3. Lemă. Dacă β este reparametrizarea lui α prin h, atunci

$$\frac{d\vec{\beta}}{du}(u) = \frac{d\vec{\alpha}}{dh}(h(u)) \frac{dh}{du}(u).$$

Pe scurt, $\vec{\beta}' = (\vec{\alpha}' \circ h)h'$. Astfel observăm că dacă h' nu se anulează, atunci punctele regulate ale lui α sînt puncte regulate pentru β, iar punctele singulare ale lui α sînt puncte singulare de acelaşi fel pentru β. De asemenea rezultă că definiţia tangentei într-un punct regulat ca şi într-un punct singular de ordinul n nu depinde de parametrul ales (direcţia ei rămîne invariantă, iar punctul prin care trece este fix).

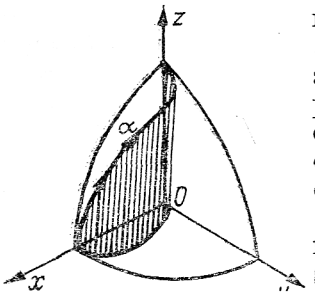


Fig. 40

Pentru ca bijecţia $h : J \to I$ să fie un difeomorfism este necesar şi suficient ca derivata h' să nu se anuleze; acest lucru rezultă din proprietăţile de existenţă şi de diferenţiabilitate ale

funcţiilor inverse $\left(\text{se ştie}: (h^{-1})' = \dfrac{1}{h' \circ h^{-1}}\right)$. Dacă h este un difeomorfism, atunci curbele α şi β se numesc *echivalente*.

Precizăm că dacă $h' > 0$, atunci h păstrează orientarea.

Fie $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ o curbă regulată dată prin ecuaţia vectorială $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(t)$, $t \in I$ şi $\vec{\alpha}'(t)$ vectorul viteză la momentul t. Lungimea $v(t) = \|\vec{\alpha}'(t)\|$ se numeşte viteza curbei la momentul t.

În fizică, distanţa parcursă de un mobil este determinată prin integrarea vitezei sale în raport cu timpul. Geometric, definim *lungimea arcului curbei regulate* α de la $t = a$ la $t = b$ ca fiind numărul

$$l = \int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t, \quad a < b,$$

iar *elementul de arc* prin $\mathrm{d}s = v(t)\,\mathrm{d}t$.

Există probleme în care ne interesează numai imaginea curbei şi nu ne interesează viteza cu care punctul curent parcurge această imagine. Cu alte cuvinte ne interesează imaginea din spaţiul $\mathbb{R}^n$ şi nu parametrizarea particulară $t \to \alpha(t)$ care reprezintă această imagine. În asemenea probleme se obişnuieşte ca α să se înlocuiască printr-o reparametrizare echivalentă β pentru care viteza să fie egală cu unitatea.

5.4. Teoremă. Dacă $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ este o curbă regulată, atunci există o reparametrizare β echivalentă cu α astfel încît β să aibă viteza unu. β se numeşte *reprezentarea normală* a lui α.

Demonstraţie. Fie $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ o curbă regulată, adică $\vec{\alpha}'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in I$. Fixăm $a \in I$ şi considerăm funcţia care dă lungimea arcului $s : I \to J = s(I)$, $s(t) = \int_a^t \|\vec{\alpha}'(t)\|\mathrm{d}t$. Această funcţie se numeşte *abscisa curbilinie* (fig. 41).

Observăm că $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \|\vec{\alpha}'(t)\| > 0$, adică s este strict crescătoare şi deci bijectivă; teorema funcţiei inverse asigură că funcţia inversă $s^{-1} : J \to I$ definită prin $t = t(s)$ are derivata

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}(s) = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t(s))} > 0.$$

Mai mult, inversa $t = t(s)$ este un difeomorfism. De aceea funcţia compusă $\beta = \alpha \circ s^{-1} : J \to \mathbb{R}^n$ sau $\beta(s) = \alpha(t(s))$ este o reparametrizare a lui α, prin funcţia $t = t(s)$, echivalentă cu α (vezi fig. 39 pentru $u = s$). Să arătăm că viteza lui β este unu. Avem

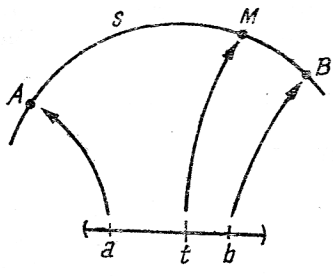


Fig. 41

$$\left\|\frac{\mathrm{d}\vec{\beta}}{\mathrm{d}s}\right\| = \left\|\frac{\mathrm{d}\vec{\alpha}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right\| = \|\vec{\alpha}'(s)\|\,\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}} = 1.$$

Astfel abscisa curbilinie a unei curbe regu-

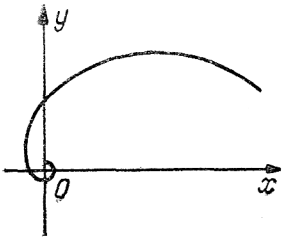


Fig. 42

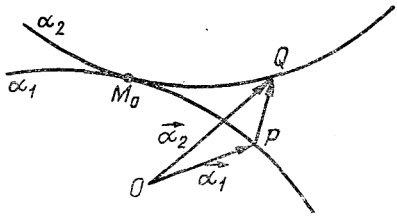


Fig.43

late se utilizează pentru obţinerea unei reparametrizări de viteză unu. Precizăm că dacă α este o curbă orientată, atunci prin trecerea la reprezentarea normală orientarea nu se schimbă deoarece $\frac{dt}{ds} > 0$.

5.5 Exemple

1) Fie spirala logaritmică (fig. 42) $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (ae^{-t}(\cos t - \sin t), ae^{-t}(\cos t + \sin t))$, $a > 0$. Din $\vec{\alpha}'(t) = -2ae^{-t}\cos t\vec{i} - 2ae^{-t}\sin t\vec{j}$ rezultă că α este o curbă regulată cu viteza $v(t) = 2ae^{-t}$. Dacă fixăm $t = 0$, atunci abscisa curbilinie este dată de

$$s = \int_0^t v(t)dt = -2ae^{-t}\Big|_0^t = 2a(1 - e^{-t}).$$

De aici găsim $t = \ln\frac{2a}{2a - s}$, $s \in (-\infty, 2a)$ şi astfel reprezentarea normală a lui α este $\beta : (-\infty, 2a) \to \mathbb{R}^2$,

$$\beta(s) = \left(\frac{2a - s}{2}\left(\cos\ln\frac{2a}{2a - s} - \sin\ln\frac{2a}{2a - s}\right), \frac{2a - s}{2}\left(\cos\ln\frac{2a}{2a - s} + \sin\ln\frac{2a}{2a - s}\right)\right).$$

2) Să considerăm acum elicea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$. Deoarece ecuaţia vectorială a curbei este $\vec{\alpha}(t) = a\cos t\vec{i} + a\sin t\vec{j} + bt\vec{k}$, găsim $\vec{\alpha}'(t) = -a\sin t\vec{i} + a\cos t\vec{j} + b\vec{k}$ şi deci $\|\vec{\alpha}'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2} = c$. Dacă măsurăm lungimea arcului de la $t = 0$ atunci

$$s = \int_0^t c\,dt = ct.$$

Astfel $t = \frac{s}{c}$ şi reprezentarea normală a elicei este

$$\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ \beta(s) = \alpha\left(\frac{s}{c}\right) = \left(a\cos\frac{s}{c}, a\sin\frac{s}{c}, \frac{bs}{c}\right).$$

§ 6. Contactul a două curbe

Fie $\alpha_1, \alpha_2 : I \to \mathbb{R}^n$ două curbe care au un punct regulat comun M_0 corespunzător unei valori t_0 din interiorul lui I. Fie $P = \alpha_1(t)$ şi $Q = \alpha_2(t)$, pentru t dintr-o vecinătate a lui t_0. Formăm vectorul $\overline{PQ} = \overline{\alpha}_2 - \overline{\alpha}_1$ (fig. 43).

6.1. *Definiție. Dacă*

$$\lim_{t\to t_0} \frac{\overline{PQ}}{(t-t_0)^i} = \begin{cases} \vec{0} & \text{pentru } i = 1, \ldots, n-1, n, \\ \neq \vec{0} & \text{pentru } i = n+1 \end{cases}$$

atunci se spune că $\alpha_1(I)$ și $\alpha_2(I)$ au în M_0 un contact de ordinul n.

Dacă limita precedentă este zero, $\forall\, i \in \mathbb{N}$, atunci vom spune că α_1 și α_2 au în M_0 un contact de ordin infinit.

Formulele lui Taylor

$$\overline{\alpha}_i(t) = \overline{\alpha}_i(t_0) + \frac{t-t_0}{1\,!}\overline{\alpha}_i'(t_0) + \ldots + \frac{(t-t_0)^n}{n\,!}\overline{\alpha}_i^{(n)}(t_0) +$$

$$+ \frac{(t-t_0)^{n+1}}{(n+1)\,!}[\overline{\alpha}_i^{(n+1)}(t_0) + \overline{\varepsilon}_i(t-t_0)], \quad i = 1, 2,$$

unde $\lim\limits_{t\to t_0}\overline{\varepsilon}_i(t-t_0) = \overline{0}$, arată că α_1 și α_2 au în M_0 un contact de ordinul n dacă și numai dacă curba $\alpha_2 - \alpha_1$ admite pe M_0 drept punct singular de ordinul $n+1$ sau dacă și numai dacă

$$\alpha_1^{(k)}(t_0) = \alpha_2^{(k)}(t_0) \qquad k = 0, 1, \ldots, n,$$

$$\alpha_1^{(n+1)}(t_0) \neq \alpha_2^{(n+1)}(t_0).$$

6.2. *Observații*

1) Contactul de ordinul n corespunde la ideea intuitivă că în M_0 curbele α_1 și α_2 au $n+1$ puncte confundate comune.

2) Curbele α_1 și α_2 au în punctul regulat comun M_0 un contact de ordinul unu dacă și numai dacă au aceeași tangentă.

CURBE ÎN $\mathbb{R}^2$

§ 7. Tangenta și normala

Raportăm planul la reperul natural și considerăm curba $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$.

Fie $P = \alpha(t)$ un punct regulat al curbei. Se știe (§2) că dreapta care trece prin P și are ca vector director pe $\vec{\alpha}'(t)$ se numește *tangenta* la curba α în P. Deoarece sîntem în plan, hiperplanul normal se reduce la o dreaptă, numită *normala* curbei.

7.1. *Definiție. Dreapta care trece prin punctul regulat $P = \alpha(t)$ și este perpendiculară pe $\vec{\alpha}'(t)$ se numește normala curbei în punctul P* (fig. 23).

Într-un punct regulat fixat, $P = \alpha(t)$, tangenta și normala la curbă au respectiv ecuațiile:

$$\frac{x - x(t)}{x'(t)} = \frac{y - y(t)}{y'(t)} \text{ și } (x - x(t))x'(t) + (y - y(t))y'(t) = 0.$$

Dacă $P = \alpha(t)$ este un punct singular de ordinul m, se ştie că dreapta care trece prin P şi are ca vector director pe $\vec{\alpha}^{(m)}(t)$ se numeşte tangenta curbei în punctul P (vezi definiţia 2.4), figura 44.

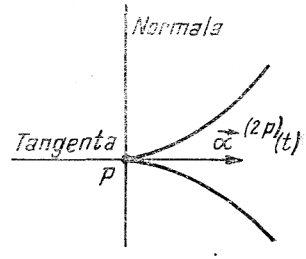


Fig. 44

7.2. *Definiţie. Fie $P = \alpha(t)$ un punct singular de ordinul m pentru curba α. Dreapta care trece prin punctul P şi este perpendiculară pe $\vec{\alpha}^{(m)}(t)$ se numeşte normala curbei în punctul P* (fig. 44).

Într-un punct singular de ordinul m, $P = \alpha(t)$, tangenta şi normala la curbă au respectiv ecuaţiile

$$\frac{x - x(t)}{x^{(m)}(t)} = \frac{y - y(t)}{y^{(m)}(t)} \text{ şi } (x - x(t))x^{(m)}(t) + (y - y(t))y^{(m)}(t) = 0.$$

7.3. *Observaţie.* Segmentul de pe tangentă (normală) determinat de punctul de pe curbă şi de intersecţia acestei tangente (normale) cu Ox, se numeşte *segment tangentă* (*normală*). Proiecţia acestui segment pe Ox se numeşte *subtangentă* (*subnormală*) (fig. 45).

§ 8. Curbe definite prin ecuaţii carteziene implicite

Curbele plane pot fi introduse pornind de la funcţii diferenţiabile de tipul $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to f(x, y)$. Deoarece

$$J(f) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right],$$

punctele critice ale funcţiei f (dacă există!) se află rezolvînd sistemul:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Punctele în care cel puţin una dintre aceste derivate nu se anulează sînt puncte regulate.

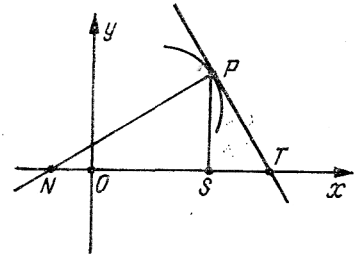
Mulţimea

$$C = f^{-1}(c) = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = c,\ c = \text{fixat}\}$$

se numeşte *mulţime de nivel constant* c sau *mulţime de ecuaţie carteziană implicită* $f(x, y) = c$. Pe scurt se scrie $C : f(x, y) = c$.

Precizăm că în general C conţine atît puncte regulate cît şi puncte critice ale lui f.

Fie $(x_0, y_0) \in C$. Mulţimea tuturor punctelor din C a căror distanţă faţă de (x_0, y_0) este mai mică decît un număr $\varepsilon > 0$ se numeşte *vecinătate* a lui (x_0, y_0) în C.



PT - segment tangentă
PN - segment normală
ST - subtangentă
SN - subnormală

Fig. 45

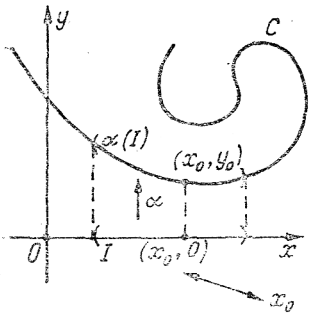


Fig. 46

8.1. Teoremă. Dacă o soluţie (x_0, y_0) a ecuaţiei $f(x, y) = c$ este un punct regulat al aplicaţiei f, atunci există o vecinătate a acestui punct în care ecuaţia $f(x, y) = c$ defineşte o curbă simplă şi regulată (fig. 46).

Demonstraţie. Ipoteza că $P(x_0, y_0)$ este un punct regulat asigură că, în P, cel puţin una dintre derivatele $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ nu se anulează. Fie $\frac{\partial f}{\partial y}(P) \neq 0$. Teorema funcţiei implicite definită de o ecuaţie de forma $f(x, y) = c$ arată că există o vecinătate I a lui x_0 în $\mathbb{R}$ şi o funcţie diferenţiabilă $x \to y(x)$ astfel încît pentru orice $x \in I$ să avem

$$f(x, y(x)) = c, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Rezultă că porţiunea din C din vecinătatea punctului P este reprezentată de graficul funcţiei $x \to y(x)$ sau de aplicaţia $\alpha : I \to C$, $\alpha(t) = (t, y(t))$, şi deci această porţiune este o curbă simplă şi regulată.

În ipotezele teoremei 8.1 (funcţia f este regulată în punctele lui C), C este o reuniune de arce simple şi regulate în sensul definiţiilor 1.2 şi 2.1.

Dacă $f(x, y)$ este un polinom de gradul n, atunci curba C se numeşte *curbă algebrică de ordinul n*. În particular avem următoarele denumiri: curbe algebrice de ordinul unu (*drepte*), curbe algebrice de ordinul doi (*conice*), curbe algebrice de ordinul trei (*cubice*), curbe algebrice de ordinul patru (*cuartice*) etc.

8.2. *Tangenta.* Fie $P(x_0, y_0)$ un punct regulat al lui C. În baza definiţiei din § 2 şi a teoremei 8.1, observăm că tangenta la C în P are ecuaţia

$$(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0,$$

iar normala are ecuaţia

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}.$$

8.3. *Observaţii*

1) În situaţii concrete curba C poate fi dată printr-o ecuaţie şi prin mai multe inecuaţii în x, y (inecuaţiile precizează o anumită porţiune din plan).

2) Reprezentarea curbei C (sau a unei porţiuni din C) în forma $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, se poate face prin intermediul teoremei 8.1 sau prin artificii de calcul.

3) Fie curba $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. În general trecerea de la reprezentarea parametrică la reprezentarea carteziană explicită se poate face numai local. Într-adevăr, dacă $x'(t_0) \neq 0$ atunci teorema funcţiei inverse arată că în vecinătatea lui $x_0 = x(t_0)$ restricţia lui $x = x(t)$ admite inversa $t = t(x)$.

Astfel restricţia lui $y = y(t)$ apare ca o funcţie compusă de tipul $y = y(t(x))$.

4) În general dacă există o funcţie f astfel încît

$$f(x(t), y(t)) = c, \ \forall\ t \in I,$$

atunci $f(x, y) = c$ este ecuaţia carteziană implicită a curbei $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$.

5) Fie $C : f(x, y) = c$ o curbă regulată. Gradientul $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$, definit pe C, este un cîmp vectorial normal la C.

8.4. Exemple.

1) *Dreapta.* Ecuaţia carteziană implicită a unei drepte din plan este $ax + by + c = 0$, iar ecuaţiile sale parametrice sînt $x = x_0 + lt$, $y = y_0 + mt$, $t \in \mathbb{R}$.

2) *Cercul.* Cercul de rază r şi cu centrul în (x_0, y_0) are ecuaţia carteziană implicită $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$. Obişnuit cercul se reprezintă prin ecuaţiile parametrice $y = x_0 + r\cos t$, $y = y_0 + r\sin t$, $t \in [0, 2\pi)$.

3) *Elipsa* are ecuaţia carteziană implicită (canonică) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Ea se poate parametriza în forma $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in [0, 2\pi)$.

Hiperbola are ecuaţia carteziană implicită (canonică) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Ramura din dreapta a hiperbolei se poate reprezenta prin $x = a\,\mathrm{ch}\,t$, $y = b\,\mathrm{sh}\,t$, $t \in \mathbb{R}$.

Parabola are ecuaţia carteziană explicită (canonică) $x = \frac{y^2}{2p}$. De aceea ea se poate parametriza în forma $x = \frac{t^2}{2p}$, $y = t$, $t \in \mathbb{R}$.

§ 9. Forma unei curbe în vecinătatea unui punct al său

Fie curba $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ şi P un punct din $\alpha(I)$. Mulţimea tuturor punctelor din $\alpha(I)$ a căror distanţă faţă de P este mai mică decît un număr $\varepsilon > 0$ se numeşte *vecinătate* a lui P în $\alpha(I)$.

Fie $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ o curbă din plan, ipoteză care va fi subînţeleasă în cele ce urmează. Considerăm un punct particular $P \in \alpha(I)$ aşa ca $\alpha(t) = P$ şi cercetăm care este aspectul curbei în vecinătatea lui P. În particular cercetăm care este poziţia curbei în raport cu tangenta în acest punct.

Pentru un h din vecinătatea lui zero, punctul $Q = \alpha(t + h)$, $t + h \in I$, este în vecinătatea punctului P. De aceea putem folosi formula Taylor

$$\overline{\alpha}(t + h) = \overline{\alpha}(t) + \frac{h}{1!}\overline{\alpha}'(t) + \frac{h^2}{2!}\overline{\alpha}''(t) + \ldots + \frac{h^n}{n!}[\overline{\alpha}^{(n)}(t) + \overline{\varepsilon}(h)]$$

cu $\lim\limits_{h \to 0} \overline{\varepsilon}(h) = \vec{0}$. Evident, avem $\overline{PQ} = \overline{\alpha}(t + h) - \overline{\alpha}(t)$.

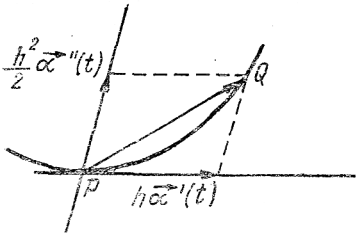


Fig. 47

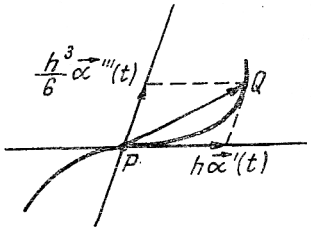


Fig. 48

Vom face studiul urmărind două cazuri : cazul în care P este un punct *regulat* şi cazul în care P este *singular*.

a) *P este un punct regulat.*

Prin ipoteză în P avem $\vec{\alpha}'(t) \neq \vec{0}$ şi tangenta în P este definită de punctul P şi de vectorul $\vec{\alpha}'(t)$.

9.1. Presupunem că $\vec{\alpha}'(t)$ şi $\vec{\alpha}''(t)$ determină o bază în $T_P\mathbb{R}^2$. Formula Taylor de ordinul doi dă

$$\overrightarrow{PQ} = h\vec{\alpha}'(t) + \frac{h^2}{2}\vec{\alpha}''(t) + \frac{h^2}{2}\vec{\varepsilon}(h), \lim_{h\to 0}\vec{\varepsilon}(h) = \vec{0}.$$

Astfel pentru $|h|$ suficient de mic, $\left(h, \frac{h^2}{2}\right)$ constituie cu aproximaţie coordonatele vectorului $\overrightarrow{PQ}$ faţă de baza $\vec{\alpha}'(t)$, $\vec{\alpha}''(t)$. Dacă h trece prin zero, atunci prima coordonată îşi schimbă semnul, iar a doua şi-l păstrează.

De aceea arcul se află în semiplanul ce conţine pe $\vec{\alpha}''(t)$ şi traversează în P) dreapta determinată de P şi de $\vec{\alpha}''(t)$. Ţinînd cont că dreapta determinată de P şi $\alpha''(t)$ este tangenta la α în P, deducem că arcul are aspectul din figura 47.

9.2. Presupunem că $\vec{\alpha}''(t)$ este coliniar cu $\vec{\alpha}'(t)$ şi că $\vec{\alpha}'(t)$ împreună cu $\vec{\alpha}'''(t$ constituie o bază în $T_P\mathbb{R}^2$. Prin ipoteză $\exists\, r \in \mathbb{R}$ aşa ca $\vec{\alpha}''(t) = r\vec{\alpha}'(t)$. Astfe formula Taylor de ordinul trei dă

$$\overrightarrow{PQ} = \left(h + r\frac{h^2}{2}\right)\vec{\alpha}'(t) + \frac{h^3}{6}\vec{\alpha}'''(t) + \frac{h^3}{6}\vec{\varepsilon}(h), \lim_{h\to 0}\vec{\varepsilon}(h) = \vec{0}.$$

Pentru $|h|$ suficient de mic $h + r\frac{h^2}{2} \sim h$, iar $\left(h, \frac{h^3}{6}\right)$ constituie cu aproximaţie coordonatele lui $\overrightarrow{PQ}$ în baza $\vec{\alpha}'(t)$, $\vec{\alpha}'''(t)$. Dacă h trece prin zero, atunci ambele coordonate îşi schimbă semnul. De aceea, la trecerea prin P, punctul Q traversează şi tangenta şi dreapta definită de P şi $\vec{\alpha}'''(t)$. Astfel, în vecinătatea lui P, curba are aspectul din figura 48, iar P se numeşte *punct de inflexiune.*

9.3. Să generalizăm situaţiile anterioare. Presupunem că derivatele de ordinele 2,3, ... n — 1, sînt coliniare cu $\vec{\alpha}'(t)$ iar $\vec{\alpha}'(t)$ şi $\vec{\alpha}^{(n)}(t)$ determină o bază în $T_P\mathbb{R}^2$.

Deoarece $\forall\, k, 1 < k < n, \exists\, r_k \in \mathbb{R}$ aşa ca $\vec{\alpha}^{(k)}(t) = r_k \vec{\alpha}'(t)$, formula Taylor de ordinul n dă

$$\overrightarrow{PQ} = \left(h + r_2 \frac{h^2}{2} + \ldots + r_{n-1} \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\right) \vec{\alpha}'(t) + \frac{h^n}{n!} \vec{\alpha}^{(n)}(t) + \frac{h^n}{n!} \vec{\varepsilon}(h),$$

$$\lim_{h \to 0} \vec{\varepsilon}(h) = \vec{0}.$$

De aceea pentru $|h|$ suficient de mic, perechea $\left(h, \frac{h^n}{n!}\right)$ realizează cu aproximaţie coordonatele lui $\overrightarrow{PQ}$ în raport cu baza $\vec{\alpha}'(t)$, $\vec{\alpha}^{(n)}(t)$.

Rezultă că în vecinătatea lui P avem: dacă n este par, atunci curba are aspectul din figura 47; dacă n este impar, atunci curba are aspectul din figura 48.

9.4. Observaţii

1) Fie P un punct regulat al unei curbe α. Dacă, în P, toate derivatele de ordinele $2, 3, \ldots, n$ sînt coliniare cu $\vec{\alpha}'(t)$, în particular dacă toate sînt nule, atunci nu putem preciza poziţia curbei în raport cu tangenta cu ajutorul acestor derivate. Tot ce putem spune este că în vecinătatea lui P abaterea curbei de la tangentă este mică (fig. 28).

2) Forma unei curbe $C: f(x, y) = c$ în vecinătatea unui punct regulat (x_0, y_0) este dată de forma graficului funcţiei $x \to y(x)$ în vecinătatea lui x_0.

b) *P este un punct singular*

Prin ipoteză, în P avem $\vec{\alpha}'(t) = \vec{0}$.

9.5. Presupunem că $\vec{\alpha}''(t)$ şi $\vec{\alpha}'''(t)$ determină o bază în $T_P\mathbb{R}^2$. În acest caz tangenta este determinată de P şi de $\vec{\alpha}''(t)$. Formula Taylor de ordinul trei arată că

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{h^2}{2} \vec{\alpha}''(t) + \frac{h^3}{6} \vec{\alpha}'''(t) + \frac{h^3}{6} \vec{\varepsilon}(h), \quad \lim_{h \to 0} \vec{\varepsilon}(h) = \vec{0}.$$

În vecinătatea lui $h = 0$, cuplul $\left(\frac{h^2}{2}, \frac{h^3}{6}\right)$ constituie cu aproximaţie coordonatele vectorului $\overrightarrow{PQ}$. Prima coordonată $\frac{h^2}{2}$ fiind pozitivă, arcul aparţine semiplanului mărginit de dreapta definită de P şi $\vec{\alpha}'''(t)$ şi care conţine pe $\vec{\alpha}''(t)$. A doua coordonată $\frac{h^3}{6}$ îşi schimbă semnul cînd h trece prin zero. Astfel, în P, arcul traversează tangenta. Se zice că P este un *punct de întoarcere de prima speţă* (fig. 49).

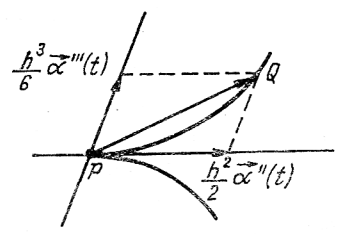


Fig. 49

9.6. Presupunem că $\vec{\alpha}'''(t)$ este coliniar cu $\vec{\alpha}''(t)$ şi că $\vec{\alpha}''(t)$ şi $\vec{\alpha}^{(4)}(t)$ formează o bază în $T_P\mathbb{R}^2$. În acest caz tangenta în P este definită de P şi de $\vec{\alpha}''(t)$. Deoarece prin ipoteză $\exists\, r \in \mathbb{R}$ aşa ca $\vec{\alpha}'''(t) = r\vec{\alpha}''(t)$, formula Taylor de or-

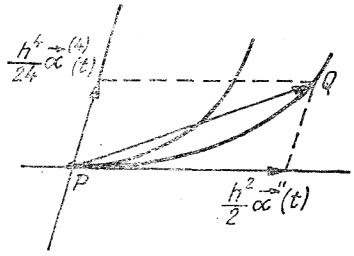


Fig. 50

dinul patru dă

$$\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{h^2}{2} + r\frac{h^3}{6}\right)\vec{\alpha}''(t) + \frac{h^4}{24}\vec{\alpha}^{(4)}(t) + \frac{h^4}{24}\vec{\varepsilon}(h), \lim_{h\to 0}\vec{\varepsilon}(h) = \vec{0}.$$

Astfel pentru $|h|$ suficient de mic, perechea $\left(\frac{h^2}{2}, \frac{h^4}{24}\right)$ reprezintă cu aproximație coordonatele lui $\overrightarrow{PQ}$ în raport cu baza $\vec{\alpha}''(t)$, $\vec{\alpha}^{(4)}(t)$. Deoarece, ambele coordonate sînt pozitive, curba trebuie să arate ca în figura 50 (o ramură pentru h negativ, o ramură pentru h pozitiv). În acest caz se spune că P este un *punct de întoarcere de speța a doua.*

9.7. Generalizînd situațiile anterioare presupunem că:

$$\vec{\alpha}'(t) = \ldots = \vec{\alpha}^{(m-1)}(t) = \vec{0},\ \vec{\alpha}^{(m)}(t) \neq \vec{0}.$$

De asemenea presupunem că, în P, derivatele de ordinul $m+1, m+2 \ldots \ldots, n-1$ sînt coliniare cu $\vec{\alpha}^{(m)}(t)$ iar $\vec{\alpha}^{(m)}(t)$ împreună cu $\vec{\alpha}^{(n)}(t)$ determină o bază în $T_P\mathbb{R}^2$. Deoarece prin ipoteză, $\forall k, m < k < n$, $\exists\, r_k \in \mathbb{R}$ așa ca $\vec{\alpha}^{(k)}(t) = r_{k-m}\,\vec{\alpha}^{(m)}(t)$, formula Taylor de ordinul n dă

$$\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{h^m}{m!} + r_1\frac{h^{m+1}}{(m+1)!} + \ldots + r_{n-1}\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\right)\vec{\alpha}^{(m)}(t) + \frac{h^n}{n!}\left[\vec{\alpha}^{(n)}(t) + \vec{\varepsilon}(h)\right],$$

$$\lim_{h\to 0}\vec{\varepsilon}(h) = \vec{0}.$$

Pentru $|h|$ suficient de mic, $\left(\frac{h^m}{m!}, \frac{h^n}{n!}\right)$ constituie cu aproximație coordonatele lui $\overrightarrow{PQ}$ în baza aleasă de noi. De aceea situațiile din punctul singular P se pot rezuma în tabelul

m	n	Forma curbei
impar	par	figura 47
	impar	figura 48
par	impar	figura 49
	par	figura 50

9.8. Observații

1) Dacă în punctul singular P nu sînt îndeplinite condițiile din 9.7, atunci nu putem preciza care este forma curbei în vecinătatea acestui punct cu ajutorul derivatelor (fig. 27, 28, 29).

2) Fie curba $C: f(x, y) = c$ și $(x_0, y_0) \in C$ un punct critic al lui f în care hessiana lui f nu este identic nulă. Dacă $\det d^2f(x_0, y_0) > 0$, atunci (x_0, y_0) este un punct izolat al curbei (fig. 51, a); dacă $\det d^2f(x_0, y_0) < 0$, atunci (x_0, y_0) este un *punct dublu* pentru C (fig. 51, b);

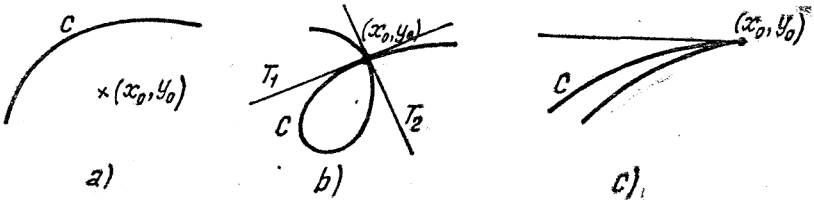


Fig. 51

dacă det $d^2f(x_0, y_0) = 0$ atunci (x_0, y_0) este un *punct de întoarcere* pentru C (fig. 51, c). Într-un punct dublu sau de întoarcere direcţiile (l, m) ale tangentelor la C sînt date de

$$l^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2lm \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + m^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = 0.$$

§ 10. Trasarea curbelor plane

Fie $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ o curbă plană. Pentru a desena imaginea $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^2$ în raport cu axele de coordonate este necesar să se urmărească următoarele probleme:

10.1. Stabilirea domeniului de definiţie I, precizarea punctelor de acumulare ce nu aparţin lui I şi calculul limitelor lui $t \to x(t)$, $t \to y(t)$ în aceste puncte. Precizarea punctelor critice (dacă există !).

10.2. Intersecţii cu axele.

10.3. Se cercetează dacă α este o curbă periodică, adică $\exists\, T > 0$, $\alpha(t + T) = \alpha(t)$, $\forall t \in I$. Dacă α este periodică, de perioadă T, atunci este suficient să considerăm restricţia $\alpha : [0, T] \to \mathbb{R}^2$.

Din faptul că α este o curbă periodică rezultă că $t \to x(t)$, $t \to y(t)$ sînt periodice avînd eventual alte perioade decît α. Dacă $t \to x(t)$ este periodică şi are perioada T_1, $t \to y(t)$ este periodică şi are perioada T_2, iar $\frac{T_1}{T_2} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, atunci α este periodică şi are perioada $T = qT_1 = pT_2$.

Curbele date cartezian explicit prin $y = f(x)$ nu sînt periodice deoarece $x = t$ nu este periodică fiind funcţia identitate. Dacă f este periodică, atunci curba se deduce prin translaţie de-a lungul lui Ox din porţiunea ei construită pentru o perioadă a lui f.

10.4. Se cercetează simetriile lui $\alpha(I)$. Dacă $\forall\, t \in I$, $\exists\, t' \in I$ astfel încît (1) $x(t') = x(t)$, $y(t') = -y(t)$, (2) $x(t') = -x(t)$, $y(t') = y(t)$, (3) $x(t') = -x(t)$, $y(t') = -y(t)$, (4) $x(t') = y(t)$, $y(t') = x(t)$ etc. atunci curba este respectiv simetrică faţă de (1) axa Ox, (2) axa Oy, (3) origine, (4) prima bisectoare etc. Se observă că sistemele (1), (2) şi (3) conţin ca un caz particular studiul parităţii şi imparităţii funcţiilor $t \to x(t)$, $t \to y(t)$.

Dacă $\exists\, r \in \mathbb{R}$ astfel încît, $\forall\, t \in I$, punctul $\alpha(r - t)$ se deduce din $\alpha(t)$ printr-o simetrie (în raport cu un punct sau o dreaptă), atunci rezultă $t' = r - t$ ceea ce este echivalent cu $\frac{t + t'}{2} = \frac{r}{2}$. Astfel t şi t' sînt simetrice

în $\mathbb{R}$ față de $\frac{r}{2}$. În acest caz trasăm porțiunea din $\alpha(I)$ corespunzătoare lui $I \cap [r/2, \infty)$ iar restul se completează prin simetrie.

Dacă $\alpha\left(\frac{1}{t}\right)$ se deduce din $\alpha(t)$ printr-o simetrie, atunci rezultă $t' = \frac{1}{t}$ sau $tt' = 1$. În acest caz trasăm porțiunea din $\alpha(I)$ corespunzătoare lui $I \cap ([-1, 0) \cup (0, 1])$, iar restul se completează prin simetrie.

10.5. Stabilirea punctelor regulate. Dintre punctele regulate trebuie precizate punctele de inflexiune și punctele în care $\vec{\alpha}^{(n)}$, $n = 2, 3, \ldots$ sînt coliniari cu $\vec{\alpha}'$.

Stabilirea punctelor singulare și a tangentelor în aceste puncte (cînd există !). Dintre acestea trebuie precizate punctele de inflexiune, punctele de întoarcere, punctele singulare de ordinul n în care $\vec{\alpha}^{(m)}$, $m = n + 1$, $n + 2, \ldots$ sînt coliniari cu $\vec{\alpha}^{(n)} \neq \vec{0}$ și punctele singulare în care $\vec{\alpha}^{(k)} = \vec{0}$, $k = 1, 2 \ldots$

10.6. Determinarea punctelor multiple și a tangentelor în aceste puncte. Dacă sistemul $t_1 \neq t_2$, $x(t_1) = x(t_2)$, $y(t_1) = y(t_2)$ este compatibil (determinat sau nedeterminat), atunci soluțiile sale dau punctele multiple. Dacă sistemul este incompatibil, atunci curba are numai puncte simple.

10.7. Alcătuirea tabelului de variație pentru funcțiile $t \to x(t)$, $t \to y(t)$.

10.8. Stabilirea ramurilor infinite și a asimptotelor (dacă există !). Putem întîlni situațiile:

1) $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = \pm\infty$, $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = b$. În acest caz asimptota are ecuația $y = b$. Pentru a decide poziția ramurii față de asimptotă, din tabel se citește semnul lui $y(t) - b$ în vecinătatea lui t_0.

2) $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = a$, $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = \pm\infty$. În acest caz asimptota are ecuația $x = a$.

3) $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = \pm\infty$, $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = \pm\infty$.

Dacă $\lim\limits_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$, atunci $(1, 0)$ este direcție asimptotică. Curba nu admite asimptotă (ramură parabolică).

Dacă $\lim\limits_{t \to t_0} \frac{x(t)}{y(t)} = 0$, atunci $(0, 1)$ este direcție asimptotică. Curba nu admite asimptotă (ramură parabolică).

Dacă $\lim\limits_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = m$, atunci $(1, m)$ este direcție asimptotică. Dacă $\lim\limits_{t \to t_0}(y(t) - mx(t)) = n$, atunci curba admite asimptota $y = mx + n$. Dacă $\lim\limits_{t \to t_0}(y(t) - mx(t)) = \pm\infty$, atunci curba nu admite asimptotă (ramură parabolică).

10.9 Exemplu

Curba de ecuație $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, $a > 0$, se numește *foliul lui Descartes*.

a) Să se găsească o reprezentare parametrică a curbei.

b) Să se construiască această curbă.

Soluție

a) Intersectăm cu dreapta $y = tx$. Înlocuind în ecuația curbei obținem $x^2(x + t^3x - 3at) = 0$. Mai întîi avem $x^2 = 0$, ceea ce corespunde punctului dublu $(0, 0)$. Apoi, pentru $t \neq -1$, găsim

$$x = \frac{3at}{1 + t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1 + t^3}.$$

b) Pentru a construi curba avem de rezolvat mai multe probleme:

1) *Domeniul de definiție. Simetrii.* Se vede că $t \in (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$. În punctele de acumulare care nu fac parte din domeniul de definiție trebuie să calculăm limite. Astfel avem:

$$\lim_{t \to \pm\infty} x(t) = 0 \qquad \lim_{t \nearrow -1} x(t) = \infty \qquad \lim_{t \searrow -1} x(t) = -\infty$$

$$\lim_{t \to \pm\infty} y(t) = 0 \qquad \lim_{t \nearrow -1} y(t) = -\infty \qquad \lim_{t \searrow -1} y(t) = \infty.$$

Observăm că $O(0, 0)$ este punct asimptotic atît pentru $t \to \infty$ cît și pentru $t \to -\infty$. Acest punct se confundă cu punctul obișnuit $t = 0$.

Sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{3at'}{1 + t'^3} = \dfrac{3at^2}{1 + t^3} \\[2ex] \dfrac{3at'^2}{1 + t'^3} = \dfrac{3at}{1 + t^3} \end{cases}$$

este compatibil nedeterminat deoarece este satisfăcut pentru orice t și t' din relația $tt' = 1$. Astfel curba este simetrică față de prima bisectoare. De aceea este suficient să construim porțiunea $t \in (-1, 0) \cup (0, 1]$, iar restul să completăm prin simetrie.

2) *Puncte regulate. Puncte singulare.* Avem

$$x' = \frac{3a - 6at^3}{(1 + t^3)^2}, \quad y' = \frac{6at - 3at^4}{(1 + t^3)^2}.$$

Din $x' = 0 \Rightarrow t = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Din $y' = 0 \Rightarrow t_1 = 0$, $t_2 = \sqrt[3]{2}$. Aceasta înseamnă că foliul lui Descartes este o curbă regulată.

3) *Puncte multiple.*

Avînd în vedere semnificația lui t (panta unei drepte), $t \to -\infty$ și $t \to \infty$ dau același punct $(0, 0)$ pe curbă (punct asimptotic) care corespunde intersecției curbei cu axa $Oy (x = 0)$. Pe de altă parte $t = 0$ dă punctul $(0, 0)$. Astfel originea este punct dublu.

Sistemul

$$\begin{cases} t_1 \neq t_2 \\[2ex] \dfrac{3at_1}{1 + t_1^3} = \dfrac{3at_2}{1 + t_2^3} \\[2ex] \dfrac{3at_1^2}{1 + t_1^3} = \dfrac{3at_2^2}{1 + t_2^3} \end{cases}$$

arată că nu mai avem și alte puncte multiple.

Tangentele în $O(0, 0)$ sînt axele Ox și Oy.

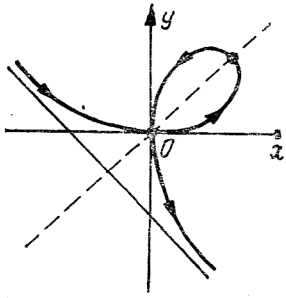


Fig. 52

4) Tabelul de variaţie pentru $x(t)$ şi $y(t)$

	$-\infty$		-1		0		$1/\sqrt[3]{2}$		$\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
x'		$+$				$+$	0	$-$		$-$	
x	0	$\nearrow$	∞	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$ $2a\sqrt{4}$	$\searrow$	$a\sqrt[3]{2}$	$\searrow$	0
y'		$-$		$-$		0	$+$	$+$	0	$-$	
y	0	$\searrow$	$-\infty$	∞	$\searrow$	0	$\nearrow$ $a\sqrt[3]{2}$	$\nearrow$	$2a\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	0

5) *Ramuri infinite. Asimptote.*

Pentru $t \nearrow -1$ şi $t \searrow -1$ avem ramuri infinite. Deoarece $\lim\limits_{t\to -1} \frac{y(t)}{x(t)} = -1$, rezultă că ambele ramuri infinite admit direcţia asimptotică $(1, -1)$. Pe de altă parte

$$\lim_{t\to -1} (y(t) + x(t)) = \lim_{t\to -1} \frac{3at}{1 + t^2 - t} = -a$$

şi astfel avem asimptota oblică $y + x + a = 0$.

6) *Trasarea curbei* (Fig. 52).

§ 11. Formule Frenet şi elemente de teoria contactului

Fie $\beta : J \to \mathbb{R}^2$, $\beta(s) = (x(s), y(s))$ o curbă cu viteza unu. *Versorul tangent* este $\vec{T}(s) = \vec{\beta}'(s) = (x'(s), y'(s))$, iar *versorul normal* $\vec{N}(s)$ este definit prin rotirea lui $\vec{T}(s)$ cu $\pi/2$ (fig. 53). Astfel, $\vec{N}(s) = (-y'(s), x'(s))$.

Deoarece $(\vec{T}, \vec{T}) = 1$, rezultă $(\vec{T}', \vec{T}) = 0$ şi deci $\vec{T}' = (x'', y'')$ este perpendicular pe $\vec{T}$. Cum avem şi $\vec{N} \perp \vec{T}$ rezultă că $\vec{T}'$ şi $\vec{N}$ sînt coliniari. Funcţia $s \to k(s)$ definită prin ecuaţia Frenet

$$\vec{T}' = k\vec{N}$$

se numeşte *curbura* lui β. Pentru curbele din plan, $k(s) \in \mathbb{R}$ şi semnul său arată cum se încovoaie $\beta(J)$.

11.1. Teoremă. Dacă $\beta : J \to \mathbb{R}^2$ este o curbă cu viteza unu care are curbura k, atunci avem :

a) Formulele Frenet : $\vec{T}' = k\vec{N}$, $\vec{N}' = -k\vec{T}$.

b) $k = \frac{d\varphi}{ds}$, unde φ este unghiul care dă panta tangentei lui β în punctul curent.

Demonstraţie. a) Scriem pe $\vec{N}'$ în forma

$$\vec{N}' = (\vec{N}', \vec{T})\vec{T} + (\vec{N}', \vec{N})\vec{N}.$$

Găsim $(\vec{N}', \vec{N}) = 0$ şi $(\vec{N}', \vec{T}) = -(\vec{N}, \vec{T}') = -k$.

b) Folosim figura 54 şi observaţia că $\vec{T} = \vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi$.

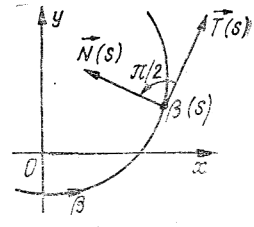


Fig. 53

Deci $\vec{T}' = \frac{d\varphi}{ds}\vec{N}$, adică $k = \frac{d\varphi}{ds}$.

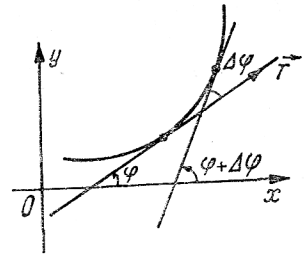


Fig. 54

11.2. Teoremă. Curbura k determină pe β abstracţie făcînd de poziţia sa în plan (de o izometrie).

Demonstraţie. Ţinînd cont de teorema 11.1 avem

$$\frac{d\varphi}{ds} = k(s) \text{ şi deci } \varphi = \varphi_0 + \int_{s_0}^{s} k(s)ds,$$

unde φ_0 este unghiul pe care-l face tangenta la curba căutată în punctul $s = s_0$ cu axa Ox. Pe de altă parte

$$\frac{dx}{ds} = \cos\varphi, \quad \frac{dy}{ds} = \sin\varphi$$

şi astfel

$$x = x_0 + \int_{s_0}^{s} \cos\varphi \, ds, \quad y = y_0 + \int_{s_0}^{s} \sin\varphi \, ds,$$

unde (x_0, y_0) este punctul corespunzător lui $s = s_0$.

Constantele φ_0, x_0, y_0 nu sînt esenţiale. Ele depind de alegerea axelor de coordonate. Notînd

$$x' = \int_{s_0}^{s} \cos\psi \, ds, \quad y' = \int_{s_0}^{s} \sin\psi \, ds, \quad \psi = \int_{s_0}^{s} k(s)ds$$

observăm că

$$\begin{cases} x = x_0 + x'\cos\varphi_0 - y'\sin\varphi_0 \\ y = y_0 + x'\sin\varphi_0 + y'\cos\varphi_0 \end{cases}$$

şi deci φ_0 determină o rotaţie, iar (x_0, y_0) determină o translaţie.

Dacă $\varphi_0 = 0$, $x_0 = y_0 = 0$, atunci punctul de la care se măsoară abscisele curbilinii coincide cu originea coordonatelor, iar sensul tangentei în acest punct coincide cu sensul lui Ox.

11.3. Teoremă. Dacă $\vec{\alpha}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$ este o curbă regulată din plan, atunci

$$k = \frac{(\vec{\alpha}'', \mathcal{R}(\vec{\alpha}'))}{\|\vec{\alpha}'\|^3} = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}},$$

unde $\mathcal{R}$ este operatorul rotaţiei de unghi $\frac{\pi}{2}$, adică $\mathcal{R}(t_1, t_2) = (-t_2, t_1)$ iar „'" înseamnă derivata în raport cu t. Funcţia $\frac{1}{|k|} : I - \{t \mid t \in I, k(t) = 0\} \to (0, \infty)$ se numeşte *rază de curbură*.

Demonstrație. Avem $\vec{\alpha}' = v\vec{T}$, $\mathscr{R}(\vec{\alpha}') = v\mathscr{R}(\vec{T}) = v\vec{N}$, $\vec{\alpha}'' = \frac{dv}{dt}\vec{T} + kv^2\vec{N}$ și deci $(\vec{\alpha}'', \mathscr{R}(\vec{\alpha}')) = kv^3$.

În § 6 a fost definită noțiunea de „contact de ordinul n" a două curbe.

11.4. Teoremă. Curbele $\alpha_1 : y = f_1(x)$, $\alpha_2 : y = f_2(x)$ au în punctul comun $M_0(x_0, y_0)$ un contact de ordinul n dacă și numai dacă

$$f_1^{(k)}(x_0) = f_2^{(k)}(x_0), \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

$$f_1^{(n+1)}(x_0) \neq f_2^{(n+1)}(x_0).$$

Demonstrație. Curbele α_1 și α_2 au în M_0 un contact de ordinul n dacă și numai dacă ecuația $f_1(x) - f_2(x) = 0$ admite pe x_0 drept rădăcină multiplă de ordinul $n + 1$, adică dacă și numai dacă

$$f_1^{(k)}(x_0) - f_2^{(k)}(x_0) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

$$f_1^{(n+1)}(x_0) - f_2^{(n+1)}(x_0) \neq 0.$$

11.5. Teoremă. Curbele $\alpha_1 : x = x(t)$, $y = y(t)$, $C : f(x, y) = 0$ au în punctul comun regulat $t_0 \leftrightarrow M_0(x_0, y_0)$ un contact de ordinul n dacă și numai dacă funcția compusă $t \to \Phi(t) = f(x(t), y(t))$ satisface

$$\Phi^{(k)}(t_0) = 0, \; k = 0, 1, \ldots, n, \quad \Phi^{(n+1)}(t_0) \neq 0.$$

Demonstrație. Fie $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Atunci C este reprezentată într-o vecinătate a lui (x_0, y_0) de arcul simplu și regulat $\alpha : x = x$, $y = y(x)$, $x \in I$. Restrîngînd eventual pe I reparametrizăm pe α prin $x = x(t)$ și găsim $\alpha_2 : x = x(t)$, $y = y(x(t)) = u(t)$.

Deoarece $f(x(t), u(t)) = 0$ este o identitate într-o vecinătate a lui t_0, prin derivare deducem identitățile:

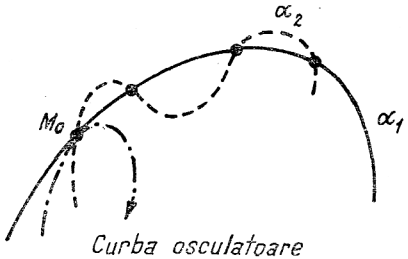
$$(*) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial u}\frac{du}{dt}\right)^{(k)} f(x(t), u(t)) = 0.$$

În particular acestea sînt adevărate pentru $t = t_0$.

Presupunem că α_1 și α_2 au în $t_0 \leftrightarrow M_0(x_0, y_0)$ un contact de ordinul n, adică

$$(**) \qquad \left.\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right|_{t=t_0} = \left.\frac{d^k u(t)}{dt^k}\right|_{t=t_0}, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

$$\left.\frac{d^{n+1} y(t)}{dt^{n+1}}\right|_{t=t_0} \neq \left.\frac{d^{n+1} u(t)}{dt^{n+1}}\right|_{t=t_0}.$$



Curba osculatoare
$n=3,\ n+1=4$

Fig. 55

Curba osculatoare
$n=2,\ n+1=3$

Fig. 56

Din (**) şi (*) rezultă că funcţia $t \to \Phi(t) = f(x(t),\ y(t))$ satisface

$$(***) \qquad \Phi^{(k)}(t_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)^{(k)} f(x(t), y(t))\Big|_{t=t_0} = 0$$

$$k = 0, 1, \ldots, n,$$

$$\Phi^{(n+1)}(t_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)^{(n+1)} f(x(t), y(t))\Big|_{t=t_0} \neq 0.$$

Reciproc, relaţiile (***) şi (*) implică pe (**), adică α_1 şi α_2 au în $t_0 \leftrightarrow$ $\leftrightarrow M_0(x_0, y_0)$ un contact de ordinul n.

11.6. *Curbe osculatoare.* Fie $\alpha_1 : x = x(t),\ y = y(t),\ t \in I$ o curbă fixată şi $\alpha_2 : f(x, y\,;\, a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}) = 0$ o familie de curbe care depind de $n+1$ parametri, unde f este o funcţie diferenţiabilă de $n+3$ variabile.

Se pune problema să determinăm din familia α_2 o curbă care să aibă cu α_1, într-un punct dat, un contact de ordinul n, adică $n+1$ puncte confundate. Această curbă se numeşte *osculatoarea* curbei α_1.

Problema găsirii curbei osculatoare se rezolvă prin înlocuirea lui $x(t)$ şi $y(t)$ în f, aplicarea teoremei 11.5 şi găsirea celor $n+1$ necunoscute a_i ce determină curba osculatoare. Dacă în punctul considerat curba obţinută are cel puţin un contact de ordinul $n+1$ cu α_1, atunci ea se numeşte *supraosculatoare.*

Deoarece curba osculatoare a unei curbe α_1 este de fapt poziţia limită a unei curbe din familia α_2 care trece prin $n+1$ puncte ale lui α_1, atunci cînd aceste puncte tind de-a lungul lui α_1 către punctul dat iniţial, putem afirma că :

a) dacă $n = 2k+1$, atunci curba osculatoare nu traversează pe α_1 în punctul M_0 (fig. 55),

b) dacă $n = 2k$, atunci curba osculatoare traversează pe α_1 în punctul M_0 (fig. 56).

11.7. Exemple

1) Dreptele din plan $ax + by + c = 0$ formează o familie de curbe cu doi parametri esenţiali. De aceea, fiind dată o curbă α se poate determina, într-unul din punctele sale, o dreaptă osculatoare (contact ordinul $1 \sim 2$ puncte confundate) care este de fapt *tangenta* la curbă (fig. 57). În punctele singulare ale lui α dreapta găsită este supraosculatoare.

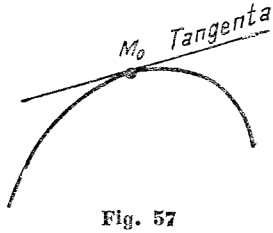


Fig. 57

2) Cercurile din plan $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ sau $(\vec{r} - \vec{c})^2 - R^2 = 0$ formează o familie de curbe cu trei parametri esenţiali (coordonatele centrului şi raza). Fiind dată o curbă $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ şi un punct pe ea se poate determina un *cerc osculator* (contact ordinul $2 \sim 3$ puncte confundate).

Pentru determinarea acestui cerc ne folosim de teorema 11.5. Astfel impunem condiţiile :

$$(\vec{\alpha} - \vec{c})^2 - R^2 = 0$$

$$(\vec{\alpha}', \vec{\alpha} - \vec{c}) = 0$$

$$(\vec{\alpha}'', \vec{\alpha} - \vec{c}) + \vec{\alpha}'^2 = 0.$$

Ecuaţia din mijloc dă $\vec{c} = \vec{\alpha} + \lambda\vec{N}$, unde $\vec{N}$ este cîmpul normal unitar, iar ultima ecuaţie implică $\lambda = \frac{1}{k}$, unde k este curbura lui α. Evident, trebuie impusă condiţia $k \neq 0$ în punctul considerat. Centrul cercului osculator $\vec{c} = \vec{\alpha} + \frac{1}{k}\vec{N}$ se află pe $\vec{N}$ şi se numeşte *centru de curbură*. Raza cercului osculator $R = \frac{1}{|k|}$ se obţine din prima ecuaţie şi se numeşte *raza de curbură* a lui α. Cercul osculator se mai numeşte şi *cerc de curbură* (fig. 58).

Explicit, centrul cercului osculator este dat de

$$x_0 = x - y' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}, \quad y_0 = y + x' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'},$$

iar raza sa este

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{|x'y'' - x''y'|}.$$

Curba $\gamma = \vec{\alpha} + \frac{1}{k}\vec{N}$, care este de fapt locul geometric al centrelor de curbură ale lui α, se numeşte *evoluta* sau *desfăşurata* lui α.

3) Fie o curbă α şi un punct pe această curbă. În acest punct se poate determina o parabolă osculatoare care să aibă cu α un contact de ordinul trei ; o elipsă sau hiperbolă osculatoare care să aibă cu α un contact de ordinul patru etc.

Fie (a) o familie de curbe din plan reprezentată prin ecuaţia $f(x, y ; a) = 0$, unde f este o funcţie diferenţiabilă în raport cu cele trei argumente.

11.8. *Definiţie. O curbă $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(a) = (x(a), y(a))$ se numeşte înfăşurătoarea familiei (a) dacă satisface condiţiile :*

1) *$\forall P \in \alpha(I)$ se poate indica o curbă unică a familiei care să conţină punctul P ca punct regulat şi care să aibă în P un contact de ordinul $n \geqslant 1$ cu $\alpha(I)$.*

2) *$\forall$ curba din familia (a), există un punct regulat P, al său care să aparţină şi lui $\alpha(I)$ şi în care cele două curbe să aibă un contact de ordinul $n \geqslant 1$.*

3) *Nici o curbă a familiei (a) să nu aibă un arc comun cu $\alpha(I)$.*

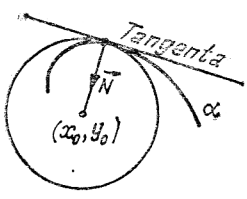


Fig. 58

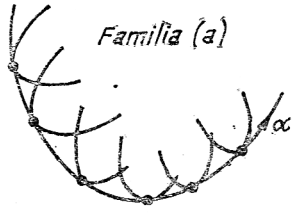


Fig. 59

Cu alte cuvinte înfăşurătoarea este curba la care sînt tangente curbele din familia (a) (fig. 59).

11.9. Teoremă. Înfășurătoarea familiei (a) este inclusă în curba definită prin:

$$\begin{cases} f(x, y\,;\, a) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial a}(x, y\,;\, a) = 0. \end{cases}$$

Demonstrație. Prin ipoteză $f(x(a),\ y(a)\,;\, a) = 0,\ \forall a$. Derivînd rezultă identitatea $\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{dx}{da} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{da} + \dfrac{\partial f}{\partial a} = 0$. Scriem condiția ca în punctele comune să avem aceeași tangentă adică vectorii $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ și $\left(\dfrac{dx}{da}, \dfrac{dy}{da}\right)$ să fie perpendiculari,

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{da} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{da} = 0.$$

Din ultimele două relații găsim

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x, y\,;\, a) = 0,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

11.10. Exemplu. Să se determine înfășurătoarea curbelor

$$f(x, y\,;\, a) = (y - a)^2 - (x - a^2)^3 = 0$$

Soluție. Alcătuim sistemul

$$f(x, y\,;\, a) = (y - a)^2 - (x - a^2)^3 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x, y\,;\, a) = -2(y - a) + 6a(x - a^2)^2 = 0,$$

care conduce la $y^2 - x = 0$ și

$$\alpha(a) = \left(\frac{9a^4 + 1}{9a^2}, \frac{27a^4 + 1}{27a^3}\right).$$

Observăm însă că punctele pentru care $y^2 - x = 0$ sînt puncte critice pentru familia (a) adică puncte în care avem $f = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$. De aceea numai curba α este înfășurătoarea familiei (a).

§ 12. Curbe plane în coordonate polare

12.1. Presupunem că planul xOy a fost raportat la un reper polar și că punctului (x, y) îi corespunde punctul (ρ, θ). În această ipoteză, o curbă plană mai poate fi dată și prin *ecuația polară*, $\rho = f(\theta)$.

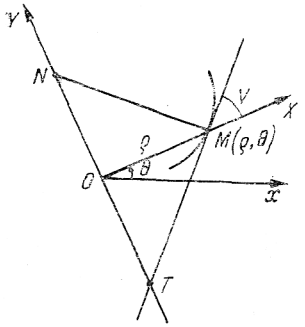


Fig. 60

12.2. Fie (ρ, θ) un punct al unei curbe date, diferit de pol. Unghiul V dintre tangenta în acest punct și raza vectoare corespunzătoare este dat de $\operatorname{tg} V = \frac{\rho}{\rho'}$. Dacă considerăm un reper cartezian adecvat: OX este pe raza vectoare corespunzătoare punctului (ρ, θ) iar OY este perpendiculară pe OX astfel încît XOY să fie un reper orientat pozitiv, atunci tangenta și normala în (ρ, θ) au respectiv ecuațiile (fig. 60)

$$Y = \frac{\rho}{\rho'}(X - \rho) \quad \text{și} \quad \frac{\rho}{\rho'} Y + X - \rho = 0.$$

Numerele reale $\overline{OT} = \frac{\rho^2}{\rho'}$ și $\overline{ON} = \rho'$ se numesc *subtangentă polară* și respectiv *subnormala polară* (fig. 60).

Dacă curba considerată trece prin pol, atunci tangenta în pol face cu Ox unghiul θ_1 care anulează pe $\rho = f(\theta)$.

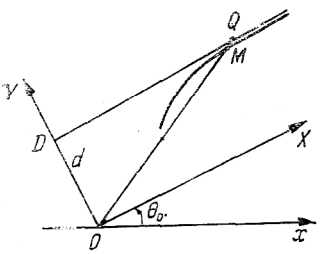


Fig. 61

12.3. Punctele multiple ale unei curbe date prin $\rho = f(\theta)$ se găsesc rezolvînd ecuațiile

$$f(\theta_1) = f(\theta_2 + 2k\pi), \quad f(\theta_1) = -f(\theta_2 + \pi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

12.4. Alura curbei se stabilește cu ajutorul semnului curburii

$$k = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}.$$

Pentru $k > 0$ corespund puncte în vecinătatea cărora curba se încovoaie în sens opus polului, pentru $k < 0$ corespund puncte în vecinătatea cărora curba se încovoaie către pol, iar pentru $k = 0$ obținem de obicei puncte de inflexiune.

12.5. Valorile lui θ pentru care limita lui $\rho = f(\theta)$ este infinită, dau direcțiile asimptotice. Fie θ_0 o direcție asimptotică. Notăm $d = \lim_{\theta \to \theta_0} \sin(\theta - \theta_0)$. Dacă d este finit, atunci curba admite o asimptotă a cărei ordonată la origine este d(fig. 61). Dacă $d = \infty$, atunci curba are o ramură parabolică.

CURBE ÎN $\mathbb{R}^3$

§ 13. Tangenta și planul normal

Raportăm spațiul la reperul natural și considerăm curba $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

Curbele din spațiu se împart în două categorii: *curbe plane* și *curbe strîmbe*.

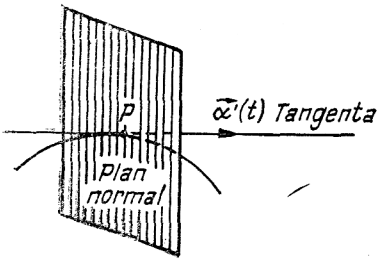


Fig. 62

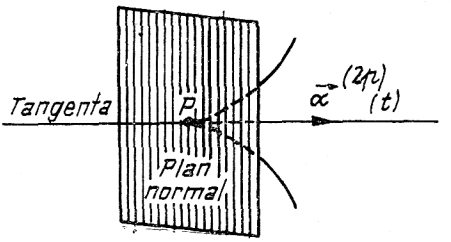


Fig. 63

O curbă din spațiu se numește *curbă plană* dacă $\forall\, t \in I$, $\exists a, b, c, d \in \mathbb{R}$ astfel ca $ax(t) + by(t) + cz(t) + d = 0$.

Fie $P = \alpha(t)$ un punct regulat al curbei. Se știe (§ 2) că dreapta care trece prin P și are ca vector director pe $\vec{\alpha}'(t)$ este *tangentă* la curba α în P.

13.1. *Definiție. Planul care trece prin P și are drept vector normal pe $\vec{\alpha}'(t)$ se numește plan normal la curba α în P* (fig. 62).

Într-un punct regulat fixat, $P = \alpha(t)$, tangenta și planul normal au respectiv ecuațiile:

$$\frac{x - x(t)}{x'(t)} = \frac{y - y(t)}{y'(t)} = \frac{z - z(t)}{z'(t)}, \quad (x - x(t))\,x'(t) + (y - y(t))\,y'(t) + \\ + (z - z(t))\,z'(t) = 0.$$

Dacă $P = \alpha(t)$ este un punct singular de ordinul m, se știe că dreapta care trece prin P și are ca vector director pe $\vec{\alpha}^{(m)}(t)$ este *tangenta* curbei în punctul P.

13.2. *Definiție. Planul care trece prin P și are drept vector normal pe $\vec{\alpha}^{(m)}(t)$ se numește plan normal la curba α în P* (fig. 63).

Într-un punct singular de ordinul m, tangenta și planul normal la curbă au respectiv ecuațiile:

$$\frac{x - x(t)}{x^{(m)}(t)} = \frac{y - y(t)}{y^{(m)}(t)} = \frac{z - z(t)}{z^{(m)}(t)} \quad \text{și} \quad (x - x(t))\,x^{(m)}(t) + (y - y(t))\,y^{(m)}(t) + \\ + (z - z(t))\,z^{(m)}(t) = 0.$$

§ 14. Curbe definite prin ecuații carteziene implicite

Curbele din $\mathbb{R}^3$ mai pot fi introduse și pornind de la funcții diferențiabile de tipul $F = (f, g) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y, z) = (f(x, y, z),\ g(x, y, z))$. Deoarece

$$J(F) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial z} \end{bmatrix},$$

punctele critice ale lui F se află rezolvînd sistemul

$$\frac{D(f, g)}{D(y, z)} = 0, \quad \frac{D(f, g)}{D(z, x)} = 0, \quad \frac{D(f, g)}{D(x, y)} = 0.$$

Punctele în care cel puțin unul din acești determinanți este diferit de zero sînt puncte regulate. Mulțimea

$$C = F^{-1}(a, b) = \{(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = a, \quad g(x, y, z) = b\},$$

se numește *mulțime de ecuații carteziene* implicite $f(x, y, z) = a$, $g(x, y, z) = b$.

Mulțimea C este de fapt intersecția a două mulțimi de nivel constant. Ea poate să conțină atît puncte regulate cît și puncte critice ale lui F.

Fie $(x_0, y_0, z_0) \in C$. Mulțimea tuturor punctelor din C a căror distanță față de (x_0, y_0, z_0) este mai mică decît un număr $\varepsilon > 0$ se numește *vecinătate* a lui (x_0, y_0, z_0) în C.

14.1. Teoremă. Dacă (x_0, y_0, z_0) este un punct regulat din C, atunci există o vecinătate a acestui punct în care ecuațiile

$$f(x, y, z) = a, \quad g(x, y, z) = b$$

definesc o curbă simplă și regulată.

Demonstrație. Deoarece ecuațiile $f(x, y, z) = a$, $g(x, y, z) = b$ reprezintă respectiv mulțimi de nivel constant diferite, mulțimea C apare ca fiind intersecția acestor mulțimi.

În ipoteza $\dfrac{D(f, g)}{D(y, z)}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, teorema funcțiilor implicite asigură că sistemul $f(x, y, z) = a$, $g(x, y, z) = b$ definește două funcții $x \to y(x)$, $x \to z(x)$, în vecinătatea I a punctului x_0, pentru care

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{D(f, g)}{D(z, x)}}{\dfrac{D(f, g)}{D(y, z)}}, \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{\dfrac{D(f, g)}{D(x, y)}}{\dfrac{D(f, g)}{D(y, z)}}.$$

Astfel porțiunea din C din jurul punctului (x_0, y_0, z_0) poate fi gîndită în mai multe moduri (fig. 64):

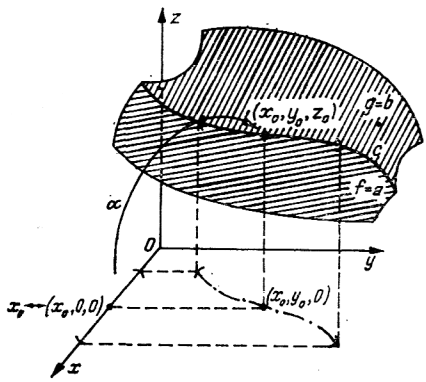


Fig. 64

— intersecția a două suprafețe cilindrice (vezi Cap. 3),

— graficul aplicației $h : I \to \mathbb{R}^2$, $h(x) = (y(x), z(x))$,

— imaginea lui I prin aplicația $\alpha : x = t$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. De aceea această porțiune este o curbă simplă și regulată.

În ipotezele teoremei 14.1, mulțimea C este reuniunea imaginilor unor curbe simple și regulate, numindu-se *curbă de ecuații carteziene implicite* $f(x, y, z) = a$, $g(x, y, z) = b$. Această denumire se păstrează uneori chiar dacă C conține și puncte critice.

Dacă f și g sînt polinoame, atunci C se numește *curbă algebrică*.

14.2. *Tangenta.* Fie $P(x_0, y_0, z_0)$ un punct regulat al lui C. În baza definiției din § 2 și a teoremei 14.1 deducem că tangenta la C în P are ecuațiile

$$\frac{x - x_0}{\dfrac{D(f, g)}{D(y_0, z_0)}} = \frac{y - y_0}{\dfrac{D(f, g)}{D(z_0, x_0)}} = \frac{z - z_0}{\dfrac{D(f, g)}{D(x_0, y_0)}}.$$

De aceea planul normal corespunzător are ecuația

$$(x - x_0)\frac{D(f, g)}{D(y_0, z_0)} + (y - y_0)\frac{D(f, g)}{D(z_0, x_0)} + (z - z_0)\frac{D(f, g)}{D(x_0, y_0)} = 0.$$

14.3. Observații.

1) În situații concrete curba C poate fi dată prin două ecuații și prin mai multe inecuații în x, y, z (inecuațiile precizează o anumită porțiune din spațiu).

2) Reprezentarea curbei C (sau a unei porțiuni din C) în forma $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ se poate face prin intermediul teoremei 14.1 sau prin artificii de calcul.

3) Fie o curbă din spațiu dată în forma $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Dacă pentru $t = t_0$ avem $x'(t_0) \neq 0$, atunci teorema funcției inverse permite să spunem că funcția $x = x(t)$ are inversa $t = t(x)$ în vecinătatea lui t_0. Astfel $y = y(t)$, $z = z(t)$ apar ca funcții compuse sau pe scurt ca funcții de tipul

$$\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$$

și deci, în vecinătatea punctului ales, curba apare ca intersecție a două suprafețe cilindrice.

4) În general, dacă există o funcție $F = (f, g) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ astfel încît

$$f(x(t), y(t), z(t)) = a, \quad g(x(t), y(t), z(t)) = b, \quad \forall\, t \in I,$$

atunci $f(x, y, z) = a$, $g(x, y, z) = b$ sînt ecuațiile carteziene implicite ale curbei $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I$.

5) Fie $C : f(x, y, z) = a$, $g(x, y, z) = b$ o curbă regulată. Gradienții

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}, \quad \nabla g = \frac{\partial g}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial g}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial g}{\partial z}\vec{k},$$

definiți pe C, sînt cîmpuri normale la C (Exercițiu !).

14.4. Exemple

1) *Dreapta.* Ecuațiile carteziene implicite ale unei drepte din spațiu (intersecție de plane) sînt

$$D : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} \qquad \operatorname{rang}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} = 2,$$

iar ecuațiile parametrice sînt $\alpha : x = x_0 + lt$, $y = y_0 + mt$, $z = z_0 + nt$, $t \in \mathbb{R}$.

2) *Cercul.* De obicei un cerc din spațiu este privit ca fiind intersecția dintre o sferă și un plan :

$$C : \begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}, \qquad \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \leqslant r.$$

3) *Conicele.* În general, intersecția dintre un plan și o cuadrică este o conică în spațiu ; astfel

$$C : \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ ax + by + cz + d = 0, \end{cases}$$

unde $f(x, y, z)$ este un polinom de gradul doi.

§ 15. Formule Frenet pentru curbe cu viteza unu

Inițial vom face cîteva observații în legătură cu studiul formei unei curbe din spațiu în vecinătatea unui punct al său, studiu care se face în același mod ca la curbele plane. Precizăm că în acest caz, figurile 47—50 ne dau forma proiecției curbei (în general proiecție oblică) pe planul determinat de cele două derivate necoliniare.

O mai bună aproximare a formei unei curbe din spațiu se poate obține utilizînd trei derivate liniar independente. De exemplu, presupunem că P este un punct regulat și că $\vec{\alpha}'(t)$, $\vec{\alpha}''(t)$, $\vec{\alpha}'''(t)$ determină o bază în $T_P\mathbb{R}^3$. Utilizînd formula Taylor de ordinul trei

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{h}{1\,!}\,\vec{\alpha}'(t) + \frac{h^2}{2\,!}\,\vec{\alpha}''(t) + \frac{h^3}{3\,!}\,\vec{\alpha}'''(t) + \frac{h^3}{3\,!}\,\vec{\varepsilon}(h), \quad \lim_{h \to 0} \vec{\varepsilon}(h) = \vec{0},$$

ajungem la concluzia că pentru $|h|$ suficient de mic tripletul $\left(h, \frac{h^2}{2}, \frac{h^3}{6}\right)$ dă cu aproximație coordonatele lui $\overrightarrow{PQ}$ în baza aleasă. Cînd h trece prin zero prima și ultima coordonată își schimbă semnul, iar cea din mijloc și-l păstrează. Astfel, în vecinătatea lui P, arcul se află în același semispațiu cu $\vec{\alpha}''(t)$, traversează pe $\vec{\alpha}''(t)$, $\vec{\alpha}'''(t)$ și planul determinat de P, $\vec{\alpha}'(t)$ și $\vec{\alpha}''(t)$ (fig. 65).

Planul determinat de P, $\vec{\alpha}'(t)$ și $\vec{\alpha}''(t)$ se numește *plan osculator*.

Astfel, în vecinătatea lui P, curba considerată are o abatere de la tangentă (*curbare*) și o abatere de la planul osculator (*torsionare*).

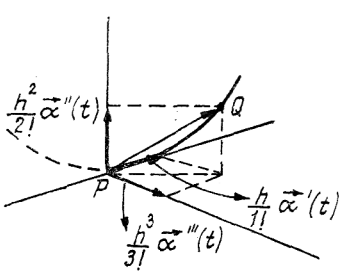


Fig. 65

Ne propunem să găsim elementele matematice care măsoară curbarea și torsionarea unei curbe regulate din $\mathbb{R}^3$.

15.1. Fie $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ o curbă cu viteza unu, adică $\|\vec{\beta}'(s)\| = 1$, $\forall\, s \in J$. Cîmpul $\vec{T} = \vec{\beta}'$ se numește cîmp *tangent unitar* al lui β. Derivînd pe $(\vec{\beta}', \vec{\beta}') = 1$ deducem $(\vec{\beta}'', \vec{\beta}') = 0$ și deci $\vec{T}' = \vec{\beta}''$, $\vec{\beta}'' \perp \vec{\beta}'$. După raționamentul făcut în § 9, curba β se încovoaie

în același sens cu $\vec{T}' = \beta''$. Pe măsură ce $\|\vec{\beta}''\|$ crește, încovoierea lui β crește. În acest fel $\vec{T}' = \vec{\beta}''$ controlează curbarea lui β, iar lungimea lui $\vec{T}'$ dă o măsură numerică a acestei curbări. De aceea $\vec{T}'$ se numește cîmp curbură, iar funcția $k : J \to [0, \infty)$, $k(s) = \|\vec{T}'(s)\|$, se numește *curbura* lui β (fig. 66).

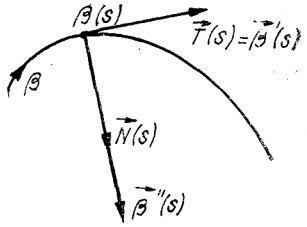


Fig. 66

Presupunem $k > 0$. În această ipoteză cîmpul vectorial $\vec{N} = \frac{1}{k}\vec{T}'$ se numește *cîmpul normal principal* al lui β. Cîmpul $\vec{N}$ indică în fiecare punct sensul în care se curbează β. Evident $\vec{T}(s)$ și $\vec{N}(s)$ determină planul osculator al curbei β. Pentru controlul abaterii curbei de la planul osculator (*torsionare*) în vecinătatea punctului $\beta(s)$ se utilizează versorul normal al acestui plan. De aceea se introduce cîmpul unitar $\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$ care se numește *cîmp binormal* pe β.

Evident cîmpurile vectoriale $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ definite pe β sînt ortonormate. Ansamblul $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ poartă numele de *cîmpul reperului Frenet* pe β, iar ansamblul $\vec{T}(s)$, $\vec{N}(s)$, $\vec{B}(s)$ se numește *reper Frenet* atașat punctului $\beta(s)$ de pe curbă.

Acest reper determină un triedru Frenet (mobil) ale cărui muchii se numesc respectiv : *tangenta*, *normala principală* și *binormala*.

Planele de coordonate ale acestui triedru se numesc respectiv *plan normal*, *plan rectificant* și *plan osculator* (fig. 67).

Folosirea cîmpului reperului Frenet în studiul unei curbe regulate β dă mai multe informații despre curbă decît ar da folosirea oricărui alt cîmp de repere. Ideea de bază care pune în evidență utilitatea acestui cîmp de repere constă în posibilitatea exprimării derivatelor $\vec{T}', \vec{N}', \vec{B}'$ cu ajutorul lui $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$. Știm că $\vec{T}' = k\vec{N}$. Să arătăm că $\vec{B}'$ este coliniar cu $\vec{N}$. Pentru aceasta este suficient să dovedim că $(\vec{B}', \vec{B}) = 0$ și $(\vec{B}', \vec{T}) = 0$. Prima relație este adevărată deoarece $\vec{B}(s)$ este un versor. Pentru a demonstra a doua relație derivăm pe $(\vec{B}, \vec{T}) = 0$ și găsim

$$(\vec{B}', \vec{T}) + (\vec{B}, \vec{T}') = 0 \text{ sau } (\vec{B}', \vec{T}) = -(\vec{B}, k\vec{N}) = 0.$$

Funcția reală $\tau : J \to \mathbb{R}$ definită prin

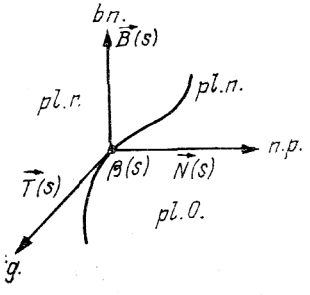


Fig. 67

$$\vec{B}' = -\tau\vec{N}$$

se numește *torsiunea* curbei (semnul minus este pus prin convenție). $\tau(s)$ poate fi un număr negativ, nul sau pozitiv. Ulterior vom arăta modul în care τ măsoară abaterea curbei β de la planul său osculator.

Să exprimăm acum pe $\vec{N}'$, în raport cu $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$. Avem

$$\vec{N}' = (\vec{N}', \vec{T})\vec{T} + (\vec{N}', \vec{N})\vec{N} + (\vec{N}', \vec{B})\vec{B}.$$

Deoarece $\vec{N}(s)$ este un versor rezultă că $(\vec{N}', \vec{N}) = 0$. Pentru evaluarea lui $(\vec{N}', \vec{T})$ şi $(\vec{N}', \vec{B})$ pornim de la $(\vec{N}, \vec{T}) = 0$ şi $(\vec{N}, \vec{B}) = 0$ pe care le derivăm în raport cu s. Găsim:

$$(\vec{N}', \vec{T}) = -(\vec{N}, \vec{T}') = -(\vec{N}, k\vec{N}) = -k,$$

$$(\vec{N}', \vec{B}) = -(\vec{N}, \vec{B}') = -(\vec{N}, -\tau\vec{N}) = \tau.$$

Astfel am demonstrat:

15.2. Teoremă (*formulele Frenet*). Dacă $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ este o curbă cu viteza unu, cu curbura $k > 0$ şi cu torsiunea τ, atunci

$$\begin{aligned} \vec{T}' &= \qquad\quad k\vec{N} \\ \vec{N}' &= -k\vec{T} \qquad\quad + \tau\vec{B} \\ \vec{B}' &= \qquad\quad -\tau\vec{N}. \end{aligned}$$

15.3. *Aproximarea Frenet.* Ne propunem să dăm acum o aproximare a unei curbe β în vecinătatea unui punct al său şi cu ajutorul acestei aproximări să arătăm în ce mod curbura şi torsiunea influenţează forma curbei. Pentru aceasta pornim de la aproximarea Taylor

$$\bar{\beta}(s) \simeq \bar{\beta}(0) + \frac{s}{1!}\bar{\beta}'(0) + \frac{s^2}{2!}\bar{\beta}''(0) + \frac{s^3}{3!}\bar{\beta}'''(0)$$

pe care o vom exprima cu ajutorul reperului Frenet în punctul considerat. Avem

$$\vec{\beta}'(0) = \vec{T}_0, \qquad \vec{\beta}''(0) = k_0\vec{N}_0.$$

Pe de altă parte

$$\vec{\beta}''' = (k\vec{N})' = \frac{dk}{ds}\vec{N} + k\vec{N}'$$

şi folosind formula lui Frenet pentru $\vec{N}'$ găsim

$$\vec{\beta}'''(0) = -k_0^2\vec{T}_0 + \frac{dk}{ds}(0)\vec{N}_0 + k_0\tau_0\vec{B}_0.$$

Înlocuind în aproximarea Taylor şi reţinînd numai partea principală în fiecare componentă (puterile cele mai mici ale lui s) obţinem

$$\bar{\beta}(s) \sim \bar{\beta}(0) + s\bar{T}_0 + k_0\frac{s^2}{2}\bar{N}_0 + k_0\tau_0\frac{s^3}{6}\bar{B}_0.$$

Notînd partea dreaptă cu $\bar{\gamma}(s)$ obţinem o curbă $\gamma : J \to \mathbb{R}^3$ numită *aproximarea Frenet* a lui β în vecinătatea lui $s = 0$ (fig. 68). Precizăm

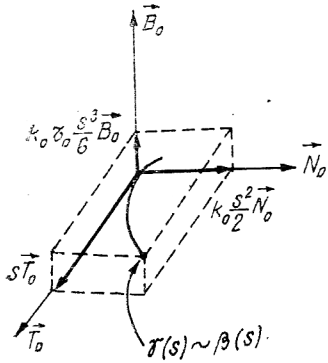


Fig. 68

că β are aproximări Frenet diferite în puncte diferite. Dacă $s = 0$ este înlocuit printr-un punct arbitrar $s = s_0$, atunci în expresiile anterioare s se înlocuieşte cu $s - s_0$.

Să examinăm aproximarea Frenet dată anterior. Primul termen în expresia lui $\vec{\gamma}(s)$ este chiar punctul $\beta(0)$. Primii doi termeni dau tangenta lui β în $\beta(0)$:

$$s \to \vec{\beta}(0) + s\vec{T}_0.$$

Aceasta este *cea mai bună aproximare liniară a lui* β în vecinătatea lui $\beta(0)$. Primii trei termeni dau parabola

$$s \to \vec{\beta}(0) + s\vec{T}_0 + k_0 \frac{s^2}{2} \vec{N}_0,$$

care este *cea mai bună aproximare pătratică a lui* β în vecinătatea lui $\beta(0)$. Observăm că această parabolă se află în planul osculator al lui β în punctul $\beta(0)$, are aceeaşi formă ca şi parabola $y = k_0 \frac{x^2}{2}$ din planul xOy şi este complet determinată prin curbura k_0. Astfel k_0 măsoară abaterea curbei de la tangenta în $\beta(0)$ în sensul lui $\vec{N}_0$.

În final, torsiunea τ_0, care apare în ultimul şi cel mai mic termen al lui $\vec{\gamma}$, controlează abaterea lui β de la planul său osculator, în $\beta(0)$, în direcţia lui $\vec{B}_0$.

§ 16. Formule Frenet pentru curbe cu viteza arbitrară

16.1. Fie $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, $t \to \alpha(t)$, o curbă regulată care nu are viteza unu şi $\beta : J \to \mathbb{R}^3$, $s \to \beta(s)$, reprezentarea sa normală. Dacă $s : I \to J$ este abscisa curbilinie, atunci

$$\forall\, t \in I,\ \alpha(t) = \beta(s(t)).$$

Dacă $k_\beta > 0$, τ_β, $\vec{T}_\beta$, $\vec{N}_\beta$ şi $\vec{B}_\beta$ sînt elementele Frenet pentru β, atunci pentru α definim:

— funcţia curbură: $k = k_\beta \circ s$,

— funcţia torsiune: $\tau = \tau_\beta \circ s$,

— cîmpul tangent unitar: $\vec{T} = \vec{T}_\beta \circ s$,

— cîmpul normal principal: $\vec{N} = \vec{N}_\beta \circ s$,

— cîmpul binormal: $\vec{B} = \vec{B}_\beta \circ s$

şi astfel obţinem elementele Frenet pentru o curbă cu viteza arbitrară (fig. 69).

16.2. Lemă. (*Formulele Frenet pentru o curbă cu viteza arbitrară*). Dacă $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ este o curbă regulată cu viteza v şi $k > 0$, atunci

$$\begin{aligned} \vec{T}' &= \qquad\quad kv\vec{N} \\ \vec{N}' &= -kv\vec{T} \qquad\quad + \tau v\vec{B} \\ \vec{B}' &= \qquad\quad - \tau v\vec{N} \end{aligned}$$

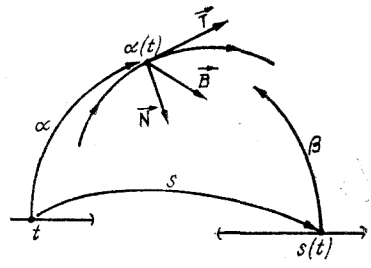


Fig. 69

Demonstrație. Fie β reprezentarea normală a lui α. Prin definiție $\vec{T}(t) = \vec{T}_\beta(s(t))$, $t \in I$, și prin derivare găsim

$$\vec{T}'(t) = s'(t)\vec{T}'_\beta(s(t)).$$

Pe de altă parte teorema 15.2 dă

$$\vec{T}'_\beta(s) = k_\beta(s)\,\vec{N}_\beta(s).$$

Înlocuind pe s cu $s(t)$ și revenind la $\vec{T}'(t)$ deducem

$$\vec{T}'(t) = s'(t)\,k_\beta(s(t))\,\vec{N}(s(t)) = v(t)\,k(t)\,\vec{N}(t).$$

Celelalte formule se demonstrează analog.

Să exprimăm acum cîmpul viteză și cîmpul accelerație în raport cu $\vec{T}, \vec{N}$ și $\vec{B}$.

16.3. Lemă. Dacă α este o curbă regulată cu viteza v, atunci cîmpurile viteză și accelerație ale lui α sînt date de

$$\vec{\alpha}' = v\vec{T}, \quad \vec{\alpha}'' = \frac{dv}{dt}\,\vec{T} + kv^2\vec{N}.$$

Demonstrație. Deoarece $\vec{\alpha} = \vec{\beta}(s)$ găsim

$$\vec{\alpha}'(t) = s'(t)\,\vec{\beta}'(s(t)) = v(t)\,\vec{T}_\beta(s(t)) = v(t)\,\vec{T}(t).$$

O nouă derivare dă (fig. 70)

$$\vec{\alpha}'' = \frac{dv}{dt}\,\vec{T} + v\vec{T}' = \frac{dv}{dt}\,\vec{T} + kv^2\vec{N}.$$

Formula care dă accelerația este mai complicată decît formula care dă viteza. Prin definiție $\vec{\alpha}''$ este variația vitezei $\vec{\alpha}'$ în unitatea de timp și în general se schimbă atît lungimea lui $\vec{\alpha}'$ cît și direcția.

Componenta tangențială $\frac{dv}{dt}\,\vec{T}$ a lui $\vec{\alpha}''$ indică variația lungimii lui $\vec{\alpha}'$, iar *componenta normală* $kv^2\vec{N}$ indică variația direcției lui $\vec{\alpha}'$.

Ne propunem acum să dăm formulele explicite pentru determinarea elementelor Frenet.

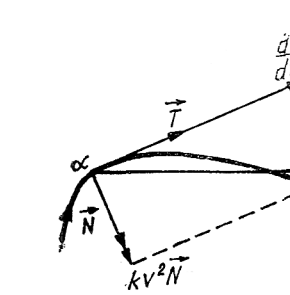


Fig. 70

16.4. Teoremă. Dacă $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ este o curbă regulată, atunci

$$\vec{T} = \frac{\vec{\alpha}'}{\|\vec{\alpha}'\|}, \quad \vec{N} = \vec{B} \times \vec{T},$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''}{\|\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''\|},$$

$$k = \frac{\|\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''\|}{\|\vec{\alpha}'\|^3}, \quad \tau = \frac{(\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}'', \vec{\alpha}''')}{\|\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''\|^2},$$

unde „$'$" înseamnă derivata în raport cu t.

Demonstrație. Deoarece $v = \|\vec{\alpha}'\| > 0$, formula $\vec{T} = \dfrac{\vec{\alpha}'}{\|\vec{\alpha}'\|}$ este echivalentă cu $\vec{\alpha}' = v\vec{T}$.

Folosind lema anterioară găsim

$$\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}'' = kv^3\vec{B}.$$

Deoarece $\|\vec{B}\| = 1$, $k \geqslant 0$ și $v > 0$, obținem

$$kv^3 = \|\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''\|.$$

Această relație arată că pentru curbele regulate condiția $k > 0$ este echivalentă cu $\|\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''\| > 0$. De aceea, pentru $k > 0$, vectorii $\vec{\alpha}'$ și $\vec{\alpha}''$ sînt liniar independenți și determină planul osculator în fiecare punct, ca și $\vec{T}$ și $\vec{N}$. Rezultă

$$\vec{B} = \frac{\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''}{kv^3} = \frac{\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''}{\|\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''\|}.$$

Pentru obținerea produsului $(\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}'', \vec{\alpha}''')$ este suficient să exprimăm pe $\vec{\alpha}'''$ cu ajutorul lui $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$. Avem

$$\vec{\alpha}''' = \left(\frac{dv}{dt}\vec{T} + kv^2\vec{N}\right)' = kv^3\tau\vec{B} + \ldots$$

Ceilalți termeni nu ne interesează deoarece $(\vec{B}, \vec{T}) = 0$, $(\vec{B}, \vec{N}) = 0$.

Rezultă

$$(\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}'', \vec{\alpha}''') = k^2v^6\tau$$

și deoarece $\|\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''\| = kv^3$, găsim formula pentru τ.

16.5. Observație. Din punctul de vedere al calculului este suficient să folosim aceeași literă α atît pentru curba dată inițial cît și pentru reprezentarea ei normală și analog aceleași notații pentru elementele Frenet.

§ 17. Aplicații ale formulelor Frenet

În baza rezultatelor din § 15 și § 16 este suficient să facem raționamente numai pentru curbele cu viteza unu (în loc de curbe regulate) și preferăm aceste raționamente deoarece sînt mai simple.

17.1. Teoremă. O curbă cu viteza unu $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ este o parte a unei drepte dacă și numai dacă $k = 0$.

Demonstrație. Deoarece $k(s) = \|\vec{\beta}''(s)\|$, relația $k = 0$ este echivalentă cu $\vec{\beta}''(s) = \vec{0}$, $\forall s \in J$.

17.2. Teoremă. Fie $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ o curbă cu viteza unu pentru care $k > 0$. β este o curbă plană dacă și numai dacă $\tau = 0$.

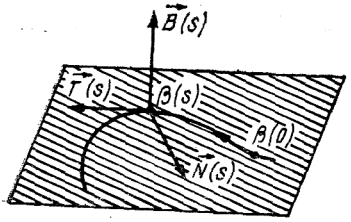


Fig. 71

Demonstrație. Fie planul $(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{a}) = 0$. Dacă β se află în acest plan, atunci $(\beta - \vec{r}_0, \vec{a}) = 0$. Derivînd, obținem

$$(\vec{\beta}', \vec{a}) = (\vec{\beta}'', \vec{a}) = 0.$$

Rezultă că $\vec{a}$ este perpendicular pe $T = \vec{\beta}'$ și $\vec{N} = \frac{\vec{\beta}''}{k}$. Astfel

$$\vec{B} = \pm \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|},$$

adică $\vec{B}' = \vec{0}$ și deci $\tau = 0$.

Invers, presupunem $\tau = 0$. Din teorema 15.2 rezultă $\vec{B}' = \vec{0}$ și deci $\vec{B} = \vec{a}_0$. Vom arăta că β se află în planul care trece prin $\beta(0)$ și este perpendicular pe $\vec{B}$ (fig. 71). Pentru aceasta considerăm funcția

$$f : J \to \mathbb{R},\ f(s) = (\vec{\beta}(s) - \vec{\beta}(0), \vec{B}).$$

Avem $\frac{df}{ds} = (\vec{\beta}', \vec{B}) = 0$ și deci $f(s) = \text{const.}$ Cum $f(0) = 0$, găsim $(s) = 0$. Astfel

$$(\vec{\beta}(s) - \vec{\beta}(0), \vec{B}) = 0,\ \forall s.$$

17.3. Teoremă. Fie $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ o curbă cu viteza unu care are curbura $k > 0$ și torsiunea τ. β este o parte a unui cerc de rază $\frac{1}{k}$ dacă și numai dacă $k = \text{const.}$ și $\tau = 0$.

Demonstrație. Fie $\tau = 0$, adică β o curbă plană. Considerăm curba $\vec{\delta} = \vec{\beta} + \frac{1}{k}\vec{N}$. Găsim $\vec{\delta}' = \vec{\beta}' + \frac{1}{k}\vec{N}' = \vec{T} + \frac{1}{k}(-k\vec{T}) = \vec{0}$. Astfel curba δ se reduce la un punct, adică

$$\forall s \in J,\ \vec{\beta}(s) + \frac{1}{k}\vec{N}(s) = \vec{C} \text{ și deci } \|\vec{\beta}(s) - \vec{C}\| = \left\| -\frac{1}{k}\vec{N} \right\| = \frac{1}{k}.$$

Rezultă că β se află pe cercul cu centrul în C și de rază $\frac{1}{k}$ (fig. 72).

Invers, fie β o parte a unui cerc de rază r. Deoarece cercul este o curbă plană avem $\vec{\beta}(s) = \vec{c} - r\vec{N}(s)$ și $\tau = 0$. De aici și din teorema 15.2 rezultă $\vec{\beta}'(s) = -r\vec{N}'(s) = rk\vec{T}(s)$, adică $rk = 1$ sau $k = \frac{1}{r}$.

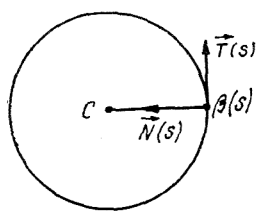


Fig. 72

În continuare ne vom ocupa de elici cilindrice.

17.4. *Definiție. O curbă regulată $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, $t \to \alpha(t)$ al cărui vector tangent unitar $\vec{T}(t)$ face în fiecare*

punct un unghi constant cu un versor dat $\vec{u}$, *adică* $(\vec{T}(t), \vec{u}) = \cos\theta$, $\forall\, t \in I$, *se numește elice cilindrică.*

Condiția impusă nu este afectată de reparametrizare. De aceea ne vom ocupa cu elicea cilindrică $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ care are viteza unu.

Fie β o curbă cu viteza unu pentru care $(\vec{T}, \vec{u}) = \cos\theta$. Luînd pe $\beta(0)$ drept origine, funcția $h(s) = (\vec{\beta}(s) - \vec{\beta}(0), \vec{u})$ arată cum se ridică $\beta(s)$ în direcția lui $\vec{u}$ (fig. 73). Pe de altă parte

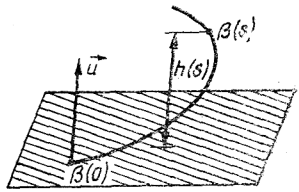


Fig. 73

$$\frac{dh}{ds} = (\vec{\beta}', \vec{u}) = (\vec{T}, \vec{u}) = \cos\theta$$

și astfel

$$h(s) = s\cos\theta.$$

Dacă prin fiecare punct al lui β ducem o dreaptă paralelă cu $\vec{u}$, atunci obținem o suprafață cilindrică pe care se află β. Considerentele de mai sus arată că pentru orice elice cilindrică β există o curbă γ astfel încît

$$\vec{\beta}(s) = \vec{\gamma}(s) + s\cos\theta\vec{u},$$

unde abscisa curbilinie s este măsurată, de exemplu, de la zero. Curba γ se numește *curba secțiunii transversale* a suprafeței cilindrice pe care se află β. Ea se află în planul determinat de punctul $\beta(0)$ și de vectorul normal $\vec{u}$ (fig. 74). De asemenea, dacă curbura lui β este k, atunci un calcul simplu arată că funcția curbură a lui γ este $\dfrac{k}{\sin^2\theta}$.

17.5. Observație. Pentru o parametrizare arbitrară avem

$$\vec{\alpha}(t) = \vec{\gamma}(t) + s(t)\cos\theta\,\vec{u},$$

unde $s = s(t)$ este abscisa curbilinie.

17.6. Teoremă. Fie $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ o curbă cu viteza unu care are curbura $k > 0$ și torsiunea τ. β este o elice cilindrică dacă și numai dacă $\dfrac{\tau}{k} = \text{const}$.

Demonstrație. Dacă β este o elice cilindrică cu $(\vec{T}, \vec{u}) = \cos\theta$, atunci

$$0 = (\vec{T}, \vec{u})' = (\vec{T}', \vec{u}) = (k\vec{N}, \vec{u}) \Rightarrow (\vec{N}, \vec{u}) = 0.$$

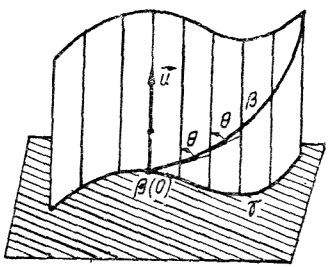


Fig. 74

Astfel, $\forall\, s \in J$, $\vec{u}$ se află în planul lui $\vec{T}(s)$ și $\vec{B}(s)$. Deoarece $\vec{u}$ este un versor, avem $\vec{u} = \vec{T}\cos\theta + \vec{B}\sin\theta$ și prin derivare găsim

$$0 = (k\cos\theta - \tau\sin\theta)\vec{N} \Rightarrow \frac{\tau}{k} = \operatorname{ctg}\theta = \text{const}.$$

Invers, fie $\frac{\tau}{k} = \text{const}$. Alegem pe θ astfel încît $\frac{\tau}{k} = \operatorname{ctg}\theta$ și construim cîmpul $\vec{U} = \vec{T}\cos\theta + \vec{B}\sin\theta$. Deoarece $\vec{U}' = (k\cos\theta - \tau\sin\theta)\vec{N} = \vec{0}$, rezultă că $\vec{U}$ este un cîmp de vectori paraleli și deci el se reprezintă prin vectorul $\vec{u}$ astfel încît $(\vec{T}, \vec{u}) = \cos\theta$. De aceea β este o elice cilindrică.

Un caz particular al elicei cilindrice este elicea circulară. În acest caz suprafața cilindrică este un cilindru circular drept, iar secțiunea transversală este un cerc de rază $\frac{\sin^2\theta}{k}$.

17.7 Exemplu. Fie $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ o curbă cu viteza unu care are curbura $k > 0$ și torsiunea $\tau \neq 0$. Să se arate că β este o (parte dintr-o) elice circulară dacă și numai dacă $k = \text{const.}$ și $\tau = \text{const.}$

Soluție. Pentru implicația directă vom da o demonstrație care poate servi ca model pentru determinarea elementelor Frenet pentru o curbă cu viteza unu.

Fie elicea circulară $\vec{\beta}(s) = \left(a\cos\frac{s}{c},\ a\sin\frac{s}{c},\ \frac{bs}{c}\right)$, unde $c = \sqrt{a^2+b^2}$, $a > 0$, $b \neq 0$.

Avem

$$\vec{T}(s) = \vec{\beta}'(s) = \left(-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c},\ \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c},\ \frac{b}{c}\right),$$

$$\vec{T}'(s) = \vec{\beta}''(s) = \left(-\frac{a}{c^2}\cos\frac{s}{c},\ -\frac{a}{c^2}\sin\frac{s}{c},\ 0\right)$$

și deci

$$k(s) = \|\vec{T}'(s)\| = \frac{a}{c^2} = \frac{a}{a^2+b^2} > 0.$$

Deoarece $\vec{T}' = k\vec{N}$, găsim

$$\vec{N}(s) = \left(-\cos\frac{s}{c},\ -\sin\frac{s}{c},\ 0\right).$$

Astfel, $\forall\, a, b$, sensul lui $\vec{N}$ este spre axa cilindrului (fig. 75). Din $\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$ rezultă

$$\vec{B}(s) = \left(\frac{b}{c}\sin\frac{s}{c},\ -\frac{b}{c}\cos\frac{s}{c},\ \frac{a}{c}\right)$$

și deci

$$\vec{B}'(s) = \left(\frac{b}{c^2}\cos\frac{s}{c},\ \frac{b}{c^2}\sin\frac{s}{c},\ 0\right).$$

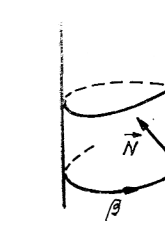


Fig. 75

Din $B' = -\tau\vec{N}$ rezultă

$$\tau(s) = \frac{b}{c^2} = \frac{b}{a^2+b^2} \neq 0.$$

Invers, fie β o curbă cu viteza unu pentru care $k = \text{const.} > 0$ și $\tau = \text{const.} \neq 0$. Deoarece $\frac{\tau}{k} = \operatorname{ctg} \theta = \text{const.}$, β este o elice cilindrică. Deoarece $k = \text{const.}$, rezultă că secțiunea transversală γ este un cerc de rază $\frac{\sin^2 \theta}{k}$. De aceea β este o elice circulară. Luînd $\vec{u} = \vec{k}$, $k = \frac{a}{a^2 + b^2}$, $\tau = \frac{b}{a^2 + b^2}$, găsim reprezentarea

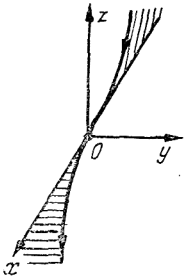


Fig. 76

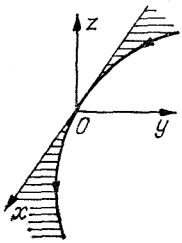


Fig. 77

$$\vec{\beta}(s) = \left(a \cos \frac{s}{c},\ a \sin \frac{s}{c},\ \frac{bs}{c} \right).$$

17.3. Observații.

1) Curbura și torsiunea determină o curbă din spațiu abstracție făcînd de poziție (adică de o izometrie) [33]. Ipoteza esențială care permite demonstrația acestei afirmații este $k > 0$.

Chiar dacă k se anulează într-un singur punct, caracterul geometric al curbei se poate schimba radical în acest punct. Pentru a pune în evidență acest lucru fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă care satisface condițiile $f(t) = 0$ pentru $t \leqslant 0$, $f(t) > 0$, $f''(t) > 0$ pentru $t > 0$ și curbele

$$\alpha_1(t) = \begin{cases} (t, 0, f(-t)), & t < 0 \\ (0, 0, 0), & t = 0 \\ (t, f(t), 0), & t > 0 \end{cases} \qquad \alpha_2(t) = \begin{cases} (t, f(-t), 0), & t < 0 \\ (0, 0, 0), & t = 0 \\ (t, f(t), 0), & t > 0. \end{cases}$$

Observăm că ambele curbe au aceeași curbură care se anulează numai în $t = 0$. În $t = 0$ nu putem defini torsiunea, dar pentru $t \neq 0$ ambele curbe au torsiunea nulă. Într-adevăr, arcul $t < 0$ al lui α_1 se află în planul xOz, iar arcul $t > 0$ se află în planul xOy (fig. 76). Curba α_2 este în întregime situată în planul xOy (fig. 77). Evident cele două curbe nu pot fi suprapuse printr-o izometrie.

2) Curbele din plan pot fi privite ca niște curbe particulare din spațiu. Mai restrictiv, orice curbă regulată din spațiu pentru care $k > 0$ este curbă plană dacă și numai dacă, $\tau = 0$. De aceea am putea obține elemente Frenet pentru curbele regulate din plan prin particularizarea noțiunilor introduse în paragrafele precedente. Acest punct de vedere este însă prea restrictiv și nu oferă libertatea de care dispunem în plan (vezi § 11).

§ 18. Probleme

1. Fie curba $\alpha : [0, \pi] \to \mathbb{R}^4$, $\alpha(t) = (\sin t, \cos^2 t, 5 \sin t, 1 - 3 \cos^2 t)$. Să se arate că α este închisă, iar prelungirea ei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ este periodică.

2. Fie curba $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$, $\alpha(t) = (\sin t, 1 + \cos t, \sin t + \cos^2 t, \sin^2 t)$. Să se arate că punctul $\alpha\left(\frac{\pi}{4}\right)$ este regulat, iar tangenta la curbă în acest punct este perpendiculară pe dreapta de direcție $\vec{d} = (1, 1, -\sqrt{2} - 2, -1)$. Să se determine hiperplanul normal la α în punctul $\alpha\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

3. Fie $\vec{Y}$ un cîmp vectorial pe curba $\alpha(t) = (\sin t, 1 + \cos t, \sin t + \cos^2 t, \sin^2 t)$. În fiecare dintre cazurile următoare, să se exprime $\vec{Y}$ în forma $\vec{Y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3 + y_4\vec{e}_4$.

1) $\vec{Y}(t)$ este vectorul cu originea în $\alpha(t)$ și cu extremitatea în originea lui $\mathbb{R}^4$.

2) $\vec{Y}(t) = \vec{\alpha}'(t) - \vec{\alpha}''(t)$.

3) $\vec{Y}(t)$ are lungimea unu și este perpendicular pe $\vec{\alpha}'(t)$, $\vec{\alpha}''(t)$ și pe $\vec{\alpha}'''(t)$.

4) $\vec{Y}(t)$ este vectorul cu originea în $\alpha(t)$ și cu extremitatea în $\alpha(t + \pi)$.

4. Să se cerceteze ramurile infinite și să se determine asimptotele (dacă există)

1) $\alpha = (x, y) : (\mathbb{R} - \{1\}) \to \mathbb{R}^2$, $x(t) = \dfrac{t^3 + 2}{t^3 - 1}$, $y(t) = \dfrac{3t}{t^3 - 1}$.

2) $\alpha = (x, y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x(t) = \dfrac{2 + t^2}{1 + t^2}$, $y(t) = \dfrac{t^3}{1 + t^2}$.

5. Fie curba $\alpha : (\mathbb{R} - \{-1, 1\}) \to \mathbb{R}^5$, $\alpha(t) = \left(\dfrac{1}{t-1}, \dfrac{2t}{t^2-1}, \dfrac{t^2+1}{t^2-1}, \dfrac{2}{t+1}, \dfrac{t}{t+1}\right)$.

1) Să se arate că punctul $(-1, 0, -1, 2, 0)$ se află pe curbă și să se determine tangenta și hiperplanul normal la curbă în acest punct.

2) Să se cerceteze ramurile infinite ale curbei și să se determine asimptotele (dacă există)

6. Fie curba $\alpha : (0, 4) \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (\sqrt{t}, t\sqrt{t}, 1 - t)$. Să se reparametrizeze prin $h : (0, 2) \to \mathbb{R}$, $h(u) = u^2$.

7. Fie curba $\alpha : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (2 \cos t - \cos 2t, 2 \sin t - \sin 2t)$. Să se determine abscisa curbilinie corespunzătoare originii $t = 0$ și reprezentarea normală.

8. Fie curba $\alpha : (\mathbb{R} - \{0\}) \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = \left(\int \dfrac{\sin t}{t}\, dt, \int \dfrac{\cos t}{t}\, dt\right)$. Să se arate că α este o curbă regulată și să se calculeze lungimea arcului $t \in [2, 3]$.

9. Fie curbele:

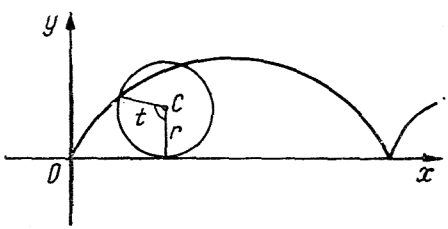
$$\alpha_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^4,\ \alpha_1(t) = (\cos t, \sin^3 t, 2 + \sin t, 1 - \cos t),$$

$$\alpha_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^4,\ \alpha_2(t) = \left(\sin t, \frac{1}{2}\cos t, 2 + \cos t, 1 - \sin t\right).$$

1) Să se arate că sînt curbe închise și au un punct comun M_0.

2) Să se arate că cele două curbe au un contact de ordinul întîi în M_0 și să se determine unghiul curbelor în M_0.

10. Să se arate că $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = \left(\dfrac{2 + t^2}{1 + t^2}, \dfrac{t^3}{1 + t^2}\right)$ este o curbă simplă. Să se determine punctele singulare ale curbei, tangentele și normalele în aceste puncte.

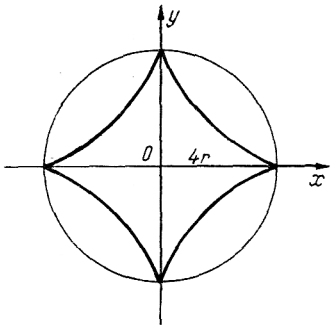


$$\text{Cicloida}: \begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t),\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Fig. 78

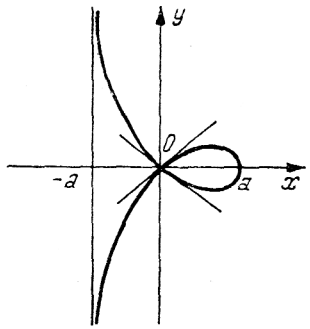
11. Curba descrisă de un punct M aflat pe un cerc de rază r ce se rostogolește (fără alunecare) de-a lungul unei drepte se numește *cicloidă*. Să se găsească ecuațiile parametrice ale cicloidei (fig. 78). Să se determine abscisa curbilinie și lungimea primei arcade a curbei. Să se calculeze segmentele tangentă, subtangentă, normală și subnormală într-un punct oarecare al cicloidei.

12. Să se construiască curbele de nivel con-



Astroidă

Fig. 79



Strofoidă

Fig. 80

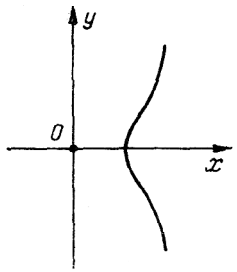


Fig. 81

stant $f^{-1}(-1), f^{-1}(0), f^{-1}(1)$ pentru $f(x, y) = x^2 - y^2$. În fiecare caz să se cerceteze în care puncte spațiul tangent va fi $[\nabla f(P)]^{\perp}$.

13. Să se găsească o parametrizare globală pentru fiecare dintre următoarele curbe, orientate prin $\dfrac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$, unde f este funcția definită de membrul stîng al fiecărei ecuații:

1) $ax + by = c, \quad b \neq 0.$

2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0.$

3) $y - ax^2 = c, \quad a \neq 0.$

4) $x^2 - y^2 = 1, \quad x > 0.$

14. Să se arate că $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (4r \cos^3 t, 4r \sin^3 t)$, (fig. 79), are puncte de întoarcere și să se determine tangentele în aceste puncte.

15. Fie curba $C = f^{-1}(0)$ unde $f(x, y) = y^2x + ay^2 + x^3 - ax^2$ (fig. 80). Să se arate că originea este punct dublu pentru curbă. Să se determine tangentele la curbă în acest punct.

16. Fie curba $C = f^{-1}(0)$, $f(x, y) = x^3 - x^2 - y^2$ (fig. 81). Să se arate că originea este punct izolat al curbei C.

17. Să se arate că originea este punct de întoarcere pentru curba $C = f^{-1}(0)$, $f(x, y) = x^3 + xy^2 - 2ay^2$ (fig. 82).

18. Să se traseze următoarele curbe

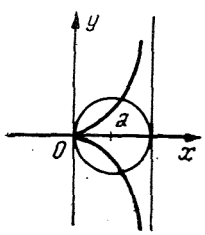
1) Curba Gauss: $y = e^{-x^2}$ ((fig. 17).

2) Lănțișorul: $y = \dfrac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$ (fig. 18).

3) Parabola cubică: $y = ax^3$ (fig. 19).

4) Curba Agnési: $x^2y = 4a^2(2a - y)$ (fig. 83).

5) Lemniscata Bernoulli: $(x^2+y^2)^2+2a^2(y^2-x^2)=0$ (fig. 84).



Cisoida lui Diocles

Fig. 82

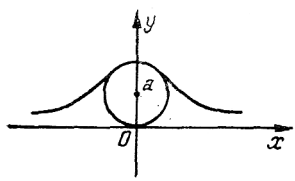


Fig. 83

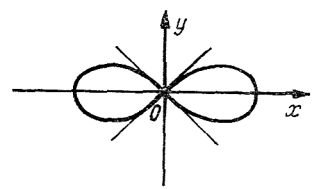


Fig. 84

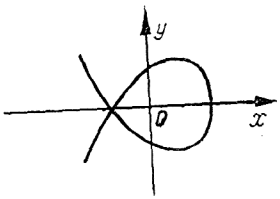


Fig. 85

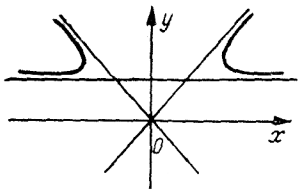


Fig. 86

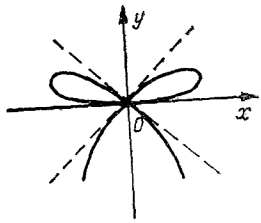


Fig. 87

6) Curba Lissajous : $x = \cos 2t$, $y = \sin 3t$ (fig. 85).

7) $x = \dfrac{\operatorname{ch} t}{t}$, $y = \dfrac{\operatorname{sh} t}{t}$ (fig. 86).

8) $x = t - t^3$, $y = t^2 - t^4$ (fig. 87).

19. Să se determine parabola cu axa paralelă cu Oy care are un contact de ordinul doi cu curba $y = x^3$ în punctul $x = 1$.

20. Să se determine înfășurătoarea următoarelor familii de curbe :

1) $(x - a)^2 + y^2 - \dfrac{a^2}{2} = 0.$

2) $\dfrac{x}{\alpha} + \dfrac{y}{\beta} - 1 = 0$, cînd $\alpha^m + \beta^m - a^m = 0$ (a = const.).

3) $x \cos a + y \sin a - 1 = 0.$

4) $y = ax + \dfrac{p}{2a}.$

21. Să se determine evoluta pentru curbele :

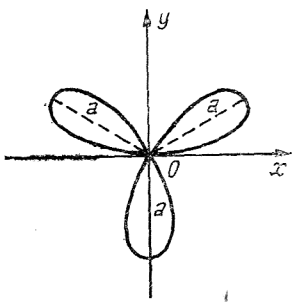
1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

2) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

22. Să se construiască curbele (rozetă cu trei foi),

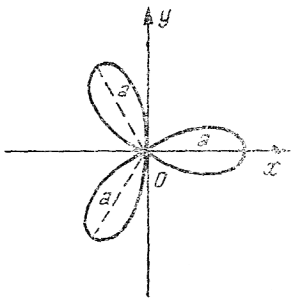
$$\rho = a \sin 3\theta \text{ (fig. 88)}, \qquad \rho = a \cos 3\theta \text{ (fig. 89)}.$$

23. Fie curba $\vec{\beta}(s) = \left(\dfrac{(1+s)^{3/2}}{3}, \dfrac{(1-s)^{3/2}}{3}, \dfrac{s}{\sqrt{2}}\right)$, $s \in (-1, 1)$. Să se determine $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$, k, τ.



$\rho = a \sin 3\theta$

Fig. 88



$\rho = a \cos 3\theta$

Fig. 89

24. Să se determine abscisa curbilinie a curbei

1) $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t^2/2)$,

2) $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (a \operatorname{ch} t, a \operatorname{sh} t, at)$,

3) $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (t \cos t, t \sin t, t^2/2)$, luînd ca origine punctul în care curba intersectează planul xOy. Să se găsească elementele Frenet $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$, k, τ și să se scrie ecuațiile muchiilor și fețelor triedrului Frenet în acest punct.

25. Se numește *curbă Tițeica*, curba pentru care $\frac{1}{\tau} d^2 = \text{const.}$, unde τ este torsiunea într-un punct arbitrar al curbei, iar d distanța de la un punct fix la planul osculator al curbei.

Să se arate că $C: xyz = 1$, $y^2 = x$ este o curbă Tițeica.

Capitolul 3

SUPRAFEȚE

§1. Noțiunea de suprafață

Fie spațiul $\mathbb{R}^3$ și $T_0\mathbb{R}^3$ spațiul tangent în origine la spațiul $\mathbb{R}^3$. Spațiile $\mathbb{R}^3$ și $T_0\mathbb{R}^3$ sînt izomorfe și de aceea de cele mai multe ori le vom identifica.

O suprafață în spațiu este o submulțime $\mathbb{M}$ a lui $\mathbb{R}^3$, netedă și cu două dimensiuni.

Fie $\mathbb{D}$ o mulțime deschisă din $\mathbb{R}^2$. De exemplu interiorul unui dreptunghi, al unui cerc etc.

1.1. *Definiție. O funcție diferențiabilă, regulată și injectivă* $r: \mathbb{D} \to \mathbb{R}^3$ *se numește hartă* (de coordonate).

Imaginea $r(\mathbb{D})$ a unei hărți r este o submulțime netedă și cu două dimensiuni a lui $\mathbb{R}^3$ (fig. 91). Observăm că avem diagrama din fig. 90, unde $\mathcal{J}_0$ este izomorfismul canonic dintre $\mathbb{R}^3$ și $T_0\mathbb{R}^3$. Astfel lui r putem să-i atașăm o funcție și numai una de tipul $\vec{r}: \mathbb{D} \to T_0\mathbb{R}^3$, ceea ce ne permite să privim mulțimea $\vec{r}(\mathbb{D})$ ca fiind descrisă de extremitatea unui vector variabil $\vec{r}$ cu originea fixată în O (fig. 91).

Din definiția lui $r(\mathbb{D})$ rezultă echivalența

$$P \in r(\mathbb{D}) \Leftrightarrow \exists (u, v) \in \mathbb{D},\ P = r(u, v).$$

Evident, aplicațiile anterioare sînt caracterizate prin coordonatele lor euclidiene

$$r(u, v) = (x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)),\ (u, v) \in \mathbb{D},$$

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k},\ (u, v) \in \mathbb{D}.$$

Ipoteza de regularitate se face pentru a asigura netezimea lui $r(\mathbb{D})$ iar ipoteza că aplicația r este injectivă asigură că $r(\mathbb{D})$ nu se intersectează cu ea însăși.

Pentru a defini suprafața plecăm de la ideea că orice regiune suficient de mică dintr-o suprafață $\mathbb{M}$ trebuie să semene cu o regiune din plan. În

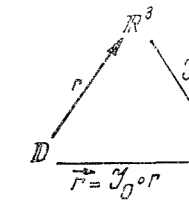


Fig. 90

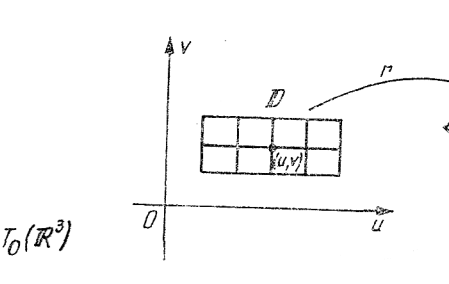


Fig. 91

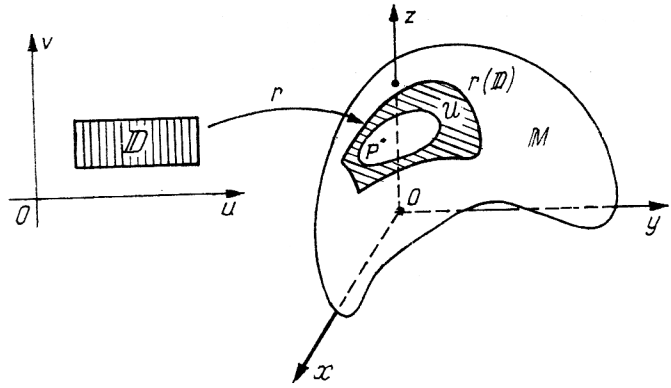


Fig. 92

particular, la mulţimi deschise din plan trebuie să corespundă mulţimi deschise din suprafaţa $\mathbb{M}$ şi invers. Acest lucru este asigurat dacă presupunem că în vecinătatea oricărui punct al său, $\mathbb{M}$ se poate exprima ca imaginea unei hărţi proprii. O hartă $r : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^3$ se numeşte *proprie* dacă funcţia inversă $r^{-1} : r(\mathbb{D}) \to \mathbb{D}$ este continuă (Imaginea concretă pentru $\mathbb{D}$ poate fi aceea a unei fîşii de cauciuc concepută fără margini; în acest caz $r(\mathbb{D})$ se obţine prin întinderea şi îndoirea lui $\mathbb{D}$). Pentru precizare definim *vecinătatea* U în $\mathbb{M}$ a lui $P \in \mathbb{M}$ ca fiind mulţimea tuturor punctelor lui $\mathbb{M}$ a căror distanţă euclidiană faţă de P este mai mică decît un număr $\varepsilon > 0$. O parte a lui $\mathbb{M}$ se numeşte *deschisă* dacă odată cu fiecare punct al său conţine şi o vecinătate U din $\mathbb{M}$ a acestui punct.

Hărţile ale căror imagini sînt conţinute în $\mathbb{M}$ se numesc *hărţi în* $\mathbb{M}$.

1.2. *Definiţie. O submulţime* $\mathbb{M}$ *a lui* $\mathbb{R}^3$, *care se bucură de proprietatea că* $\forall\, P \in \mathbb{M}$ *există o hartă proprie în* $\mathbb{M}$ *a cărei imagine să conţină o vecinătate a lui* P *din* $\mathbb{M}$, *se numeşte suprafaţă* (fig. 92).

Observăm că imaginea $\mathbb{M} = r(\mathbb{D})$ a unei hărţi proprii satisface definiţia 1.2 şi deci este o suprafaţă. O asemenea suprafaţă se numeşte *simplă*. Definiţia 1.2 arată că orice suprafaţă din $\mathbb{R}^3$ poate fi concepută ca reuniunea unor suprafeţe simple.

1.3 Exemple

1) *Sfera* este o suprafaţă în sensul definiţiei 1.2. Pentru a pune în evidenţă acest lucru este suficient să considerăm sfera cu centrul în origine şi de rază unu (fig. 93)

$$\mathbb{M} : x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

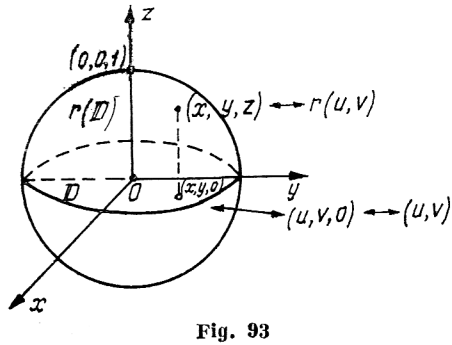


Fig. 93

Ne propunem să găsim o hartă proprie în $\mathbb{M}$ care să acopere o vecinătate a polului nord $(0, 0, 1)$. Prin proiecția fiecărui punct (x, y, z) al emisferei nordice a lui $\mathbb{M}$ pe planul xOy în (x, y, O) găsim o corespondență biunivocă a acestei emisfere cu un disc $\mathbb{D}$ de rază unu din planul xOy. Dacă identificăm acest plan cu $\mathbb{R}^2$ prin $(x, y, O) \leftrightarrow (x, y)$, atunci $\mathbb{D}$ devine un disc din $\mathbb{R}^2$ care constă din punctele (u, v) pentru care $u^2 + v^2 < 1$. Exprimînd corespondența dintre $\mathbb{D}$ și emisfera nordică ca o funcție pe $\mathbb{D}$ găsim

$$r : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^3, \quad r(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}).$$

Să arătăm că r este o hartă proprie. Mai întîi observăm că r este o aplicație diferențiabilă și injectivă. De asemenea r este și regulată deoarece transpusa matricii Jacobian,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dfrac{\partial f}{\partial u} \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial f}{\partial v} \end{bmatrix}, \quad f = \sqrt{1 - u^2 - v^2},$$

are rangul doi, $\forall (u, v) \in \mathbb{D}$. Deoarece funcția inversă $r^{-1} : r(\mathbb{D}) \to \mathbb{D}$ este dată prin $r^{-1}(x, y, z) = (x, y)$, rezultă că r^{-1} este continuă. Deci r este o hartă proprie.

Facem observația că harta r acoperă o vecinătate a lui $P(0, 0, 1)$ din $\mathbb{M}$. În mod necesar ea acoperă o vecinătate a oricărui alt punct Q din emisfera nordică.

Analog, putem găsi alte cinci hărți proprii, care să acopere celelalte cinci emisfere ale sferei și astfel verificăm că sfera este o suprafață în sensul definiției 1.2.

2) *Suprafața* $\mathbb{M} : z = f(x, y)$. Fie $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă. Graficul său

$$\mathbb{M} = \{(x, y, z) \mid z = f(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{D}\}$$

este o suprafață simplă (fig. 94) deoarece poate fi acoperit de imaginea lui $\mathbb{D}$ prin harta proprie (vezi raționamentul de la sferă)

$$r : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^3, \quad r(u, v) = (u, v, f(u, v)).$$

O hartă de acest tip se numește *hartă Monge*, iar despre $\mathbb{M}$ se spune că este dată prin *ecuația carteziană explicită* $z = f(x, y)$.

3) Dăm acum un exemplu din care să rezulte necesitatea ca o hartă să fie proprie.

Presupunem că avem o fîșie dreptunghiulară de cauciuc cu ajutorul căreia construim configurația $\mathbb{M}$ din figura 95. Configurația $\mathbb{M}$ nu este o suprafață în sensul dat anterior deoarece nu

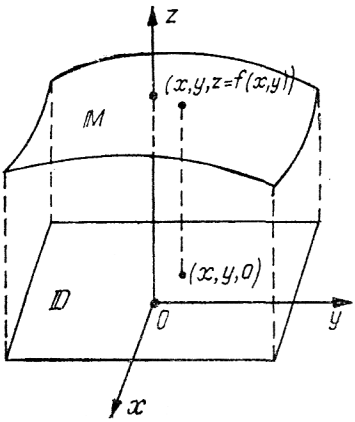


Fig. 94

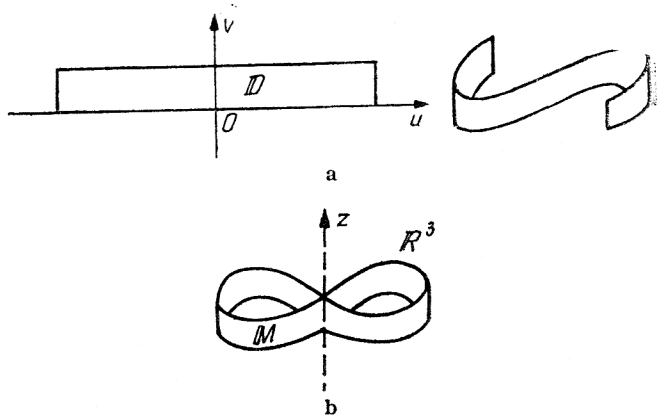


Fig. 95

satisface cerința ca în vecinătatea oricărui punct să semene cu o porțiune din plan. Într-adevăr de-a lungul lui Oz ea seamănă cu intersecția a două plane. Mai mult, trecerea de la fîșia plană la $\mathbb{M}$ este continuă în timp ce trecerea inversă nu este continuă deoarece $\mathbb{M}$ trebuie ruptă de-a lungul lui Oz.

Matematic, construcția anterioară se prezintă astfel: fie $\mathbb{D}$ dreptunghiul deschis $-\pi < u < \pi$, $0 < v < 1$ din $\mathbb{R}^2$ și $r : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^3$ aplicația definită prin $r(u, v) = (\sin u, \sin 2u, v)$. Se verifică ușor că r este o hartă (aplicație diferențiabilă, injectivă și regulată). Notăm $\mathbb{M} = r(\mathbb{D})$. Observăm că $\mathbb{D} = \mathbb{D}_1 \cup \mathbb{D}_2 \cup \mathbb{D}_3$, unde $\mathbb{D}_1 = \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \times (0, 1)$, $D_2 = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, 1)$, $\mathbb{D}_3 = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \times (0, 1)$ și deci $\mathbb{M} = \mathbb{M}_1 \cup \mathbb{M}_2 \cup \mathbb{M}_3$, unde $\mathbb{M}_i = r(\mathbb{D}_i)$, $i = 1, 2, 3$. Găsim

$$r^{-1}(x, y, z) = \begin{cases} (-\pi - \arcsin x, & z) & (x, y, z) \in \mathbb{M}_1 \\ (\arcsin x, & z) & (x, y, z) \in \mathbb{M}_2 \\ (\pi - \arcsin x, & z) & (x, y, z) \in \mathbb{M}_3. \end{cases}$$

Funcția r^{-1} nu este continuă în punctele $(0, 0, z)$, $0 < z < 1$. Astfel r nu este o hartă proprie și deci $\mathbb{M} = r(\mathbb{D})$ nu este o suprafață în sensul definiției 1.2.

4) *Suprafețe definite prin ecuații carteziene implicite.*

Considerăm o aplicație diferențiabilă de tipul $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Deoarece

$$J(f) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right]$$

punctele critice ale acestei aplicații (dacă există) se află rezolvînd sistemul

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 0.$$

Punctele în care cel puțin una din aceste derivate nu se anulează sînt puncte regulate.

Cu ajutorul lui f construim mulțimea

$$\mathbb{M} = f^{-1}(c) = \{(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = c,\ c \in \mathbb{R},\ c \text{ fixat}\},$$

care se numește *mulțime de nivel constant* c sau *mulțime de ecuație cartesiană implicită* $f(x, y, z) = c$. Pe scurt se scrie $\mathbb{M} : f(x, y, z) = c$. Presupunem că $\mathbb{M}$ nu este vidă și precizăm că, în general, $\mathbb{M}$ conține atît puncte regulate cît și puncte critice ale lui f.

1.4. Teoremă. Dacă $\mathbb{M} = f^{-1}(c)$ este nevidă și dacă funcția f este regulată (submersie) în punctele lui $\mathbb{M} = f^{-1}(c)$, atunci $\mathbb{M}$ este o suprafață.

Demonstrație. Pentru $\forall P(x, y, z) \in \mathbb{M}$, trebuie să găsim o hartă proprie care să acopere o vecinătate a lui P din $\mathbb{M}$. Ipoteza că f este regulată în punctele lui $\mathbb{M}$ este echivalentă cu presupunerea că cel puțin una dintre derivatele parțiale $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ nu este zero în P; fie, de exemplu,

$\frac{\partial f}{\partial z}(P) \neq 0$. În acest caz teorema funcției implicite spune că în vecinătatea lui P ecuația $f(x, y, z) = c$ definește pe z ca funcție de x și y. Mai precis, există o funcție diferențiabilă g definită pe o vecinătate $\mathbb{D}$ a lui (x, y) astfel încît (fig. 96)

(1) $\forall (u, v) \in \mathbb{D}$, $(u, v, g(u, v)) \in \mathbb{M}$, adică $f(u, v, g(u, v)) = c$,

(2) punctele de forma $(u, v, g(u, v))$ cu $(u, v) \in \mathbb{D}$ constituie o vecinătate a lui P în $\mathbb{M}$.

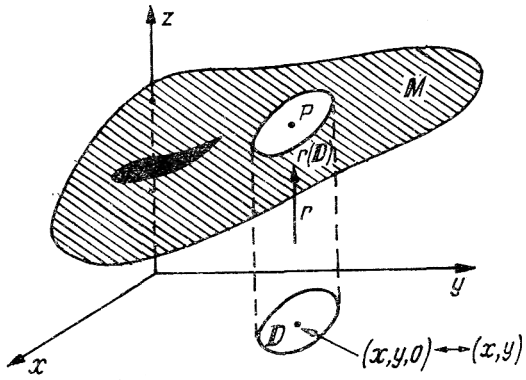


Fig. 96

Rezultă că harta Monge $r : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^3$ definită prin $r(u, v) = (u, v, g(u, v))$ satisface cerințele din definiția 1.2. Deoarece P este arbitrar în $\mathbb{M}$, tragem concluzia că $\mathbb{M}$ este o suprafață.

Dacă $\mathbb{M} : f(x, y, z) = c$ este o suprafață, atunci spunem că $\mathbb{M}$ este definită prin *ecuația carteziană implicită* $f(x, y, z) = c$ (denumirea de suprafață pentru $\mathbb{M} : f(x, y, z) = c$ se păstrează uneori chiar dacă $\mathbb{M}$ conține și puncte critice ale lui f).

Dacă f este un polinom de gradul n, atunci $\mathbb{M}$ se numește *suprafață algebrică de ordinul n*. În particular avem următoarele denumiri: suprafețe algebrice de ordinul unu (plane), suprafețe algebrice de ordinul doi (cuadrice) etc.

1.5. Observații.

1) În situații concrete $\mathbb{M}$ poate fi dată printr-o ecuație și prin mai multe inecuații în x, y, z (inecuațiile precizează o anumită porțiune din spațiu).

2) Reprezentarea lui $\mathbb{M}$ (sau a unei porțiuni din $\mathbb{M}$) în forma $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ se poate face prin intermediul teoremei 1.4 sau prin artificii de calcul.

3) Fie suprafața simplă $\mathbb{M} : x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $(u, v) \in \mathbb{D}$. În general, trecerea de la această reprezentare la reprezentarea carteziană explicită se poate face numai local. De exemplu, dacă $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}(u_0, v_0) \neq 0$, atunci teorema funcției inverse arată că în vecinătatea lui (u_0, v_0) restricția lui $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ admite inversa $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Astfel, restricția lui $z = z(u, v)$ apare ca o funcție compusă de tipul $z = z(u(x, y), v(x, y))$.

4) În general, dacă există o funcție $f(x, y, z)$ astfel încît $f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = c$, $\forall (u, v) \in \mathbb{D}$, atunci $f(x, y, z) = c$ este ecuația carteziană implicită a suprafeței $\mathbb{M} : x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $(u, v) \in \mathbb{D}$.

§2. Curbe coordonate

În acest paragraf vor fi prezentate unele proprietăți ale hărților care sînt necesare la studiul unei suprafețe date.

Fie $r : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^3$, $(u, v) \to r(u, v)$, o hartă.

Funcțiile parțiale $u \to r(u, v)$ și $v \to r(u, v)$ sînt curbe cu imaginea în $r(\mathbb{D})$. Explicit, $\forall (u_0, v_0) \in \mathbb{D}$, curba $u \to r(u, v_0)$ se numește *curba de para-*

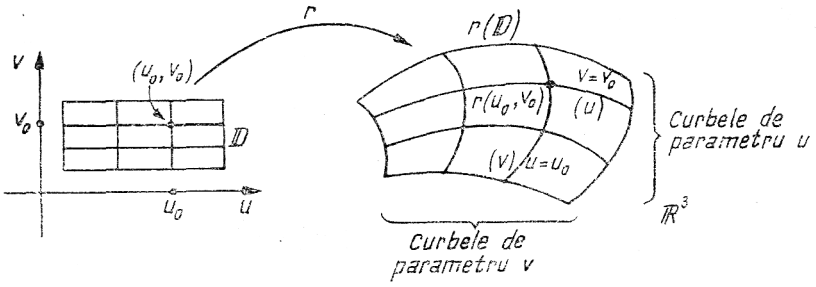


Fig. 97

metru u sau curba $v = v_0$; curba $v \to r(u_0, v)$ se numeşte *curba de parametru v sau curba* $u = u_0$ (fig. 97). Astfel imaginea $r(\mathbb{D})$ este acoperită de aceste două familii de curbe, care sînt imaginile prin r ale liniilor orizontale şi verticale din $\mathbb{D}$. Prin orice punct al lui $r(\mathbb{D})$ trece o curbă din familia (u) şi una din familia (v). De aceea uneori pentru aceste curbe se întrebuinţează denumirea de *curbe coordonate*.

Dacă $r : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^3$ este o hartă şi $(u_0, v_0) \in \mathbb{D}$, atunci

(1) vectorul viteză, în u_0, al curbei de parametru u se notează cu $\vec{r}_u(u_0, v_0)$;

(2) vectorul viteză, în v_0, al curbei de parametru v se notează cu $\vec{r}_v(u_0, v_0)$.

Vectorii $\vec{r}_u(u_0, v_0)$, $\vec{r}_v(u_0, v_0)$ se numesc *vitezele parţiale* ale lui r în (u_0, v_0) (fig. 98).

Astfel $\vec{r}_u$ şi $\vec{r}_v$ sînt funcţii definite pe $\mathbb{D}$ ale căror valori în fiecare punct $(u_0, v_0) \in \mathbb{D}$ sînt vectori tangenţi la $\mathbb{R}^3$ în $r(u_0, v_0)$. Indicii u şi v sînt scrişi pentru a sugera derivarea parţială. Dacă harta este dată cu ajutorul coordonatelor sale

$$r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

atunci vitezele parţiale sînt date de

$$\vec{r}_u = (x_u, y_u, z_u), \quad \vec{r}_v = (x_v, y_v, z_v),$$

cu precizarea că punctul de aplicaţie al lui $\vec{r}_u$ şi $\vec{r}_v$ este prin convenţie $r(u, v)$.

Pentru a testa dacă o submulţime $\mathbb{M}$ a lui $\mathbb{R}^3$ este o suprafaţă, definiţia 1.2 cere hărţi proprii. Dar deîndată ce ştim că $\mathbb{M}$ este o suprafaţă această condiţie este de la sine îndeplinită. Într-adevăr, dacă $\mathbb{M}$ este o suprafaţă şi dacă $r : \mathbb{D} \to \mathbb{M}$ este o hartă în $\mathbb{M}$, atunci se demonstrează că r este o hartă proprie (vezi §5). În probleme de natură locală, restricţia ca r să fie injectivă poate fi lăsată deoparte. De aceea admitem

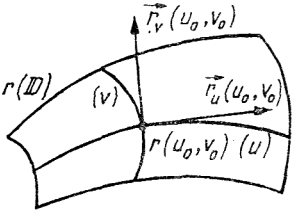


Fig. 98

2.1. *Definiţie. O funcţie diferenţiabilă şi regulată* $r : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^3$ *a cărei imagine se află într-o suprafaţă* $\mathbb{M}$ *se numeşte parametrizare a regiuni* $r(\mathbb{D})$ *din* $\mathbb{M}$ (astfel o hartă este o parametrizare injectivă).

În acest context u şi v se numesc *parametri*, relaţiile $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ se numesc *ecuaţiile parametrice* ale lui $r(\mathbb{D}) \subset \mathbb{M}$, iar $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ se numeşte *ecuaţia vectorială* a lui $r(\mathbb{D}) \subset \mathbb{M}$. În unele cazuri $r(\mathbb{D})$ poate fi întreaga suprafaţă $\mathbb{M}$.

Deoarece parametrizările au o mare importanţă în aplicaţii, vom pune în evidenţă un mod prin care putem stabili dacă o aplicaţie diferenţiabilă $r : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^3$ este o parametrizare. În primul rînd imaginea lui $\mathbb{D}$ prin r trebuie să fie în $\mathbb{M}$. Dacă suprafaţa $\mathbb{M}$ este dată implicit prin $f(x, y, z) = c$, atunci funcţia compusă $f(r)$ trebuie să aibă valoarea constantă „c".

Pentru a proba dacă r este regulată, considerăm vitezele parţiale $\vec{r}_u$ şi $\vec{r}_v$ şi produsul vectorial

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}.$$

Se observă că ultimele două linii dau transpusa matricei Jacobian a lui r. Astfel regularitatea lui r este echivalentă cu $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$, $\forall (u, v) \in \mathbb{D}$, adică cu faptul că vectorii viteze parţiale sînt liniar independenţi $\forall (u, v) \in \mathbb{D}$.

§3. Suprafeţe riglate

Există mai multe moduri de a genera o suprafaţă. În acest paragraf ne vom referi la unul dintre aceste moduri.

Mai întîi reamintim că o dreaptă D ce trece printr-un punct P_0 şi are direcţia $\vec{\beta}_0$ poate fi reprezentată prin ecuaţia vectorială $\bar{r} = \bar{\alpha}_0 + v\bar{\beta}_0$, $v \in \mathbb{R}$ (fig. 99).

3.1. *Definiţie. O suprafaţă care poate fi generata prin mişcarea unei drepte D care se sprijină pe o curbă $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ se numeşte suprafaţă riglată.*

Dreapta D se numeşte *generatoarea* suprafeţei riglate (fig. 100).

Avînd în vedere ecuaţia vectorială a unei drepte, rezultă că o suprafaţă riglată poate fi parametrizată întotdeauna sub forma

$$\bar{r}(u, v) = \bar{\alpha}(u) + v\bar{\beta}(u), \quad (u, v) \in \mathbb{D} = I \times \mathbb{R},$$

cu precizarea că punctele în care $\bar{r}_u \times \bar{r}_v = \bar{0}$ nu sînt incluse în mulţimea pe care o numim suprafaţă.

În cazurile concrete v se poate restrînge la un anumit interval şi de aceea în aceste cazuri generatoarele sînt segmente de dreaptă. De asemenea uneori se convine ca $\vec{\beta}$ să fie privit ca un cîmp vectorial definit pe curba α.

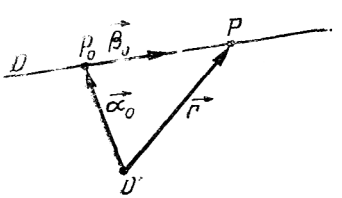


Fig. 99

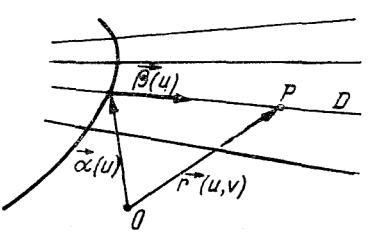


Fig. 100

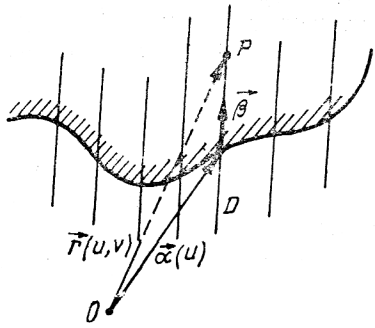


Fig. 101

1). *Suprafețe cilindrice.* Dacă generatoarea D se mișcă păstrînd aceeași direcție, atunci suprafața riglată se numește *suprafață cilindrică.* Curba α pe care se sprijină D se numește *curbă directoare* (fig. 101).

O suprafață cilindrică admite o parametrizare de forma

$$\bar{r}(u, v) = \bar{\alpha}(u) + v\bar{\beta},$$

unde $\vec{\beta}$ este un vector cu coordonate constante.

În continuare, prin $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ vom înțelege polinoame de gradul unu în trei variabile.

3.2. Teoremă. O suprafață cilindrică cu generatoarea paralelă cu dreapta $D: P(x, y, z) = 0$, $Q(x, y, z) = 0$ este caracterizată printr-o ecuație de forma $f(P, Q) = 0$.

Demonstrație. Mulțimea dreptelor paralele cu dreapta D este reprezentată analitic prin

$$(1) \qquad \begin{cases} P = u \\ Q = w \end{cases}, \qquad (u, w) \in \mathbb{R}^2.$$

Condiția ca dreptele (1) să se sprijine pe curba

$$(2) \qquad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in I,$$

se obține eliminînd pe x, y, z, t între cele cinci ecuații (1) și (2). Se deduce $f(u, w) = 0$ și deci

$$(3) \qquad f(P, Q) = 0.$$

Reciproc, fie $\mathbb{M}$ submulțimea punctelor din spațiu caracterizate printr-o ecuație de tipul (3). Dacă planele $P = 0$ și $Q = 0$ determină o dreaptă și dacă $\mathbb{M}$ nu conține puncte critice ale lui f, atunci $\mathbb{M}$ este o suprafață cilindrică. Într-adevăr, pentru orice soluție reală (x, y, z) a lui (3) există două numere reale u și w așa ca $P(x, y, z) = u$, $Q(x, y, z) = w$. Această intersecție reprezintă o dreaptă paralelă cu $D: P = 0$, $Q = 0$, iar u și w verifică condiția $f(u, w) = 0$. Deoarece w este funcție de u (teorema funcțiilor implicite!), rezultă că $\mathbb{M}$ admite parametrizarea

$$\bar{r}(u, v) = \bar{\alpha}(u) + v\bar{\beta}, \text{ unde } \vec{\beta} \text{ dă direcția lui } D.$$

3.3. Observație. Suprafețele cilindrice cu generatoarele paralele cu axele Oz, Ox, Oy, se pot caracteriza, respectiv, astfel

$$\mathbb{M}: f(x, y) = 0, \quad \mathbb{M}: f(y, z) = 0, \quad \mathbb{M}: f(z, x) = 0.$$

2) *Suprafețe conice.* Dacă generatoarea D se mișcă trecînd printr-un punct fix V, atunci suprafața riglată se numește *suprafață conică.* Curba

pe care se sprijină D se numește *curbă directoare*, iar punctul V se numește *vîrf* (fig. 102).

O suprafață conică admite o parametrizare de forma

$$\bar{r}(u, v) = \bar{\alpha} + v\bar{\beta}(u),$$

unde $\vec{\alpha}$ este un vector cu coordonatele constante a cărui extremitate este vîrful V (vîrful nu aparține mulțimii pe care o numim suprafață conică).

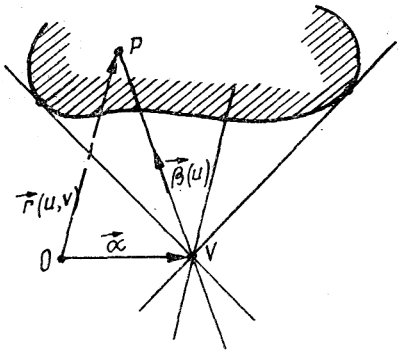


Fig. 102

3.4. Teoremă. Fie $\mathfrak{M}$ o suprafață conică cu vîrful

$$V : P(x, y, z) = 0,\ Q(x, y, z) = 0,\ R(x, y, z) = 0.$$

Mulțimea $\mathfrak{M} - \{(x, y, z) \mid R(x, y, z) = 0\}$, este caracterizată analitic printr-o ecuație de forma:

$$f\left(\frac{P}{R}, \frac{Q}{R}\right) = 0.$$

Demonstrație. Mulțimea dreptelor ce trec prin punctul fix V și care nu aparțin planului $R(x, y, z) = 0$ este reprezentată prin

$$P - uR = 0,\ Q - wR = 0,\ (u, w) \in \mathbb{R}^2. \tag{4}$$

Condiția ca aceste drepte să se sprijine pe o curbă de ecuații (2) se obține eliminînd pe x, y, z, t între cele cinci ecuații (2) și (4). Se deduce $f(u, w) = 0$ și deci

$$f\left(\frac{P}{R}, \frac{Q}{R}\right) = 0. \tag{5}$$

Reciproc, fie $\mathfrak{M}$ mulțimea punctelor din spațiu caracterizate printr-o ecuație de tipul (5). Dacă planele $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ determină un punct și dacă $\mathfrak{M}$ nu conține puncte critice ale lui f, atunci $\mathfrak{M}$ este o suprafață conică. Într-adevăr, pentru orice soluție reală (x, y, z) a lui (5) există două numere reale u și w așa ca $P(x, y, z) - uR(x, y, z) = 0$, $Q(x, y, z) - wR(x, y, z) = 0$, iar u și w sînt legați prin relația $f(u, w) = 0$. Deoarece w se exprimă local prin u, rezultă că suprafața admite parametrizarea

$$\bar{r}(u, v) = \bar{\alpha} + v\bar{\beta}(u),$$

unde $\vec{\alpha}$ dă vîrful.

3.5. Observație. Din ecuația (5) se poate deduce o ecuație omogenă în trei variabile $g(P, Q, R) = 0$ și reciproc. De aceea, în general, o ecuație omogenă de tipul $g(P, Q, R) = 0$, unde $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ determină un punct, reprezintă o suprafață conică.

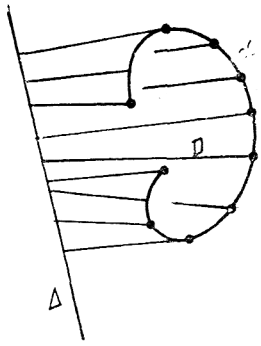


Fig. 103

3) *Suprafeţe conoide.* O suprafaţă riglată generată de o dreaptă D care se sprijină pe o dreaptă fixă Δ (*axă*) şi pe o curbă α (*curbă directoare*), se numeşte *conoid* (fig. 103).

Dacă Δ este luată drept axă Oz, atunci conoidul admite parametrizarea

$$\bar{r}(u, v) = (u \cos \theta(v),\ u \sin \theta(v),\ h(v)).$$

Un conoid a cărui generatoare rămîne paralelă cu un plan fix P se numeşte *conoid cu plan director*. Acest conoid admite o parametrizare de forma

$$\bar{r}(u, v) = \bar{\alpha}(u) + v\bar{\beta}(u),$$

unde $\bar{\beta} \| P$ şi $(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) \| \Delta$.

3.6. Teoremă. Fie $\mathbb{M}$ conoidul cu planul director $P = 0$ şi cu axa $\Delta : Q = 0,\ R = 0$. Mulţimea $\mathbb{M} - \{(x, y, z) | P(x, y, z) = u,\ R(x, y, z) = 0\}$ este caracterizată analitic printr-o ecuaţie de forma

$$f\left(P, \frac{Q}{R}\right) = 0.$$

Demonstraţie. Abstracţie făcînd de dreptele $D : P = u,\ R = 0$, mulţimea dreptelor paralele cu P şi care întîlnesc pe Δ este reprezentată analitic prin

$$\begin{cases} P = u \\ Q - wR = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Condiţia ca aceste drepte să se sprijine pe o curbă α de ecuaţii (2) se obţine eliminînd pe x, y, z, t între cele cinci ecuaţii (2) şi (6). Se deduce $f(u, w) = 0$ şi deci

$$f\left(P, \frac{Q}{R}\right) = 0. \tag{7}$$

Reciproc, fie $\mathbb{N}$ submulţimea punctelor din spaţiu caracterizate printr-o ecuaţie de tipul (7). Dacă $P = 0$ este ecuaţia unui plan care taie dreapta $\Delta : Q = 0,\ R = 0$ şi dacă $\mathbb{N}$ nu conţine puncte critice ale lui f, atunci $\mathbb{N}$ este un conoid. Într-adevăr, pentru orice soluţie reală (x, y, z) a lui (7) există două numere reale u, w aşa ca $P = u,\ Q - wR = 0$ cu $f(u, w) = 0$.

§4. Suprafeţe de rotaţie

4.1. *Definiţie. O suprafaţă care poate fi generată prin rotaţia unei curbe C în jurul unei drepte fixe D, numită axă de rotaţie, se numeşte suprafaţă de rotaţie.*

Fie $P(x, y, z) = 0$ planul perpendicular pe axa D şi $\Sigma(x, y, z) = 0$ o sferă cu centrul pe D. Avem

4.2. Teoremă. O suprafaţă de rotaţie cu axa D este caracterizată printr-o ecuaţie carteziană implicită de forma $f(P, \Sigma) = 0$.

Demonstrație. Orice punct de pe curba C se va deplasa într-un plan perpendicular pe axă, $P = u$ și va descrie un cerc cu centrul pe axa de rotație (fig. 104). De aceea suprafața de rotație poate fi privită ca fiind locul geometric al cercurilor cu centrele pe D, care trec prin C și ale căror plane sînt perpendiculare pe D. Astfel sistemul

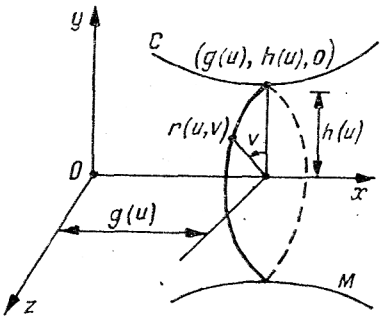


Fig. 104

$$\begin{cases} \Sigma(x, y, z) = w, & w > 0, \\ P(x, y, z) = u \\ x = x(t), \ y = y(t), \ z = z(t) \end{cases}$$

trebuie să fie compatibil. Eliminînd pe x, y, z, t rezultă $f(u, w) = 0$ și deci $\mathbb{M} : f(P, \Sigma) = 0$.

Reciproca este evidentă.

Cazul cel mai des întîlnit este acela în care C este o curbă situată în același plan cu axa D, fără ca C și D să se intersecteze. În acest caz cercurile din $\mathbb{M}$ generate prin rotația fiecărui punct al lui C se numesc *paralele*, iar diversele poziții ale lui C se numesc *meridiane*. Pentru simplificare să presupunem că C este în planul xOy, iar D este Ox (fig. 104).

1) Dacă $C : f(x, y) = 0$, $z = 0$, $y > 0$, atunci $\mathbb{M} : f(x, y^2 + z^2) = 0$.

2) Dacă C este dată prin parametrizarea $\alpha(u) = (g(u), h(u), 0)$, $h(u) > 0$, $u \in I$, atunci $\mathbb{M}$ admite parametrizarea $r(u, v) = (g(u), h(u)\cos v, h(u)\sin v)$, $u \in I$, $v \in \mathbb{R}$.

§5. Calcul diferențial pe suprafețe

Ne propunem să arătăm că pe orice suprafață $\mathbb{M}$ se poate face un calcul diferențial asemănător calculului diferențial obișnuit din $\mathbb{R}^2$. Elementele acestui calcul: funcții, cîmpuri vectoriale tangente etc., aparțin suprafeței și nu spațiului euclidian $\mathbb{R}^3$ în care este scufundată suprafața.

Presupunem că f este o funcție reală definită numai pe suprafața $\mathbb{M}$, adică $f : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$. Dacă $r : \mathbb{D} \to \mathbb{M}$ este o hartă, atunci $f \circ r : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ se numește *expresia lui f în coordonate*. Dacă $f \circ r$ este diferențiabilă în sens obișnuit, oricare ar fi r, atunci f se numește *diferențiabilă*.

Fie acum funcția $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{M}$. Orice hartă r în $\mathbb{M}$ dă o expresie în coordonate $r^{-1} \circ F$ pentru F. Evident această funcție compusă este definită numai pe mulțimea (deschisă) $U \subset \mathbb{R}^n$ pentru care $F(U) \subset r(\mathbb{D})$. Dacă $r^{-1} \circ F$ este diferențiabilă în sens obișnuit, oricare ar fi r, atunci funcția F se numește *diferențiabilă*.

Fie $\mathbb{M}$ și $\mathbb{N}$ două suprafețe, r_1 o hartă în $\mathbb{M}$ și r_2 o hartă în $\mathbb{N}$. O funcție $F : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$ se numește *diferențiabilă* dacă funcția compusă $r_2^{-1} \circ F \circ r_1$ este diferențiabilă în sens obișnuit, oricare ar fi r_1 și r_2.

În particular, o funcție diferențiabilă de tipul $\alpha : I \to \mathbb{M}$, unde I este un interval deschis al dreptei reale, se numește *curbă* în $\mathbb{M}$.

5.1. Teoremă. Fie curba $\alpha : I \to \mathbb{M}$ și harta $r : \mathbb{D} \to \mathbb{M}$. Dacă $\alpha(I) \subset r(\mathbb{D})$, atunci există o pereche de funcții diferențiabile u, v definite pe I astfel încît:

$$\alpha(t) = r(u(t), v(t)), \ t \in I \text{ sau } \alpha = r(u, v).$$

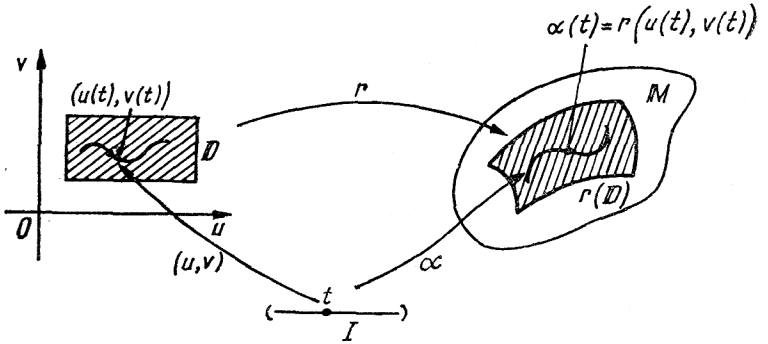


Fig. 105

Demonstrație. Prin ipoteză, expresia în coordonate $r^{-1}\circ\alpha : I \to \mathbb{D}$ este diferențiabilă. Ea este o curbă plană a cărei imagine se află în domeniul $\mathbb{D}$, de definiție al lui r (fig. 105). Dacă (u, v) sînt coordonatele euclidiene ale lui $r^{-1}\circ\alpha$ adică $r^{-1}(\alpha(t)) = (u(t), v(t))$, atunci $\alpha = r\circ(r^{-1}\circ\alpha) = r(u, v)$. Funcțiile u și v sînt unic determinate. Într-adevăr, din presupunerea $\alpha = r(u_1, v_1)$, rezultă $(u, v) = r^{-1}\circ\alpha = r^{-1}(r(u_1, v_1)) = (u_1, v_1)$.

Funcțiile u, v sînt numite *coordonatele curbei* α în raport cu harta r.

Dăm fără demonstrație

5.2. Teoremă. Fie $\mathbb{M}$ o suprafață. Dacă $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^3$ este o funcție diferențiabilă a cărei imagine se află în $\mathbb{M}$, atunci funcția $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{M}$ este diferențiabilă în sensul dat în acest paragraf.

Această teoremă arată legătura strînsă între calculele din $\mathbb{R}^3$ și calculele de pe suprafața $\mathbb{M}$. De exemplu, ea implică faptul că o curbă din $\mathbb{R}^3$ care se află în $\mathbb{M}$, este o curbă a lui $\mathbb{M}$.

Fie $\mathbb{M}$ o suprafață și r o hartă în $\mathbb{M}$. Deoarece harta r este o funcție diferențiabilă definită pe $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ și cu valori în $\mathbb{R}^3$, rezultă că r este diferențiabilă și ca funcție în $\mathbb{M}$.

5.3. Consecință. Dacă r_1 și r_2 sînt hărți într-o suprafață $\mathbb{M}$ ale căror imagini se suprapun, atunci funcțiile compuse $r_1^{-1}\circ r_2$ și $r_2^{-1}\circ r_1$ sînt aplicații diferențiabile definite pe mulțimi deschise din plan (fig. 106).

De exemplu, funcția $r_2^{-1}\circ r_1$ este definită numai pentru acele puncte (u, v) din $\mathbb{D}_1$ pentru care $r_1(u, v)$ se află în imaginea $r_2(\mathbb{D}_2)$ a lui r_2 (fig. 106).

După un raționament analog celui folosit pentru demonstrația teoremei 5.1, consecința 5.3 poate fi retranscrisă astfel

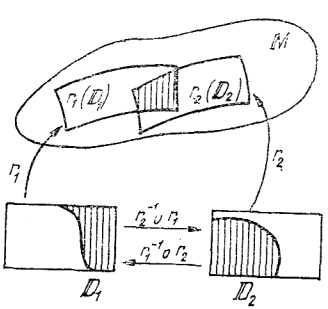


Fig. 106

5.4. Consecință. Dacă r_1 și r_2 sînt hărți ale căror imagini se suprapun în $\mathbb{M}$, atunci există o pereche unică de funcții diferențiabile f și g astfel încît $r_2(u, v) = r_1(f(u, v), g(u, v))$, $\forall(u, v)$ din domeniul de definiție al lui $r_1^{-1}\circ r_2$. Analog se poate exprima r_1 în funcție de r_2.

Consecința 5.3 sugerează o metodă concretă de a stabili dacă o funcție este sau nu diferențiabilă pe $\mathbb{M}$. Dacă $f : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$, atunci în loc să verificăm că toate expresiile sale în coordonate $f\circ r$ sînt diferențiabile în sens euclidian, este suficient să facem aceasta pentru un anumit

număr de hărţi care să acopere pe $\mathbb{M}$. Adesea este suficientă o singură hartă. Demonstraţia este un exerciţiu din calculul cu funcţii compuse. Într-adevăr, fie r_2 o hartă arbitrară; din faptul că $f \circ r_1$ şi $r_1^{-1} \circ r_2$ sînt diferenţiabile rezultă că $f \circ r_1 \circ r_1^{-1} \circ r_2$ este diferenţiabilă. În general ultima funcţie este o restricţie a lui $f \circ r_2$. Dacă însă imaginea lui r_1 acoperă pe $\mathbb{M}$, atunci $f \circ r_1 \circ r_1^{-1} \circ r_2$ reprezintă pe $f \circ r_2$ şi astfel diferenţiabilitatea este demonstrată.

Din punct de vedere intuitiv este clar ce înseamnă un vector tangent la o suprafaţă $\mathbb{M}$. Definiţia formală se bazează pe ideea că o curbă din $\mathbb{M}$ trebuie să aibă toţi vectorii viteză tangenţi la $\mathbb{M}$.

5.5. *Definiţie. Fie $\mathbb{M}$ o suprafaţă şi P un punct oarecare din ea. Un vector $\vec{v}$ tangent la $\mathbb{R}^3$ în P se numeşte tangent la $\mathbb{M}$ în P dacă este vectorul viteză al unei curbe oarecare din $\mathbb{M}$ ce trece prin P.*

Mulţimea tuturor vectorilor tangenţi la $\mathbb{M}$ în P se numeşte *planul tangent* al lui $\mathbb{M}$ în P şi se notează cu $T_P\mathbb{M}$ (fig. 107). Imaginea concretă a lui $T_P\mathbb{M}$ în $\mathbb{R}^3$ poartă aceeaşi denumire.

Teorema următoare arată că $T_P\mathbb{M}$ este un subspaţiu vectorial bidimensional al spaţiului tangent $T_P\,\mathbb{R}^3$.

5.6. Teoremă. Fie P un punct al unei suprafeţe $\mathbb{M}$ şi r o hartă în $\mathbb{M}$ astfel încît $r(u_0, v_0) = P$. Un vector $\vec{w}$ tangent la $\mathbb{R}^3$ în P este tangent la $\mathbb{M}$ dacă şi numai dacă $\vec{w}$ poate fi scris ca o combinaţie liniară a lui $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ şi $\vec{r}_v(u_0, v_0)$.

Demonstraţie. Vitezele parţiale $\vec{r}_u$ şi $\vec{r}_v$ sînt tangente la $\mathbb{M}$ în orice punct al lui $r(\mathbb{D})$ deoarece curbele coordonate ale lui r sînt curbe în $\mathbb{M}$ (fig. 108).

Să presupunem că $\vec{w}$ este tangent la $\mathbb{M}$ în P, adică există o curbă α pe $\mathbb{M}$ pentru care $\alpha(0) = 0$ şi $\alpha'(0) = \vec{w}$. După teorema 5.1, curba α poate fi scrisă în forma $\alpha = r(u, v)$ sau $\vec{\alpha}(t) = \vec{r}(u(t), v(t))$. Regula de derivare a funcţiilor compuse dă

$$\vec{\alpha}' = \vec{r}_u(u, v)\frac{du}{dt} + \vec{r}_v(u, v)\frac{dv}{dt}\cdot$$

Deoarece $\alpha(0) = P = r(u_0, v_0)$, avem $u(0) = u_0$, $v(0) = v_0$ şi deci, pentru $t = 0$, găsim

$$\vec{w} = \vec{\alpha}'(0) = \frac{du}{dt}(0)\vec{r}_u(u_0, v_0) + \frac{dv}{dt}(0)\vec{r}_v(u_0, v_0).$$

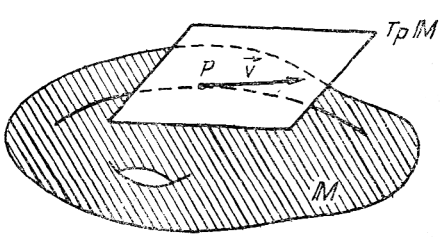


Fig. 107

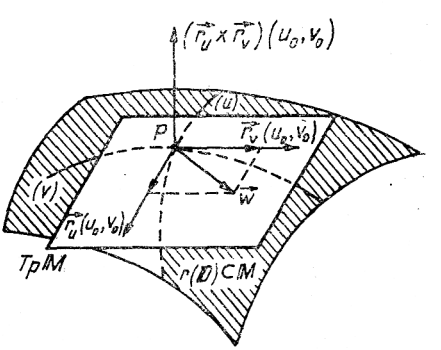


Fig. 108

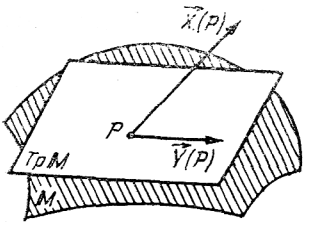


Fig. 109

Invers să presupunem că vectorul $\vec{w} \in T_P\mathbb{R}^3$ poate fi scris în forma $\vec{w} = c_1\vec{r}_u(u_0, v_0) + c_2\vec{r}_v(u_0, v_0)$. Calculul anterior arată că $\vec{w}$ este vectorul viteză al curbei $\alpha(t) = r(u_0 + tc_1, v_0 + tc_2)$ la momentul $t = 0$. Astfel $\vec{w}$ este tangent la $\mathbb{M}$ în P.

Deoarece vitezele parțiale sînt vectori liniar independenți, teorema anterioară arată că, $\forall P \in r(\mathbb{D}) \subset \mathbb{M}$, vitezele parțiale formează o bază a planului tangent $T_P\,\mathbb{M}$.

5.7. *Definiție. O funcție $\vec{X}$ care asociază fiecărui punct $P \in \mathbb{M}$ un vector $\vec{X}(P)$ tangent la $\mathbb{R}^3$ în P se numește cîmp vectorial euclidian pe suprafața $\mathbb{M}$.*

Fie $\vec{X} = f(x, y, z)\vec{i} + g(x, y, z)\vec{j} + h(x, y, z)\vec{k}$ un cîmp vectorial euclidian pe suprafața $\mathbb{M}$. Dacă funcțiile coordonate f, g, h sînt diferențiabile pe $\mathbb{M}$, atunci cîmpul $\vec{X}$ se numește *diferențiabil.*

Un cîmp vectorial euclidian $\vec{Y}$ pentru care, $\forall P \in \mathbb{M}$, $\vec{Y}(P)$ este tangent la $\mathbb{M}$ în P se numește cîmp vectorial *tangent la* $\mathbb{M}$ (fig. 109). Dacă $\vec{Y}$ este un cîmp vectorial tangent la $\mathbb{M}$, atunci oricare ar fi harta $r : \mathbb{D} \to \mathbb{M}$, avem

$$\vec{Y}(r(u, v)) = F(u, v)\vec{r}_u + G(u, v)\vec{r}_v.$$

De aceea $\vec{Y}$ este diferențiabil dacă și numai dacă funcțiile F și G sînt diferențiabile pe $\mathbb{D}$.

În continuare presupunem că lucrăm numai cu cîmpuri diferențiabile și precizăm că de cele mai multe ori cîmpurile pe $\mathbb{M}$ sînt definite local (numai în anumite regiuni ale lui $\mathbb{M}$).

5.8. *Observație.* Cîmpurile vectoriale tangente la $\mathbb{M}$ aparțin calculului din $\mathbb{M}$, deoarece conform definiției 5.5 ele dau în fiecare punct vitezele unor curbe din $\mathbb{M}$.

§ 6. Cîmpuri normale pe suprafețe

Fie $\mathbb{M}$ o suprafață și P un punct al său. Un vector $\vec{z}$ cu originea în P care este ortogonal planului tangent $T_P\mathbb{M}$, adică ortogonal oricărui vector tangent la $\mathbb{M}$ în P, se numește *vector normal* la $\mathbb{M}$. Un cîmp vectorial euclidian $\vec{Z}$ definit pe $\mathbb{M}$ se numește *cîmp normal* pe $\mathbb{M}$ dacă fiecare vector $\vec{Z}(P)$ este normal la $\mathbb{M}$.

Deoarece $T_P\mathbb{M}$ este un subspațiu bidimensional al lui $T_P\mathbb{R}^3$, există numai o *direcție normală* la $\mathbb{M}$ în P, adică toți vectorii $\vec{z}$ normali în P sînt coliniari. Astfel dacă $\vec{z}$ nu este zero, rezultă că $T_P\mathbb{M}$ constă numai din vectorii lui $T_P\mathbb{R}^3$ care sînt ortogonali lui $\vec{z}$. Dreapta ce trece prin P și este perpendiculară pe planul tangent $T_P\mathbb{M}$ se numește *normala* suprafeței în punctul P.

Fie $r(\mathbb{D})$ regiunea din $\mathbb{M}$ acoperită de harta $r : \mathbb{D} \to \mathbb{M}$. Funcția vectorială $\vec{Z}(u, v) = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$ atașează fiecărui punct din $\mathbb{D}$ un vector normal la $\mathbb{M}$ în $r(u, v)$ (fig. 108). De aceea $\vec{Z}(u, v)$ poate fi privit ca un cîmp normal definit local pe $\mathbb{M}$.

Dacă gîndim $T_P\mathbb{M}$ ca fiind determinat de punctul $P(x_0, y_0, z_0)$ şi de vectorul normal $\vec{Z}(u_0, v_0)$, atunci găsim pentru $T_P\mathbb{M}$ ecuaţia

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_{u_0} & y_{u_0} & z_{u_0} \\ x_{v_0} & y_{v_0} & z_{v_0} \end{vmatrix} = 0,$$

unde $x_0 = x(u_0, v_0)$, $x_{u_0} = x_u(u_0, v_0)$ etc. Normala la $\mathbb{M}$ în P are ecuaţiile

$$\frac{x - x_0}{\dfrac{D(y, z)}{D(u_0, v_0)}} = \frac{y - y_0}{\dfrac{D(z, x)}{D(u_0, v_0)}} = \frac{z - z_0}{\dfrac{D(x, y)}{D(u_0, v_0)}}.$$

Dacă suprafaţa $\mathbb{M}$ este dată prin ecuaţia carteziană implicită, atunci este uşor să punem în evidenţă cîmpul normal şi cîmpurile tangente.

6.1. Teoremă. Dacă $\mathbb{M} : f(x, y, z) = c$ este o suprafaţă, atunci gradientul $\nabla f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$, definit pe $\mathbb{M}$, este un cîmp vectorial normal care nu se anulează în nici un punct al lui $\mathbb{M}$ (fig. 110).

Demonstraţie. Gradientul nu se anulează pe $\mathbb{M}$ deoarece prin ipoteză derivatele parţiale f_x, f_y, f_z nu se pot anula simultan în nici un punct al lui $\mathbb{M}$(§ 1).

Să arătăm acum că $(\nabla f(P), \vec{v}) = 0$, $\forall \vec{v} \in T_P\mathbb{M}$. Pentru aceasta observăm că dacă α este o curbă pe $\mathbb{M}$, atunci $f(\alpha) = f(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0$. Deci

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha)\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}(\alpha)\frac{dz}{dt} = 0.$$

Alegînd pe α astfel încît să aibă viteza iniţială

$$\vec{\alpha}'(0) = \vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k},$$

în $\alpha(0) = P$, găsim

$$0 = f_x(\alpha(0))\frac{dx}{dt}(0) + f_y(\alpha(0))\frac{dy}{dt}(0) + f_z(\alpha(0))\frac{dz}{dt}(0) =$$

$$= f_x(P)v_1 + f_y(P)v_2 + f_z(P)v_3 = (\nabla f(P), \vec{v}).$$

Din punct de vedere analitic, ecuaţia planului tangent la $\mathbb{M}$ în $P(x_0, y_0, z_0)$ este

$$(x - x_0)f_{x_0} + (y - y_0)f_{y_0} + (z - z_0)f_{z_0} = 0,$$

iar ecuaţiile normalei sînt

$$\frac{x - x_0}{f_{x_0}} = \frac{y - y_0}{f_{y_0}} = \frac{z - z_0}{f_{z_0}}.$$

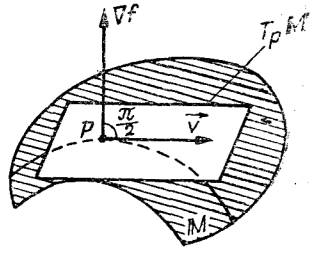


Fig. 110

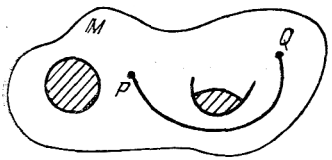


Fig. 111

În particular pentru reprezentarea carteziană explicită $z = f(x, y)$ avem :

planul tangent, $z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0)$,

normală, $\dfrac{x - x_0}{p_0} = \dfrac{y - y_0}{q_0} = \dfrac{z - z_0}{-1}$

6.2. Observații. 1) Planul tangent $T_P\mathbb{M}$ este aproximația liniară a suprafeței $\mathbb{M}$ în vecinătatea lui P.

2) Cîmpurile vectoriale normale aparțin calculului din $\mathbb{R}^3$. Ele sînt folosite în studiul lui $\mathbb{M}$ din punctul de vedere al unui observator din $\mathbb{R}^3$.

§7. Proprietăți topologice ale suprafețelor

Suprafețe conexe. Fie $\alpha : I \to \mathbb{M}$ o curbă de pe suprafața $\mathbb{M}$ și $[a, b] \subset I$. Restricția $\alpha : [a, b] \to \mathbb{M}$ se numește *segment de curbă* sau 1-*segment* pe suprafața $\mathbb{M}$.

7.1. *Definiție. O suprafață* $\mathbb{M}$ *se numește conexă dacă* $\forall P, Q \in \mathbb{M}$ *există un segment de curbă* $\alpha : [a, b] \to \mathbb{M}$, *cel puțin continuă, astfel încît* $\alpha(a) = P$ *și* $\alpha(b) = Q$, *adică imaginea* $\alpha([a, b]) \subset \mathbb{M}$ *unește punctele* P *și* Q (fig. 111).

O suprafață conexă $\mathbb{M}$ este toată dintr-o singură bucată. De exemplu, exceptînd hiperboloidul cu două pînze care nu este conex, toate cuadricele nedegenerate sînt conexe.

7.2. Teoremă. Fie $\mathbb{M}_1$ și $\mathbb{M}_2$ două suprafețe. Dacă $\mathbb{M}_1$ este conexă iar $F : \mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_2$ este o aplicație surjectivă și diferențiabilă, atunci $\mathbb{M}_2$ este conexă.

Demonstrație. Fie R, S două puncte arbitrare din $\mathbb{M}_2$. Deoarece F este surjectivă există $P, Q \in \mathbb{M}_1$ așa ca $F(P) = R$, $F(Q) = S$. Dar prin ipoteză $\mathbb{M}_1$ este conexă și deci există un segment de curbă α care unește pe P cu Q. Imaginea lui α prin funcția continuă F este un segment de curbă ce unește pe R cu S, adică $\mathbb{M}_2$ este conexă.

7.3. Consecință. Dacă $\mathbb{D}$ este o mulțime deschisă și conexă din plan, iar $r : \mathbb{D} \to \mathbb{M}$ este o parametrizare, atunci $r(\mathbb{D}) \subset \mathbb{M}$ este conexă.

7.4. Exemplu. Hiperboloidul cu o pînză este conex deoarece el este mulțimea valorilor funcției diferențiabile :

$$x = a \operatorname{ch} u \cos v,\ y = b \operatorname{ch} u \sin v,\ z = c \operatorname{sh} u$$

definită pe mulțimea conexă $\mathbb{R}^2$.

Analog putem stabili că fiecare dintre pînzele hiperboloidului cu două pînze este conexă. Deoarece aceste două pînze sînt mulțimi disjuncte, rezultă că hiperboloidul cu două pînze nu este conex.

7.5. Teoremă. Fie $\mathbb{M}$ o suprafață conexă și $f : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$ o aplicație diferențiabilă.

(1) Dacă $df = 0$, atunci $f = \text{const}$.

(2) Dacă f nu se anulează pe $\mathbb{M}$, atunci $f > 0$ sau $f < 0$ peste tot.

Demonstrație. Fie $P, Q \in \mathbb{M}$ două puncte arbitrare. Prin ipoteză acestea pot fi unite printr-un segment de curbă $\alpha : [a, b] \to \mathbb{M}$. Utilizînd funcția diferențiabilă $f \circ \alpha : [a, b] \to [f(\alpha(c)), f(\alpha(d))]$, $c, d \in [a, b]$, căreia îi aplicăm teorema creșterilor finite și proprietatea lui Darboux, deducem $f = \text{const.}$ și respectiv $f > 0$ sau $f < 0$ peste tot.

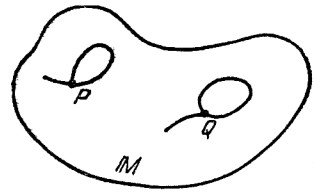


Fig. 112

7.6. Observație. O suprafață $\mathbb{M}$ poate fi privită ca un spațiu topologic și în acest context putem demonstra că $\mathbb{M}$ este conexă dacă și numai dacă (1) $\mathbb{M}$ nu este reuniunea a două mulțimi nevide, disjuncte și deschise sau dacă și numai dacă (2) singurele submulțimi închise și deschise ale lui $\mathbb{M}$ sînt $\emptyset \subset \mathbb{M}$ și $\mathbb{M}$.

Suprafețe simplu conexe. Suprafața $\mathbb{M}$ se numește *simplu conexă* dacă orice curbă închisă de pe $\mathbb{M}$ poate fi deformată prin continuitate (fără a părăsi punctele suprafeței) astfel încît să se reducă la un punct (fig. 112). De exemplu, sfera este (conexă și) simplu conexă; cilindrul circular drept (este conex dar) nu este simplu conex, deoarece cercurile situate în plane perpendiculare pe axa cilindrului nu se pot reduce la un punct fără a ieși din cilindru; hiperboloidul cu două pînze (nu este conex dar) este simplu conex etc.

Suprafețe compacte. Fie $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ și *intervalul bidimensional* închis (dreptunghi închis) $\mathbb{D}_0 : a \leqslant u \leqslant b,\ c \leqslant v \leqslant d$.

Fie $\mathbb{M}$ o suprafață. O funcție diferențiabilă de tipul $r : \mathbb{D}_0 \to \mathbb{M}$ se numește 2-segment în $\mathbb{M}$, figura 113. (Atributul diferențiabilă este folosit în sensul că r se poate extinde diferențiabil la un interval bidimensional deschis ce conține pe $\mathbb{D}_0$.)

7.7. *Definiție. Suprafața $\mathbb{M}$ se numește compactă dacă poate fi acoperită prin imaginile unui număr finit de 2-segmente.*

De exemplu sfera este o suprafață compactă deoarece este acoperită de imaginea 2-segmentului $r(u, v) = (x_0 + a \cos u \sin v,\ y_0 + a \sin u \sin v,\ z_0 + a \cos v)$, $(u, v) \in \mathbb{D}_0 = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$. De asemenea torul de rotație este o suprafață compactă.

Se știe că orice funcție (reală) continuă definită pe un dreptunghi închis $\mathbb{D}_0$ își atinge maximul (minimul) într-un punct din $\mathbb{D}_0$. Acest rezultat îl folosim pentru a demonstra teorema următoare.

7.8. Teoremă. Dacă f este o funcție continuă definită pe o suprafață compactă $\mathbb{M}$, atunci f își atinge maximul (minimul) într-un punct din $\mathbb{M}$.

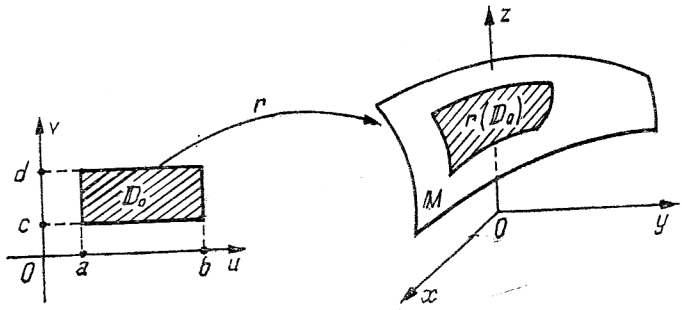


Fig. 113

Demonstrație. Fie $r_i : \mathbb{D}_{0i} \to \mathbb{M}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, 2-segmentele ale căror imagini acoperă pe $\mathbb{M}$. Deoarece aplicațiile r_i sînt diferențiabile, iar f este continuă rezultă că $f \circ r_i : \mathbb{D}_{0i} \to \mathbb{R}$ sînt funcții continue. De aceea, pentru fiecare i, există punctul $(u_i, v_i) \in \mathbb{D}_{0i}$ în care $f \circ r_i$ ia valoarea maximă. Fie $f(r_1(u_1, v_1))$ cel mai mare dintre numerele $f(r_i(u_i, v_i))$. Să arătăm că $P = r_1(u_1, v_1)$ este punctul în care f are valoarea maximă. Într-adevăr, deoarece r_i sînt în număr finit, $\forall Q \in \mathbb{M}$, există un indice i așa ca $Q = r_i(u, v)$ și avem :

$$f(P) = f(r_1(u_1, v_1)) \geqslant f(r_i(u_i, v_i)) \geqslant f(r_i(u, v)) = f(Q),$$

ceea ce trebuie demonstrat.

Teorema anterioară poate fi folosită pentru a proba că o suprafață nu este compactă. De exemplu, cilindrul $\mathbb{M}$ cu generatoarele paralele cu Oz nu este o suprafață compactă deoarece funcția coordonată z dă cota $z(P)$, $\forall P \in \mathbb{M}$, și astfel ea nu are o valoare maximă pe $\mathbb{M}$.

O submulțime $\mathbb{M}$ din $\mathbb{R}^3$ se numește *închisă* în $\mathbb{R}^3$ dacă complementara sa $\mathbb{R}^3 - \mathbb{M}$ este deschisă în $\mathbb{R}^3$.

O submulțime $\mathbb{M}$ din $\mathbb{R}^3$ se numește *mărginită* dacă distanța euclidiană dintre două puncte oarecare ale sale este mai mică decît un număr real dat. Cu alte cuvinte $\mathbb{M}$ este mărginită dacă poate fi inclusă într-o sferă de rază finită.

7.9. Teorema Heine-Borel. O submulțime din $\mathbb{R}^3$ este compactă dacă și numai dacă ea este închisă și mărginită.

O suprafață de tipul $\mathbb{M} : f(x, y, z) = c$ este închisă deoarece ea constă din punctele $f^{-1}(\{c\})$, $\{c\}$ este o submulțime închisă din $\mathbb{R}$, iar f este o funcție continuă. Astfel o suprafață $\mathbb{M} : f(x, y, z) = c$ este compactă dacă și numai dacă ea este mărginită în $\mathbb{R}^3$. De exemplu elipsoidul este compact, dar hiperboloizii nu sînt compacți.

7.10. Teoremă. Dacă $f(x, y, z)$ este un polinom omogen de gradul $n \geqslant 1$ care are cel puțin o valoare pozitivă, atunci $\mathbb{M} : f(x, y, z) = 1$ este o suprafață. Dacă $f(P) > 0$ exceptînd $P(0, 0, 0)$, atunci $\mathbb{M}$ este compactă și feciproc.

Demonstrație. Prin ipoteză există un punct $P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ așa ca $f(x, y, z) = a > 0$. Astfel $\mathbb{M}$ conține punctul $\frac{1}{\sqrt[n]{a}}(x, y, z)$ și deci nu este vidă. Din formula lui Euler pentru funcțiile omogene rezultă că orice punct Q care satisface $f_x(Q) = 0$, $f_y(Q) = 0$, $f_z(Q) = 0$ satisface și $f(Q) = 0$. De aceea $Q \notin \mathbb{M}$ și astfel $\mathbb{M}$ este o suprafață.

Să presupunem $f > 0$ exceptînd originea. Fie sfera S și $i : S \to \mathbb{R}^3$ injecția naturală. Funcția compusă $f \circ i : S \to \mathbb{R}$ este continuă. Deoarece S este compactă funcția $f \circ i$ are o valoare minimă b și $b > 0$. Dacă $Q \in \mathbb{R}^3$, avem

$$f(Q) = \|Q\|^n f\left(\frac{Q}{\|Q\|}\right) \geqslant \|Q\|^n b.$$

De aceea pentru $f(Q) = 1$ găsim $\|Q\| \leqslant \frac{1}{\sqrt[n]{b}}$. Rezultă că $\mathbb{M} = f^{-1}(1)$ este conținută în sfera închisă cu centrul în O și de rază $\frac{1}{\sqrt[n]{b}}$. Astfel $\mathbb{M}$ este mărginită și deci $\mathbb{M}$ este compactă.

Reciproc, presupunem că $\mathbb{M}$ este o suprafață compactă. Rezultă că $\mathbb{M}$ este mărginită și deci $f(Q) \geqslant \|Q\|^n b$. De aceea $f > 0$, exceptînd originea.

SUPRAFEȚE ORIENTABILE

7.11. *Definiție. O suprafață* $\mathbb{M}$ *se numește orientabilă dacă posedă un cîmp vectorial normal* $\vec{Z}$ *care să nu se anuleze în nici un punct al lui* $\mathbb{M}$.

Din § 6 rezultă că:

— orice suprafață simplă este orientabilă,

— orice suprafață $\mathbb{M} : f(x, y, z) = c$ (care nu posedă puncte critice ale lui f) este orientabilă. De exemplu planul, sfera, cuadricele nedegenerate etc. sînt suprafețe orientabile. În particular orice suprafață dată cartezian explicit este orientabilă.

Dăm fără demonstrație următoarea teoremă.

7.12. Teoremă. Orice suprafață simplu conexă și conexă este orientabilă.

Pe de altă parte avem

7.13. Teoremă. Orice suprafață conexă și compactă $\mathbb{M}$ este orientabilă.

Demonstrație. Dacă $\mathbb{M}$ este o suprafață conexă și compactă, atunci $\mathbb{R}^3$ se descompune în două părți conexe, una mărginită $\mathbb{M}$ și alta nemărginită $\mathbb{R}^3 - \mathbb{M}$. Suprafața $\mathbb{M}$ admite două cîmpuri vectoriale normale unitare opuse dintre care unul indică regiunea nemărginită. De aceea $\mathbb{M}$ este orientabilă.

7.14. Teoremă. Dacă $\mathbb{M}_2$ este o suprafață orientabilă, iar $F : \mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_2$ este o aplicație regulată, atunci suprafața $\mathbb{M}_1$ este orientabilă.

Demonstrație. Presupunem că $\mathbb{M}_2$ admite cîmpul normal nenul $\vec{Y}$ și construim funcția reală

$$\mu(\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{Y}(Q), \vec{v} \times \vec{w}), \quad \vec{v}, \vec{w} \in T_Q\mathbb{M}_2, \quad Q = F(P), \quad P \in \mathbb{M}_1.$$

Fie F_* matricea Jacobian a reprezentării în coordonate a lui F. Dacă $\vec{a}, \vec{b}$ sînt doi vectori independenți din $T_P\mathbb{M}_1$, atunci $F_*\vec{a}, F_*\vec{b}$ sînt doi vectori independenți din $T_Q\mathbb{M}_2$, deoarece F este regulată. Definim

$$(F^* \mu)(\vec{a}, \vec{b}) = \mu(F_*\vec{a}, F_*\vec{b}).$$

Deoarece F este regulată rezultă $F^* \mu \neq 0$. Construim

$$\vec{Z}(P) = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{(F^*\mu)(\vec{a}, \vec{b})}.$$

Această expresie este independentă de alegerea lui $\vec{a}$ și $\vec{b}$ și dă în fiecare punct un vector normal nenul. De aceea $P \to \vec{Z}(P)$, este un cîmp normal nenul pe $\mathbb{M}_1$, adică $\mathbb{M}_1$ este orientabilă.

Un cîmp vectorial normal unitar pe o suprafață orientabilă $\mathbb{M}$ se numește *orientare* pe $\mathbb{M}$.

7.15. Teoremă. Orice suprafață conexă și orientabilă admite exact două orientări.

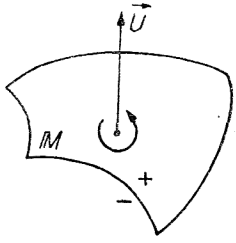


Fig. 114

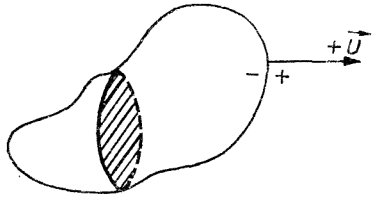


Fig. 115

Demonstrație. Fie $\vec{Z}$ un cîmp normal global definit pe $\mathbb{M}$. Cu ajutorul lui putem construi pe $\pm\vec{U} = \pm\dfrac{\vec{Z}}{\|\vec{Z}\|}$ care sînt cîmpuri normale unitare. Să arătăm acum că orice alt cîmp normal unitar trebuie să fie $+\vec{U}$ sau $-\vec{U}$. Fie $\vec{V}$ un cîmp normal unitar arbitrar definit pe $\mathbb{M}$. Evident avem $\vec{V} = (\vec{V}, \vec{U})\vec{U}$, unde $f = (\vec{V}, \vec{U})$ are în fiecare punct valorile -1 sau $+1$. După teorema 7.6, f are peste tot fie valoarea -1 fie valoarea $+1$, c.c.t.d.

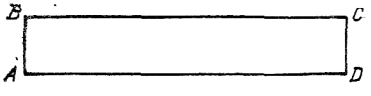
Intuitiv, teorema 7.15 arată că, suprafețele conexe și orientabile au două fețe. O suprafață orientabilă împreună cu o alegere a unei orientări (alegerea unei fețe) se numește suprafață *orientată*. Convențional fața care corespunde alegerii sensului dat de $+\vec{U}$ se notează cu $+$ (*fața pozitivă*), iar fața opusă se notează cu $-$ (*fața negativă*); fig. 114; orientare în concordanță cu regula burghiului drept.

Pentru suprafețele orientabile ce mărginesc un volum finit sensul pozitiv pe normală se ia prin convenție din interior către exterior (fig. 115).

Dacă $\mathbb{M}$ nu este conexă, dar se compune din porțiuni conexe și orientabile (de exemplu hiperboloidul cu două pînze), atunci orientarea componentelor determină o orientare a lui $\mathbb{M}$.

Să ne referim acum la suprafețele neorientabile, adică la suprafețele care au o singură față. Cel mai simplu exemplu este banda lui Möbius. Un model al ei se poate obține dacă răsucind o dată bucățica dreptunghiulară de hîrtie $ABCD$, se lipesc capetele ei în așa fel încît punctul A să coincidă cu C, iar B cu D.

Banda lui Möbius (fig. 116) nu este global orientabilă deoarece orice cîmp normal $\vec{Z}$ definit pe $\mathbb{M}$ trebuie să se anuleze într-un punct al lui $\mathbb{M}$ și să-și schimbe sensul la trecerea prin acest punct. Pentru a vedea acest lucru fie $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{M}$ o curbă închisă pe $\mathbb{M}$ cu $\alpha(0) = \alpha(1)$ ca în fig. 116. Dacă presupunem că $\vec{Z}$ nu se anulează în nici un punct, atunci răsucirea în $\mathbb{M}$ dă contradicția $\vec{Z}(\alpha(0)) = -\vec{Z}(\alpha(1))$, deoarece funcția $\vec{Z}(\alpha(t))$ este prin ipoteză diferențiabilă.



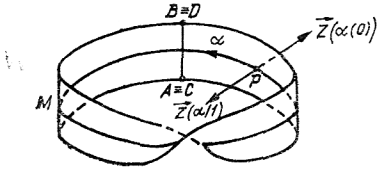


Fig. 116

7.16. Teoremă. Orice punct P al unei suprafețe neorientabile $\mathbb{M}$ este cuprins într-o regiune conexă și orientabilă.

Demonstrație. Fie $\mathbb{D}$ o mulțime deschisă și conexă din plan și $r : \mathbb{D} \to \mathbb{M}$ o hartă în $\mathbb{M}$. După teorema 7.3, $r(\mathbb{D})$ este conexă. Mai

mult, imaginea $r(\mathbb{D})$ este orientabilă deoarece $\vec{Z} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$ este un cîmp normal nenul.

Teorema anterioară arată că pe suprafeţele neorientabile există numai cîmpuri normale local nenule. În sprijinul acestei afirmaţii vom da un exemplu folosind un alt model al benzii Möbius. Fie $\alpha(u) = (\cos u, \sin u, 0)$ un cerc de rază unu situat în planul xOy şi $[PQ]$ un segment de lungime unu aşezat radial cu mijlocul pe cercul α. Presupunem că mijlocul segmentului descrie cercul şi simultan segmentul se roteşte în jurul mijlocului său (momentan în planul normal al cercului), astfel încît în momentul cînd mijlocul segmentului încheie o rotaţie de 360°, segmentul încheie o rotaţie de 180°. Suprafaţa riglată care ia naştere este o bandă Möbius particulară de ecuaţie vectorială

$$\vec{r}(u, v) = \vec{\alpha}(u) + v\vec{\beta}(u), \quad v \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],$$

unde $\vec{\beta}(u) = \left(\cos\frac{u}{2}\right)\vec{\alpha} + \left(\sin\frac{u}{2}\right)\vec{k}$.

Deoarece $\vec{Z} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$ dă local un cîmp vectorial normal nenul, rezultă că banda Möbius este local orientabilă.

§8. Aplicaţia Weingarten

În acest paragraf şi în paragrafele următoare introducem elementele matematice ce caracterizează forma suprafeţei într-o vecinătate a unui punct al său. Toate aceste elemente au la bază o transformare liniară definită pe planul tangent şi cu valori în planul tangent numită *aplicaţia Weingarten*.

Fie $\mathbb{M}$ o suprafaţă, $\vec{X}$ un cîmp vectorial euclidian definit pe $\mathbb{M}$ şi $\vec{v}$ un vector tangent la $\mathbb{M}$ în punctul P. Vectorul $D_{\vec{v}}\vec{X}$ se numeşte *derivata covariantă a lui $\vec{X}$ pe suprafaţa $\mathbb{M}$*. Această derivată se poate calcula în două moduri:

(1) luăm o curbă α de pe suprafaţa $\mathbb{M}$ astfel încît $\alpha(0) = P$ şi $\vec{\alpha}'(0) = \vec{v}$. Explicităm compunerea $\vec{X} \circ \alpha$ şi

$$D_{\vec{v}}X = \frac{d}{dt}\vec{X}(\alpha(t))|_{t=0},$$

(2) exprimăm pe $\vec{X}$ în forma $\vec{X} = f\vec{i} + g\vec{j} + h\vec{k}$ şi atunci

$$D_{\vec{v}}\vec{X} = D_{\vec{v}}f\vec{i} + D_{\vec{v}}g\vec{j} + D_{\vec{v}}h\vec{k}.$$

Chiar dacă $\vec{X}$ este un cîmp tangent la $\mathbb{M}$, derivata covariantă $D_{\vec{v}}\vec{X}$ nu este în general tangentă la $\mathbb{M}$ (fig. 117).

Presupunem acum că $\mathbb{M}$ este o porţiune orientabilă dintr-o suprafaţă conexă şi că ea a fost orientată prin alegerea cîmpului normal unitar $\vec{U}$.

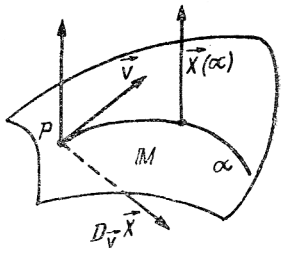


Fig. 117

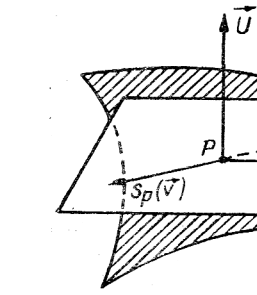


Fig. 118

8.1. *Definiţie. Fie P un punct din $\mathbb{M}$ şi $T_P\mathbb{M}$ spaţiul tangent la $\mathbb{M}$ în P. Funcţia definită prin*

$$S_P(\vec{v}) = -D_{\vec{v}}\vec{U}, \quad \vec{v} \in T_P\mathbb{M},$$

se numeşte aplicaţia lui Weingarten a lui $\mathbb{M}$ în punctul P.

Deoarece $T_P\mathbb{M}$ constă din vectorii ortogonali lui $\vec{U}(P)$, derivata $D_{\vec{v}}\vec{U}$ indică variaţia planelor tangente în sensul lui $\vec{v}$ şi aceasta dă o descriere infinitezimală a modului în care se curbează $\mathbb{M}$.

8.2. Teoremă. Aplicaţia Weingarten este o transformare liniară a spaţiului tangent în el însuşi (fig. 118).

Demonstraţie. Pentru a arăta că S_P are valorile în $T_P\mathbb{M}$ trebuie să demonstrăm că $S_P(\vec{v}) \perp \vec{U}(P)$. Pornim de la relaţia $1 = (\vec{U}, \vec{U})$ pe care o derivăm în raport cu $\vec{v}$. În baza proprietăţilor derivatei covariante avem

$$0 = \vec{v}(1) = \vec{v}((\vec{U}, \vec{U})) = 2(D_{\vec{v}}\vec{U}, \vec{U}) = -2(S_P(\vec{v}), \vec{U}(P)),$$

c.c.t.d.

Liniaritatea lui S_P este o consecinţă a liniarităţii derivatei covariante

$$S_P(a\vec{v} + b\vec{w}) = -D_{a\vec{v}+b\vec{w}}\vec{U} = -a\,D_{\vec{v}}\vec{U} - bD_{\vec{w}}\vec{U} =$$
$$= aS_P(\vec{v}) + bS_P(\vec{w}).$$

Funcţia $P \to S_P$ va fi numită *aplicaţia Weingarten* a suprafeţei $\mathbb{M}$ şi va fi notată cu S.

Să presupunem acum că $t \to \alpha(t)$ este o curbă din $\mathbb{M}$, iar $\vec{U}$ este restricţia cîmpului normal unitar la α. În acest caz observăm că

$$S(\vec{\alpha}') = -\vec{U}'.$$

8.3. Teoremă. Aplicaţia Weingarten este simetrică, adică

$$(S_P(\vec{v}), \vec{w}) = (\vec{v}, S_P(\vec{w})), \quad \forall \vec{v}, \vec{w} \in T_P\mathbb{M}.$$

O demonstraţie simplă a acestei teoreme este dată în § 12.

Teorema 8.3 este echivalentă cu faptul că matricea ataşată transformării liniare S_P în raport cu o bază ortonormată a lui $T_P\mathbb{M}$ este simetrică.

Elementele intrinseci ale transformării liniare simetrice S_P şi anume determinantul, urma, valorile proprii (care sînt reale deoarece S_P este simetrică) şi vectorii proprii au semnificaţii geometrice pe care le vom pune în evidenţă în paragrafele următoare. Pentru explicitarea acestor elemente este suficient să alegem o bază $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ în planul tangent, să explicităm matricea ataşată lui S_P în raport cu această bază,

$$\begin{aligned} S_P(\vec{v}) &= a\vec{v} + b\vec{w} \\ S_P(\vec{w}) &= c\vec{v} + d\vec{w} \end{aligned}, \quad \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

şi să determinăm determinantul, urma, valorile proprii şi vectorii proprii ai acestei matrice.

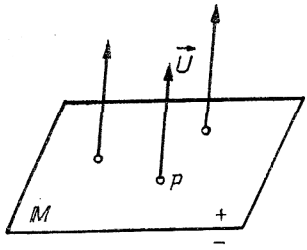


Fig. 119

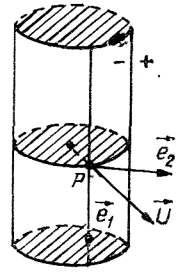


Fig. 120

8.4. Exemple

1) Fie $\mathbb{M}: ax + by + cz + d = 0$ un plan din $\mathbb{R}^3$. Evident aceasta este o suprafață conexă și orientabilă. Orientăm pe $\mathbb{M}$ alegînd

$$\vec{U} = \frac{a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Deoarece cîmpul $\vec{U}$ este paralel avem $S(\vec{v}) = -D_{\vec{v}}\vec{U} = 0$, $\forall \vec{v} \in T_P\mathbb{M} = \mathbb{M}$. Operatorul Weingarten este identic zero ceea ce corespunde faptului intuitiv că planele nu se îndoaie (fig. 119).

2) Fie $\mathbb{M}: x^2 + y^2 = r^2$ un cilindru circular drept din $\mathbb{R}^3$. Aceasta este o suprafață conexă și orientabilă. Orientăm pe $\mathbb{M}$ alegînd

$$\vec{U} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + O\vec{k}}{r}.$$

Fie P un punct din $\mathbb{M}$, $\vec{e}_1$ un versor tangent la generatoarea ce trece prin P și $\vec{e}_2$ un versor tangent la cercul de secțiune ce trece prin P.

Deoarece $\vec{e}_1 = (0, 0, -1)_P$, găsim $S_P(\vec{e}_1) = 0$, $\forall P$, adică de-a lungul generatoarei, $\vec{U}$ rămîne paralel cu el însuși. Analog $\vec{e}_2 = (-y, x, 0)_P$ și găsim

$$S_P(\vec{e}_2) = -\frac{D_{\vec{e}_2}x\vec{i} + D_{\vec{e}_2}y\vec{j}}{r} = -\frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{r} = -\frac{\vec{e}_2}{r}, \qquad \forall P \in \mathbb{M}.$$

Aceasta arată că de-a lungul cercului de secțiune cilindrul se curbează uniform (fig. 120).

3) Fie sfera $\mathbb{M}: x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Orientăm pe $\mathbb{M}$ alegînd

$$\vec{U} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{r}.$$

Găsim

$$S(\vec{v}) = -D_{\vec{v}}\vec{U} = -\frac{1}{r}(D_{\vec{v}}x\vec{i} + D_{\vec{v}}y\vec{j} + D_{\vec{v}}z\vec{k}) = -\frac{\vec{v}}{r}, \qquad \forall \vec{v};\ \forall P \in \mathbb{M}.$$

Astfel în acest caz aplicația Weingarten se reduce la multiplicarea cu $-\frac{1}{r}$. Această uniformitate a lui S reflectă rotunjimea sferelor, adică faptul că, $\forall P$, sfera se curbează în același mod în toate direcțiile (fig. 121).

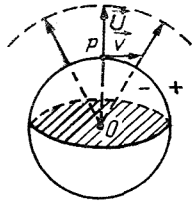


Fig. 121

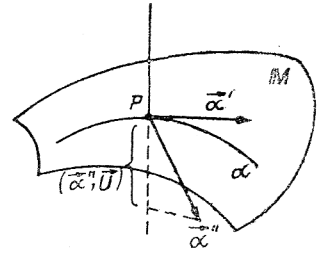


Fig. 122

§9. Curbura normală

Forma unei suprafeţe influenţează forma oricărei curbe de pe suprafaţa respectivă. Se pune problema ca folosind anumite curbe de pe o suprafaţă să caracterizăm forma suprafeţei.

Presupunem că lucrăm într-o regiune a unei suprafeţe conexe $\mathbb{M}$ orientată prin alegerea cîmpului normal unitar $\vec{U}$.

9.1. Lemă. Dacă α este o curbă din $\mathbb{M}$, iar $\vec{U}$ este restricţia cîmpului normal unitar la α, atunci

$$(S(\vec{\alpha}'), \vec{\alpha}') = (\vec{\alpha}'', \vec{U}).$$

Demonstraţie. Deoarece $\vec{\alpha}'$ este tangent la $\mathbb{M}$ avem $(\vec{\alpha}', \vec{U}) = 0$. Prin derivare găsim $(\vec{\alpha}'', \vec{U}) + (\vec{\alpha}', \vec{U}') = 0$. Ştim însă că $S(\vec{\alpha}') = -\vec{U}'$ şi astfel formula din lemă este adevărată.

Formula din lema precedentă arată că componenta normală a accelerației lui α, componentă care apare din cauza îndoirii suprafeţei, depinde numai de $\vec{\alpha}'$ şi $S(\vec{\alpha}')$. Cu alte cuvinte componenta normală a accelerației în punctul P este aceeaşi pentru toate curbele de pe suprafaţă ce trec prin P cu aceeaşi viteză $\vec{v}$ (fig. 122).

Această observaţie ne sugerează să caracterizăm încovoierea suprafeţei după o direcţie prin funcţia din definiţia următoare.

9.2. *Definiţie. Fie $\vec{e}$ un versor tangent la M în P. Numărul $k_n(\vec{e}) = (S(\vec{e}), \vec{e})$ se numeşte curbura normală a lui $\mathbb{M}$ în direcţia lui $\vec{e}$.*

Deoarece avem:

$$k_n(-\vec{e}) = (S(-\vec{e}), -\vec{e}) = (-S(\vec{e}), -\vec{e}) = (S(\vec{e}), \vec{e}) = k_n(\vec{e}),$$

numărul $k_n(\vec{e})$ este definit pe direcţia tangentă la $\mathbb{M}$ în P generată de versorul $\vec{e}$. Astfel, deşi evaluăm pe k_n pe versori, avem totuşi de-a face cu o funcţie reală pe mulţimea direcţiilor tangente la $\mathbb{M}$ în punctul P.

Fie $\vec{e}$ un versor tangent la $\mathbb{M}$ în P. Considerăm o curbă α de viteză unu pe $\mathbb{M}$ astfel încît $\alpha(0) = P$ şi $\vec{\alpha}'(0) = \vec{e}$. Utilizînd lema 9.1 şi formulele lui Frenet pentru curba α, găsim

$$k_n(\vec{e}) = (S(\vec{e}), \vec{e}) = (S(\vec{\alpha}'(0)), \vec{\alpha}'(0)) = (\vec{\alpha}''(0), \vec{U}(P)) =$$

$$= k_\alpha(0)(\vec{N}(0), \vec{U}(P)) = k_\alpha(0) \cos \theta,$$

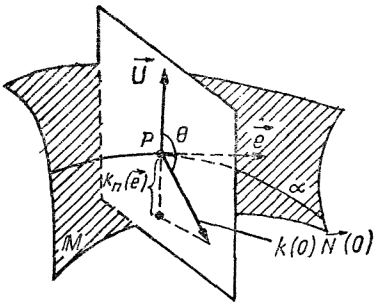


Fig. 123

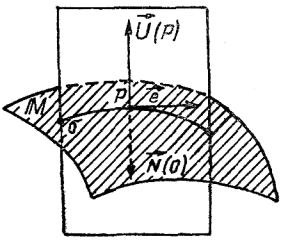


Fig. 124

unde $k_\alpha(0) \geqslant 0$ este curbura lui α în punctul P, iar θ este unghiul dintre normala principală a curbei şi normala suprafeţei (fig. 123).

Funcţia reală definită prin $\theta \to k_n(\vec{e}) = k_\alpha(0)\cos\theta$, $\theta \in [0, \pi]$ arată că încovoierea maximă a lui $\mathbb{M}$ este indicată de curba α pentru care $\theta = 0$ sau $\theta = \pi$ (punctele de extrem ale funcţiei). Această curbă este intersecţia dintre $\mathbb{M}$ şi planul determinat de P, $\vec{U}(P)$, $\vec{e}$ şi se numeşte *secţiunea normală a lui* $\mathbb{M}$ *în direcţia lui* $\vec{e}$.

Pentru secţiunea normală σ, de viteză unu, avem (fig. 124): $\vec{\sigma}'(0) = \vec{e}$, acceleraţia $\vec{\sigma}''(0) = k_\sigma(0)\,\vec{N}(0)$ aparţine planului de secţiune şi este perpendiculară pe $\vec{\sigma}'(0) = \vec{e}$, $\vec{N}(0) = \measuredangle\, \vec{U}(P)$, $k_n(\vec{e}) = \measuredangle\, k_\sigma(0)$.

Fie P un punct din suprafaţa $\mathbb{M}$, $\vec{e}$ un versor tangent la $\mathbb{M}$ în P şi $k_n(\vec{e})$ curbura normală corespunzătoare. Utilizînd secţiunea normală a lui $\mathbb{M}$ în direcţia lui $\vec{e}$ şi ţinînd cont că normala principală $\vec{N}$ a unei curbe din spaţiu arată sensul în care aceasta se curbează, putem da următoarele interpretări geometrice ale semnului lui $k_n(\vec{e})$ relativ la alegerea cîmpului normal unitar $\vec{U}$.

1) Presupunem $k_n(\vec{e}) > 0$. Rezultă că $\vec{U}(P)$ şi $\vec{N}(0)$ au acelaşi sens. De aceea în vecinătatea lui P şi în direcţa lui $\vec{e}$ suprafaţa se încovoaie în sensul indicat de $\vec{U}(P)$ (fig. 125).

2) Presupunem $k_n(\vec{e}) < 0$. Rezultă că $\vec{U}(P)$ şi $\vec{N}(0)$ au sensuri opuse. De aceea în vecinătatea lui P şi în direcţia lui $\vec{e}$ suprafaţa se curbează contrar sensului lui $\vec{U}(P)$ (fig. 126).

3) Fie $k_n(\vec{e}) = 0$. Rezultă $k_\sigma(0) = 0$ şi $\vec{N}(0)$ nu este definit. Nu putem spune precis care este forma suprafeţei în vecinătatea punctului considerat

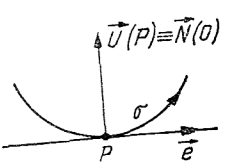


Fig. 125

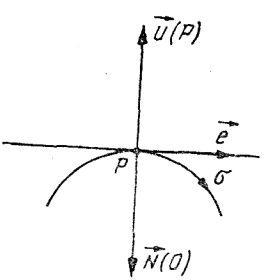


Fig. 126

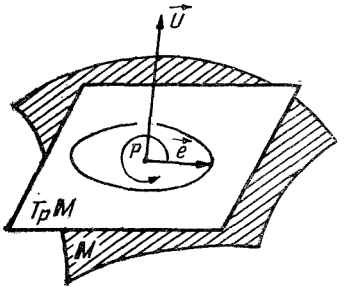


Fig. 127

pe direcția $\vec{e}$. Putem însă afirma că într-o vecinătate a lui P pe direcția $\vec{e}$ suprafața se curbează foarte puțin.

Presupunem acum că fixăm punctul P și că extremitatea lui $\vec{e}$ descrie un cerc în planul tangent. Diversele secțiuni normale ce se pot face ne dau informații despre forma suprafeței în vecinătatea lui P în diferite direcții (fig. 127).

Fie $k_1 = \max\limits_{\|\vec{e}\|=1} k_n(\vec{e})$ și $k_2 = \min\limits_{\|\vec{e}\|=1} k_n(\vec{e})$. Aceste numere există deoarece mulțimea determinată de relația $\|\vec{e}\| = 1$ este compactă (cerc), iar funcția $\vec{e} \to k_n(\vec{e})$ este continuă.

9.3. *Definiție. Numerele k_1 și k_2 se numesc curburile principale ale lui $\mathbb{M}$ în punctul P. Direcțiile pentru care se găsesc aceste valori extreme se numesc direcții principale ale lui $\mathbb{M}$ în P. Versorii acestor direcții se numesc vectori principali ai lui $\mathbb{M}$ în punctul P.*

Dacă în punctul P avem $k_1 = k_2$, atunci rezultă $k_n(\vec{e}) = \text{const.}$, adică $\mathbb{M}$ se curbează la fel în toate direcțiile și toate direcțiile ce trec prin P sînt principale.

9.4. *Definiție. Dacă $k_n(\vec{e}) = \text{const.}$, $\forall\, \vec{e} \in T_P\mathbb{M}$, $\|\vec{e}\|=1$, atunci punctul P se numește punct ombilical.*

9.5. Teoremă.

(1) Dacă P este un punct ombilical, atunci operatorul Weingarten în P se reduce la multiplicarea cu $k_1 = k_2$.

(2) Dacă P nu este un punct ombilical ($k_1 \neq k_2$), atunci există două (și numai două) direcții principale ortogonale. Dacă $\vec{e}_1$ și $\vec{e}_2$ sînt vectorii principali, atunci

$$S(\vec{e}_1) = k_1\vec{e}_1, \quad S(\vec{e}_2) = k_2\vec{e}_2.$$

Altfel: Curburile principale ale lui $\mathbb{M}$ în P sînt valorile proprii ale lui S. Vectorii principali ai lui $\mathbb{M}$ în P sînt vectori proprii ai lui S.

Demonstrație. Fie $\{e_1, e_2\}$ o bază ortonormată a lui $T_P\mathbb{M}$. Avem

$$S(\vec{e}_1) = S_{11}\vec{e}_1 + S_{21}\vec{e}_2$$

$$S(\vec{e}_2) = S_{12}\vec{e}_1 + S_{22}\vec{e}_2,$$

unde $S_{ij} = (S(\vec{e}_i), \vec{e}_j)$, $i, j = 1, 2$ și $S_{12} = S_{21}$ din simetria lui S. Pentru orice vector unitate $\vec{e}$ tangent la $\mathbb{M}$ în P putem scrie (fig. 128)

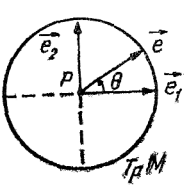


Fig. 128

$$\vec{e} = \vec{e}(\theta) = \cos\theta\,\vec{e}_1 + \sin\theta\,\vec{e}_2, \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Cu acestea curbura normală devine

$$f(\theta) = k_n(\vec{e}(\theta)) = (S(\cos\theta\vec{e}_1 + \sin\theta\vec{e}_2,$$
$$\cos\theta\vec{e}_1 + \sin\theta\vec{e}_2) =$$
$$= S_{11}\cos^2\theta + 2S_{12}\sin\theta\cos\theta + S_{22}\sin^2\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Prin derivare găsim

$$\frac{df}{d\theta} = 2(S_{22} - S_{11}) \sin\theta \cos\theta + 2S_{12}(\cos^2\theta - \sin^2\theta).$$

(1) Punctul P este ombilical $\Leftrightarrow \frac{df}{d\theta} = 0, \ \forall\theta \Leftrightarrow S_{11} = S_{22}$ şi $S_{12} = 0$. În acest caz notînd $k_n(\vec{e}) = c$ (constantă) obţinem $S(\vec{e}) = \cos\theta\, S(\vec{e}_1) + \sin\theta S(\vec{e}_2) = S_{11}\vec{e} = k_n(\vec{e}_1)\vec{e} = c\vec{e}$, c.c.tr.d.

(2) Presupunem că P nu este un punct ombilical. Putem proba uşor că $\frac{df}{d\theta} = 0$ are două soluţii θ_0, $\theta_0 + \frac{\pi}{2}$ în intervalul $[0, 2\pi)$ şi că la trecerea lui θ prin aceste puncte $\frac{df}{d\theta}$ îşi schimbă semnul. De aceea pe aceste două direcţii ortogonale $k_n(\vec{e})$ îşi atinge extremele.

Presupunem acum că funcţia $k_n(\vec{e})$ îşi atinge valoarea maximă k_1 chiar pe $\vec{e}_1$. Rezultă $\theta_0 = 0$, $k_1 = S_{11}$ şi din $\frac{df}{d\theta}(0) = 0$ rezultă $S_{12} = 0$. Din raţionamentul precedent deducem că valoarea minimă $k_2 = S_{22}$ este atinsă în direcţia lui $\vec{e}_2$. De aceea

$$S(\vec{e}_1) = k_1\vec{e}_1, \ S(\vec{e}_2) = k_2\vec{e}_2,$$

c.c.tr.d.

Ca o consecinţă avem:

9.6. Formula Euler. Fie k_1, k_2 curburile principale şi $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ vectorii principali ai lui $\mathbb{M}$ în P. Dacă $\vec{e} = \cos\theta\, \vec{e}_1 + \sin\theta\vec{e}_2$, atunci

$$k_n(\vec{e}) = k_1\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta.$$

Vom utiliza acum curburile principale $k_1(P)$ şi $k_2(P)$ pentru a construi o aproximare pătratică a suprafeţei $\mathbb{M}$ în vecinătatea punctului P. Pentru aceasta presupunem că:

(1) P este originea lui $\mathbb{R}^3$,

(2) $T_P\mathbb{M} \equiv xOy$,

(3) $\vec{i}_P = (1, 0, 0)_P$ şi $\vec{j}_P = (0, 1, 0)_P$ sînt vectori principali.

În vecinătatea lui P suprafaţa $\mathbb{M}$ poate fi reprezentată în forma $z = f(x, y)$ pe care o orientăm cu ajutorul lui (fig. 129)

$$\vec{U} = \frac{-f_x\vec{i} - f_y\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.$$

Din (1) şi (2) rezultă $f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$. De aceea avem următoarea aproximare Taylor

$$z \sim \frac{1}{2}(x^2 f_{x^2}(0, 0) + 2xy f_{xy}(0, 0) + y^2 f_{y^2}(0,0)).$$

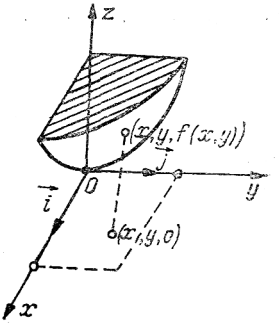


Fig. 129

Prin calcul direct găsim

$$S(\vec{i}) = f_{x^2}(0,0)\vec{i} + f_{xy}(0,0)\vec{j},$$

$$S(\vec{j}) = f_{xy}(0,0)\vec{i} + f_{y^2}(0,0)\vec{j}.$$

Din (3) şi din teorema 9.5 deducem $f_{xy}(0,0) = 0$, $f_{x^2}(0,0) = k_1$ şi $f_{y^2}(0,0) = k_2$.

Aceste raţionamente arată că în vecinătatea punctului P suprafaţa $\mathbb{M}$ are aproximativ aceeaşi formă cu suprafaţa

$$z = \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2)$$

pe care o vom numi *aproximarea pătratică* a lui $\mathbb{M}$ în vecinătatea lui P.

Definiţiile 9.3, 9.4 şi teoremele 9.5, 9.6 au fost formulate pentru punctul P. Ele sînt valabile în toate punctele din regiunea orientată a lui M unde este definit cîmpul vectorial normal unitar $\vec{U}$. De aceea

$$P \to k_i(P), \quad i = 1, 2,$$

vor fi două funcţii reale k_1, k_2 definite pe aceeaşi regiune cu $\vec{U}$. Aceste funcţii se numesc *curburile principale* ale lui $\mathbb{M}$.

9.7. Exemplu. Fie elicoidul drept $\mathbb{M}: x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = v,\ (u, v) \in \mathbb{R}^2$. Ne propunem să găsim curbura normală şi curburile principale în punctul curent al lui $\mathbb{M}$. Pentru aceasta reprezentăm pe $\mathbb{M}$ în forma $\vec{r} = u\cos v\,\vec{i} + u\sin v\,\vec{j} + v\,\vec{k}$. Vitezele parţiale sînt

$$\vec{r}_u = \cos v\,\vec{i} + \sin v\,\vec{j}, \quad \vec{r}_v = -u\sin v\,\vec{i} + u\cos v\,\vec{j} + \vec{k}.$$

Deoarece $\vec{r}_u \perp \vec{r}_v$, alegem drept bază ortonormată a planului tangent în punctul curent al suprafeţei pe

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\|\vec{r}_u\|}\vec{r}_u = \cos v\,\vec{i} + \sin v\,\vec{j},$$

$$\vec{e}_2 = \frac{1}{\|\vec{r}_v\|}\vec{r}_v = \frac{-u\sin v\,\vec{i} + u\cos v\,\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1+u^2}}.$$

Orientăm pe $\mathbb{M}$ prin alegerea lui

$$\vec{U} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|} = \frac{\sin v}{\sqrt{1+u^2}}\vec{i} - \frac{\cos v}{\sqrt{1+u^2}}\vec{j} + \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\vec{k}.$$

Avem

$$S(\vec{e}_1) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\vec{U} = \frac{u\sin v}{(1+u^2)^{3/2}}\vec{i} - \frac{u\cos v}{(1+u^2)^{3/2}}\vec{j} - \frac{1}{(1+u^2)^{3/2}}\vec{k},$$

$$S(\vec{e}_2) = -\frac{1}{\|\vec{r}_v\|}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\vec{U} = -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\left(\frac{\cos v}{\sqrt{1+u^2}}\vec{i} + \frac{\sin v}{\sqrt{1+u^2}}\vec{j}\right).$$

De aceea găsim

$$S_{11} = (S(\vec{e}_1), \vec{e}_1) = 0, \; S_{22} = (S(\vec{e}_2), \vec{e}_2) = 0,$$

$$S_{12} = (S(\vec{e}_1), \vec{e}_2) = (\vec{e}_1, S(\vec{e}_2)) = -\frac{1}{1+u^2}.$$

Fie $\vec{e} = \cos\theta\vec{e}_1 + \sin\theta\vec{e}_2$. Obținem

$$f(\theta) = k_n(\vec{e}(\theta)) = -\frac{\sin 2\theta}{1+u^2}$$

și deci

$$-\frac{1}{1+u^2} \leqslant k_n(\vec{e}(\theta)) \leqslant \frac{1}{1+u^2},$$

adică

$$k_1 = k_n\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e}_1 - \vec{e}_2)\right) = \frac{1}{1+u^2},$$

$$k_2 = k_n\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)\right) = -\frac{1}{1+u^2}.$$

§10. Curbura Gauss

Fie $\mathbb{M}$ o suprafață și S aplicația Weingarten. În acest paragraf vom da semnificațiile geometrice ale determinantului și urmei operatorului S.

10.1. *Definiție. Funcția* $K = \det S : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$ *se numește curbura Gauss a suprafeței* $\mathbb{M}$. *Funcția* $H = \frac{1}{2} \cdot$ *urma* $S : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$ *se numește curbura medie a suprafeței* $\mathbb{M}$.

Curbura Gauss și curbura medie se exprimă cu ajutorul curburilor principale k_1 și k_2.

10.2. Lemă. Avem

$$K = k_1 . k_2, \; H = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Demonstrație. Fie P un punct din $\mathbb{M}$. Toate matricele ce se pot atașa aplicației S_P au același determinant și aceeași urmă. De aceea pentru găsirea determinantului și urmei lui S_P este suficient să alegem în planul tangent $\mathbf{T}_P\mathbb{M}$ o bază convenabilă în raport cu care aplicația S_P să fie reprezentată de o matrice simplă. Alegînd drept bază vectorii principali $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ din teorema 9.5 rezultă că lui S_P îi corespunde matricea

$$\begin{bmatrix} k_1(P) & 0 \\ 0 & k_2(P) \end{bmatrix}$$

și astfel lema este evidentă.

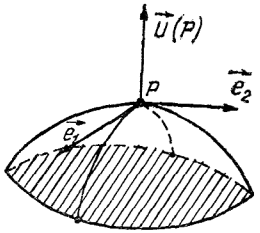


Fig. 130

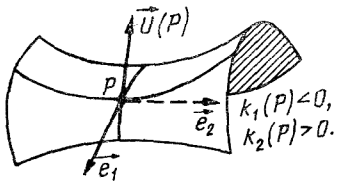


Fig. 131

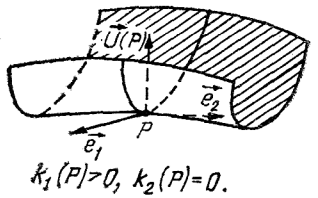


Fig. 132

Observaţie. Dacă $\vec{U}$ se schimbă în $-\vec{U}$, atunci k_1 şi k_2 se schimbă respectiv în $-k_1$, $-k_2$, curbura medie H se schimbă în $-H$, iar curbura Gauss K rămîne neschimbată.

În continuare vom da interpretarea geometrică a semnului curburii Gauss.

10.3. Interpretarea semnului lui K(P)

1) Presupunem că în punctul $P \in \mathbb{M}$ avem $K(P) > 0$. Din $K = k_1k_2$ rezultă că $k_1(P)$ şi $k_2(P)$ au acelaşi semn. Din formula Euler rezultă $k_n(\vec{e}) > 0$ sau $k_n(\vec{e}) < 0$. Aceasta înseamnă că în vecinătatea lui P suprafaţa se încovoaie fie în sensul lui $\vec{U}$, fie în sens contrar. Aproximarea pătratică a lui $\mathbb{M}$ în vecinătatea lui P este paraboloidul eliptic $2z = k_1(P)x^2 + k_2(P)y^2$ (fig. 130).

2) Presupunem $K(P) < 0$. Din $K = k_1k_2$ rezultă că $k_1(P)$ şi $k_2(P)$ au semne opuse. Aproximarea pătratică a lui $\mathbb{M}$, în vecinătatea lui P este paraboloidul hiperbolic $2z = k_1(P)x^2 + k_2(P)y^2$. De aceea în vecinătatea lui P suprafaţa arată ca o şa (fig. 131).

3) Presupunem $K(P) = 0$. Deoarece $K = k_1k_2$, considerăm următoarele două cazuri:

(a) numai una dintre curburile principale este zero, de exemplu $k_1(P) \neq 0$, $k_2(P) = 0$. În acest caz aproximarea pătratică este cilindrul parabolic

$$2z = k_1(P)x^2$$

şi deci, în vecinătatea lui P, suprafaţa $\mathbb{M}$ arată ca o albie (fig. 132),

(b) ambele curburi principale sînt zero

$$k_1(P) = k_2(P) = 0.$$

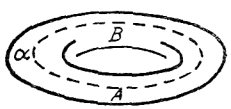


Fig. 133

Aproximarea pătratică se reduce la planul $z = 0$ şi nu putem obţine nici o informaţie cu privire la forma lui $\mathbb{M}$ în vecinătatea lui P. Un punct $P \in \mathbb{M}$ pentru care $k_1(P) = 0$, $k_2(P) = 0$ se numeşte *punct planar*.

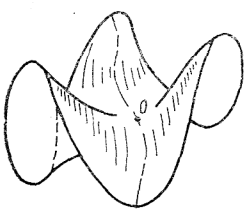


Fig. 134

10.4. Exemple

(1) *Torul* de rotaţie este un exemplu de suprafaţă pe care avem de-a face cu cazurile 1), 2) şi 3) (a).

În punctele regiunii A (fig. 133) avem $K > 0$ deoarece în aceste puncte torul se îndepărtează faţă de planul tangent. În punctele regiunii B avem $K < 0$ deoarece în vecinătatea oricărui punct din această regiune torul seamănă cu o şa. Pe cele două cercuri care

separă regiunile A și B avem $K = 0$ deoarece de-a lungul acestor cercuri torul seamănă (local) cu o albie.

(2) Punctul O(0, 0, 0) de pe suprafața (fig. 134)

$$z = x^3 - 3xy^2 = \mathrm{Re}(x + iy)^3$$

este un punct planar.

În continuare vom da formule pentru calculul funcțiilor K și H.

10.5. Lemă. Dacă $\vec{v}_1$ și $\vec{v}_2$ sînt doi vectori liniar independenți tangenți la $\mathbb{M}$ în P, atunci

$$S(\vec{v}_1) \times S(\vec{v}_2) = K(P)\vec{v}_1 \times \vec{v}_2,$$

$$S(\vec{v}_1) \times \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \times S(\vec{v}_2) = 2H(P)\vec{v}_1 \times \vec{v}_2.$$

Demonstrație. Deoarece $\vec{v}_1$ și $\vec{v}_2$ formează o bază a planului tangent $T_P\mathbb{M}$ putem scrie

$$S(\vec{v}_1) = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2$$

$$S(\vec{v}_2) = c\vec{v}_1 + d\vec{v}_2$$

Astfel

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

este matricea lui S în raport cu baza $\vec{v}_1, \vec{v}_2$. Găsim

$$K(P) = \det S = ad - bc, \quad H(P) = \frac{1}{2} \text{ urma } S = \frac{1}{2}(a + d).$$

Folosind proprietățile produsului vectorial deducem

$$S(\vec{v}_1) \times S(\vec{v}_2) = (a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2)\times(c\vec{v}_1 + d\vec{v}_2) = (ad - bc)\vec{v}_1\times\vec{v}_2 = K(P)\vec{v}_1\times\vec{v}_2.$$

Analog se găsește relația în care intră $H(P)$.

Fie acum $\vec{V}_1$ și $\vec{V}_2$ două cîmpuri vectoriale tangente independente definite pe o regiune orientată a lui $\mathbb{M}$. În baza lemei precedente avem

$$S(\vec{V}_1) \times S(\vec{V}_2) = K\vec{V}_1 \times \vec{V}_2,$$

$$S(\vec{V}_1) \times \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \times S(\vec{V}_2) = 2H\vec{V}_1 \times \vec{V}_2.$$

Deoarece cîmpurile $\vec{V}_1$ şi $\vec{V}_2$ sînt liniar independente, adică $\|\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\|^2 > 0$, înmulţind scalar ambii membri ai acestor ecuaţii cu cîmpul normal $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$ şi utilizînd identitatea Lagrange găsim

$$K = \frac{\begin{vmatrix} (S(\vec{V}_1), \vec{V}_1) & (S(\vec{V}_1), \vec{V}_2) \\ (S(\vec{V}_2), \vec{V}_1) & (S(\vec{V}_2), \vec{V}_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\vec{V}_1, \vec{V}_1) & (\vec{V}_1, \vec{V}_2) \\ (\vec{V}_2, \vec{V}_1) & (\vec{V}_2, \vec{V}_2) \end{vmatrix}},$$

$$H = \frac{\begin{vmatrix} (S(\vec{V}_1), \vec{V}_1) & (S(\vec{V}_1), \vec{V}_2) \\ (\vec{V}_2, \vec{V}_1) & (\vec{V}_2, \vec{V}_2) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (\vec{V}_1, \vec{V}_1) & (\vec{V}_1, \vec{V}_2) \\ (S(\vec{V}_2), \vec{V}_1) & (S(\vec{V}_1), \vec{V}_2) \end{vmatrix}}{2\begin{vmatrix} (\vec{V}_1, \vec{V}_1) & (\vec{V}_1, \vec{V}_2) \\ (\vec{V}_2, \vec{V}_1) & (\vec{V}_2, \vec{V}_2) \end{vmatrix}}.$$

Evident funcţiile K şi H astfel obţinute sînt diferenţiabile.

Dacă funcţiile K şi H sînt cunoscute, atunci curburile principale sînt date de formulele din consecinţa următoare.

10.6. Consecinţă. Pe o regiune orientată U din $\mathbb{M}$ curburile principale sînt date de

$$k_1, k_2 = H \pm \sqrt{H^2 - K}.$$

Demonstraţie. Relaţiile rezultă din faptul că

$$K = k_1 k_2, \quad H = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

şi deci

$$H^2 - K = \frac{(k_1 - k_2)^2}{4}.$$

Formulele precedente arată că funcţiile k_1 şi k_2 sînt continue pe U. Aceste funcţii nu sînt diferenţiabile în punctele în care $H^2 - K = 0$, adică în punctele ombilicale. Dacă U nu posedă puncte ombilicale, atunci funcţiile k_1 şi k_2 sînt diferenţiabile.

Să prezentăm acum unele tipuri de suprafeţe.

10.7. *Definiţie. O suprafaţă pentru care $K = const.$ se numeşte suprafaţă cu curbura constantă. În particular suprafeţele pentru care $K = 0$ se mai numesc şi local euclidiene.*

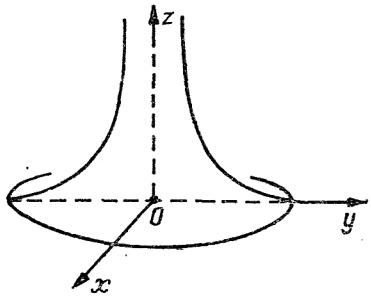


Fig. 135

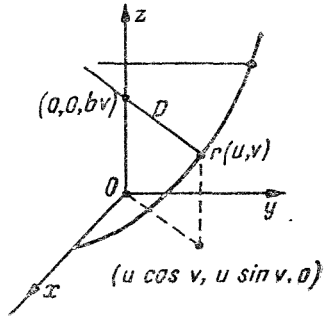


Fig. 136

10.8. Exemple.

(1) Suprafața de rotație

$$z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2} + \operatorname{sech}^{-1}\sqrt{x^2 + y^2}, \quad z > 0$$

numită *pseudo-sferă*, fig. 135) are curbura $K = -1$.

(2) Planul (fig. 119), cilindrul circular drept (fig. 120), conul fără vîrf, banda Möbius (fig. 116) etc. sînt exemple de suprafețe local euclidiene.

Suprafețele *desfășurabile* (adică suprafețele riglate pentru care cîmpul normal este paralel în $\mathbb{R}^3$ de-a lungul fiecărei generatoare) sînt local euclidiene.

Reciproc, suprafețele conexe, închise (ca submulțime în $\mathbb{R}^3$) și local euclidiene sînt desfășurabile. De asemenea ele sînt local izometrice cu planul, adică există o aplicație definită pe suprafața respectivă și cu valori în plan care păstrează produsul scalar al vectorilor tangenți (izometrie locală).

(3) Sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ are curbura $K = 1$.

10.9. *Definiție. O suprafață pentru care $H = 0$ se numește suprafață minimală.*

Facem observația că suprafețele minimale au curbura Gauss $K \leqslant 0$, deoarece din

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = 0 \text{ rezultă } k_1 = -k_2.$$

Exemplu. Elicoidul cu plan director (fig. 136) este o suprafață minimală.

Denumirea de suprafață minimală provine din aceea că, dintre toate suprafețele ce trec printr-o curbă închisă, suprafața de arie minimă are curbura medie nulă.

§11. Formele fundamentale ale unei suprafețe

Fie V un spațiu vectorial euclidian real și $\mathcal{T} : V \to V$ o transformare liniară simetrică. Funcției $\mathcal{T}$ i se poate atașa forma biliniară simetrică

$$\mathcal{A} : V \times V \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{A}(v, w) = (\mathcal{T}(v), w)$$

și deci implicit forma pătratică

$$Q : V \to \mathbb{R},\ Q(v) = \mathscr{A}(v, v) = (\mathscr{T}(v), v).$$

Forma biliniară simetrică $\mathscr{A}$ (implicit forma pătratică Q) atașată unei transformări liniare simetrice $\mathscr{T}$ conține exact aceeași informație ca și $\mathscr{T}$ deoarece $\mathscr{T}$ poate fi recuperată din formula

$$(\mathscr{T}(v), w) = \frac{1}{2}\,[Q(v+w) - Q(v) - Q(w)],$$

care este adevărată pentru orice vectori v, w din V.

Fie $\mathbb{M}$ o suprafață, P un punct din $\mathbb{M}$ și $T_P\mathbb{M}$ spațiul tangent la $\mathbb{M}$ în punctul P. Forma biliniară simetrică I_P asociată *identității* pe $T_P\mathbb{M}$, adică funcția reală definită prin

$$I_P(\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}), \qquad \vec{v}, \vec{w} \in T_P\mathbb{M},$$

se numește *prima formă fundamentală a suprafeței* $\mathbb{M}$ *în punctul* P. Se observă că I_P nu este altceva decît un produs scalar fiind restricția produsului scalar din $\mathbb{R}^3$ la subspațiul bidimensional $T_P\mathbb{M}$. Funcția $P \to I_P$ se numește *prima formă fundamentală a suprafeței* $\mathbb{M}$ și se notează cu I. Geometria pe $\mathbb{M}$ derivată din prima formă fundamentală se numește *geometrie intrinsecă*. Conținutul acesteia rezultă din faptul că funcția I, și deci cunoașterea produsului scalar pe fiecare $T_P\mathbb{M}$, permite calcularea lungimii unui arc de curbă de pe suprafața $\mathbb{M}$, a unghiului dintre două tangente la suprafața $\mathbb{M}$, a ariei unei porțiuni din suprafața $\mathbb{M}$ etc. De exemplu, dacă $\alpha : [a, b] \to \mathbb{M}$ este o curbă regulată, atunci lungimea lui α este dată prin

$$l(\alpha) = \int_a^b \left\| \frac{\mathrm{d}\vec{\alpha}}{\mathrm{d}t} \right\| \mathrm{d}t.$$

Presupunem că $\mathbb{M}$ este o suprafață conexă și notăm cu Ω mulțimea curbelor regulate $\alpha : [a, b] \to \mathbb{M}$ care unesc punctul $P = \alpha(a)$ cu punctul $Q = \alpha(b)$. *Distanța* de la P la Q se definește prin

$$\mathrm{d}(P, Q) = \inf_{\alpha \in \Omega} l(\alpha).$$

Această expresie definește o *distanță* (*metrică*) d pe $\mathbb{M}$ și deci o suprafață conexă este un exemplu de spațiu metric. Mai mult, topologia lui $\mathbb{M}$ determinată de metrica d coincide cu topologia originală a lui $\mathbb{M}$ (ca subvarietate).

Fie $\mathbb{M}$ o suprafață orientată, P un punct din $\mathbb{M}$ și $T_P\mathbb{M}$ spațiul tangent la $\mathbb{M}$ în punctul P. Forma biliniară simetrică II_P asociată aplicației Weingarten S_P, adică funcția reală definită prin

$$II_P(\vec{v}, \vec{w}) = (S_P(\vec{v}), \vec{w}), \quad \vec{v}, \vec{w} \in T_P\mathbb{M},$$

se numeşte a *doua formă fundamentală a suprafeţei* $\mathbb{M}$ *în punctul* P. Forma pătratică corespunzătoare se poate exprima prin

$$\mathrm{II}_P(\vec{v}, \vec{v}) = (S_P(\vec{v}), \vec{v}) = (\vec{\alpha}''(t_0), \vec{U}(P)),$$

unde $\alpha : I \to \mathbb{M}$ este o curbă din $\mathbb{M}$ pentru care $\alpha(t_0) = P$, $\vec{\alpha}'(t_0) = \vec{v}$, iar $\vec{U}$ este cîmpul vectorial unitar normal la $\mathbb{M}$. În particular, pentru $\|\vec{v}\| = 1$, numărul $\mathrm{II}_P(\vec{v}, \vec{v})$ este egal cu curbura normală a lui $\mathbb{M}$ în punctul P, în direcţia $\vec{v}$. Funcţia $P \to \mathrm{II}_P$ se numeşte *a doua formă fundamentală a suprafeţei* $\mathbb{M}$ *şi se notează cu II*. Cunoaşterea acesteia este echivalentă cu cunoaşterea aplicaţiei Weingarten. De aceea geometria pe $\mathbb{M}$ ce emană din a doua formă fundamentală conţine elemente matematice ce permit descrierea formei suprafeţei local sau global: curbură normală, curburi principale, curbura Gauss, curbura medie etc. Deşi toate acestea sînt introduse pornind de la cîmpul vectorial unitar normal pe suprafaţa $\mathbb{M}$, adică de la un element care aparţine calculului din $\mathbb{R}^3$, totuşi Gauss a demonstrat că curbura care azi îi poartă numele este un element intrinsec (se poate exprima cu coeficienţii primei forme fundamentale). Proprietăţile suprafeţei $\mathbb{M}$ care nu depind numai de prima formă fundamentală se numesc *proprietăţi rigide*.

Primele două forme fundamentale împreună cu anumite relaţii între coeficienţii lor fixează suprafaţa $\mathbb{M}$ pînă la o izometrie în $\mathbb{R}^3$.

Forma biliniară simetrică III_P asociată pătratului aplicaţiei lui Weingarten S_P, adică funcţia reală definită prin

$$\mathrm{III}_P(\vec{v}, \vec{w}) = (S_P^2(\vec{v}), \vec{w}) = (S_P(\vec{v}), S_P(\vec{w})), \quad \vec{v}, \vec{w} \in T_P\mathbb{M}$$

se numeşte a *treia formă fundamentală a suprafeţei* $\mathbb{M}$ *în punctul* P. Aceasta determină funcţia $P \to \mathrm{III}_P$, notată cu III şi numită a treia formă fundamentală a suprafeţei $\mathbb{M}$.

Formele fundamentale I, II, III, curbura medie H şi curbura Gauss K sînt legate prin relaţia

$$\mathrm{III} - 2H \cdot \mathrm{II} + K \cdot I = 0.$$

§12. Formule de calcul

Fie $\mathbb{M}$ o suprafaţă. Ne propunem să exprimăm curbura Gauss K, curbura medie H şi curburile principale k_1, k_2 cu ajutorul unei hărţi în $\mathbb{M}$.

Fie $r : \mathbb{D} \to \mathbb{M}$ o hartă cu ajutorul căreia reprezentăm o porţiune $r(\mathbb{D})$ din $\mathbb{M}$. Acestei hărţi îi ataşăm trei funcţii reale

$$E = (\vec{r}_u, \vec{r}_u), \; F = (\vec{r}_u, \vec{r}_v), \quad G = (\vec{r}_v, \vec{r}_v)$$

definite pe $\mathbb{D}$. Funcţiile E şi G sînt strict pozitive deoarece reprezintă pătratele lungimilor vitezelor parţiale. Unghiul θ dintre $\vec{r}_u$ şi $\vec{r}_v$ depinde de F (fig. 137) deoarece

$$F = \|\vec{r}_u\| \, \|\vec{r}_v\| \cos\theta = \sqrt{EG} \cos\theta.$$

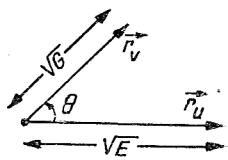


Fig. 137

Funcţiile E, F şi G măsoară modul în care r îndoaie regiunea plană $\mathbb{D}$ pentru a o aplica pe regiunea curbă $r(\mathbb{D})$ din $\mathbb{M}$. Aceste funcţii determină complet prima formă fundamentală a suprafeţei. Într-adevăr, dacă $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ sînt doi vectori tangenţi la $\mathbb{M}$ în punctul $r(u, v)$, atunci avem

$$(*) \qquad \vec{a} = a_1\vec{r}_u + a_2\vec{r}_v, \quad \vec{b} = b_1\vec{r}_u + b_2\vec{r}_v$$

şi deci

$$\mathrm{I}(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{b}) = E\, a_1b_1 + F(a_1b_2 + a_2b_1) + Ga_2b_2.$$

În particular pătratul elementului de arc (al unei curbe de pe $r(\mathbb{D})$) este

$$\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}\vec{r}, \mathrm{d}\vec{r}) = E\,\mathrm{d}u^2 + 2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G\,\mathrm{d}v^2.$$

Cu ajutorul vitezelor parţiale $\vec{r}_u$ şi $\vec{r}_v$ se construieşte funcţia vectorială $\vec{Z} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$ care ataşează fiecărui punct $(u, v) \in \mathbb{D}$ un vector perpendicular pe $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ în punctul $r(u, v) \in r(\mathbb{D})$. Avem

$$\|\vec{Z}\| = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| = \sqrt{EG - F^2} > 0 \text{ (identitatea Lagrange).}$$

Din punct de vedere local, funcţia $\vec{Z}$ poate fi privită ca un cîmp vectorial normal pe $r(\mathbb{D}) \subset \mathbb{M}$ şi cu ajutorul ei construim cîmpul normal unitar

$$\vec{U} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}.$$

Conform observaţiilor anterioare, calculul derivatelor covariante ale cîmpurilor vectoriale definite pe $\mathbb{M}$ în punctele curbelor parametrice ale hărţii r se reduce la calculul derivatelor parţiale în raport cu u şi v. Dacă

$$\vec{r}(u, v) = (x(u, v), \quad y(u, v), \quad z(u, v)),$$

atunci

$$\vec{r}_u = (x_u, y_u, z_u), \quad \vec{r}_v = (x_v, y_v, z_v)$$

şi

$$\vec{r}_{u^2} = (x_{u^2}, y_{u^2}, z_{u^2}) = \mathrm{D}_{\vec{r}_u}\vec{r}_u,$$

$$\vec{r}_{uv} = (x_{uv}, y_{uv}, z_{uv}) = \mathrm{D}_{\vec{r}_u}\vec{r}_v = \mathrm{D}_{\vec{r}_v}\vec{r}_u,$$

$$\vec{r}_{v^2} = (x_{v^2}, y_{v^2}, z_{v^2}) = \mathrm{D}_{\vec{r}_v}\vec{r}_v,$$

sînt vectori legaţi în $r(u, v)$.

Fie S aplicaţia Weingarten ataşată lui $\vec{U}$. Cu ajutorul ei definim pe $\mathbb{D}$ alte trei funcţii reale

$$l = (S(\vec{r}_u), \vec{r}_u),$$
$$m = (S(\vec{r}_u), \vec{r}_v) = (\vec{r}_u, S(\vec{r}_v)),$$
$$n = (S(\vec{r}_v), \vec{r}_v).$$

Deoarece $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ constituie o bază a lui $T_P\mathbb{M}$, $\forall P \in r(\mathbb{D}) \subset \mathbb{M}$, aceste funcţii determină unic a doua formă fundamentală. Într-adevăr, dacă $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ sînt doi vectori tangenţi la $\mathbb{M}$ în punctul $r(u, v)$, atunci avem egalităţile (*) şi deci

$$\mathrm{II}(\vec{a}, \vec{b}) = (S(\vec{a}), \vec{b}) = la_1b_1 + m(a_1b_2 + a_2b_1) + na_2b_2.$$

În particular

$$(S(d\vec{r}), d\vec{r}) = l\,du^2 + 2m\,du\,dv + n\,dv^2.$$

Coordonatele lui $S(\vec{r}_u)$ şi $S(\vec{r}_v)$ în raport cu $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ nu sînt simple din cauza faptului că baza $\vec{r}_u$ şi $\vec{r}_v$ nu este în general ortonormată. Avem însă avantajul că obţinem expresii simple pentru curbura Gauss şi curbura medie.

12.1. Teoremă. Dacă r este o hartă în $\mathbb{M}$, atunci

$$K(r) = \frac{ln - m^2}{EG - F^2}, \qquad H(r) = \frac{Gl - 2Fm + En}{2(EG - F^2)}.$$

Demonstraţie. Expresiile lui $K(P)$ şi $H(P)$ în funcţie de vectorii $\vec{V}_1(P)$ şi $\vec{V}_2(P)$ tangenţi la $\mathbb{M}$ în P sînt date în § 10, lema 10.5. Dacă vectorii $\vec{V}_1(P)$ şi $\vec{V}_2(P)$ sînt înlocuiţi cu vectorii $\vec{r}_u(u, v)$, $\vec{r}_v(u, v)$ tangenţi la $\mathbb{M}$ în $\vec{r}(u, v)$, atunci găsim pe $K(r(u, v))$ şi $H(r(u, v))$.

Dacă harta r reiese din context, atunci funcţiile compuse $K(r)$ şi $H(r)$ vor fi scrise pe scurt K şi H.

Determinarea funcţiilor l, m şi n pornind de la definiţie este complicată. De aceea, urmînd ideea din lema 9.1, vom stabili nişte formule mai avantajoase din punctul de vedere al calculelor. Deoarece

$$(\vec{U}, \vec{r}_u) = 0$$

derivarea parţială în raport cu v (derivarea obişnuită de-a lungul curbei de parametru v) ne dă

$$0 = \frac{\partial}{\partial v}(\vec{U}, \vec{r}_u) = (\vec{U}_v, \vec{r}_u) + (\vec{U}, \vec{r}_{uv}).$$

Pe de altă parte ştim că

$$\vec{U}_v = -S(\vec{r}_v)$$

şi astfel găsim

$$m = (S(\vec{r}_v), \vec{r}_u) = (\vec{U}, \vec{r}_{uv}) = (\vec{U}, \vec{r}_{vu}) = (\vec{r}_v, S(\vec{r}_u)).$$

Astfel am pus în evidenţă o nouă formulă pentru calculul lui m (fig. 138) şi am demonstrat că operatorul S este simetric.

12.2. Teoremă. Dacă r este o hartă în $\mathbb{M}$ atunci

$$l = (S(\vec{r}_u), \vec{r}_u) = (\vec{U}, \vec{r}_{u^2}),$$

$$m = (S(\vec{r}_u), \vec{r}_v) = (\vec{r}_u, S(\vec{r}_v)) = (\vec{U}, \vec{r}_{uv}),$$

$$n = (S(\vec{r}_v), \vec{r}_v) = (\vec{U}, \vec{r}_{v^2}).$$

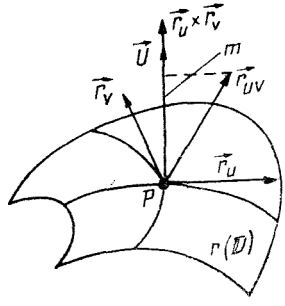


Fig. 138

Demonstrație. Pentru l se derivează $0=(\vec{U}, \vec{r}_u)$ în raport cu u, iar pentru n se derivează $0=(\vec{U}, \vec{r}_v)$ în raport cu v.

§13. Curbe speciale pe o suprafață

Curbe principale

13.1. *Definiție. O curbă regulată α de pe suprafața $\mathbb{M}$ se numește curbă principală sau linie de curbură dacă viteza sa $\vec{\alpha}'$ determină în fiecare punct al curbei o direcție principală.*

Astfel curbele principale sînt traiectorii în direcțiile în care curbura normală a lui $\mathbb{M}$ devine maximă sau minimă. Abstracție făcînd de reparametrizări, prin fiecare punct al lui $\mathbb{M}$, care nu este punct ombilical, trec două curbe principale (necesar ortogonale).

13.2. Teoremă. Fie α o curbă regulată din $\mathbb{M}$ și $\vec{U}$ restricția cîmpului normal unitar la α.

(1) Curba α este principală dacă și numai dacă $\vec{U}'$ și $\vec{\alpha}'$ sînt coliniari în orice punct.

(2) Dacă α este o curbă principală, atunci

$$k_n\left(\frac{\vec{\alpha}'}{\|\vec{\alpha}'\|}\right)=\frac{(\vec{\alpha}'', \vec{U})}{(\vec{\alpha}', \vec{\alpha}')}.$$

Demonstrație. (1) Curba α este principală dacă și numai dacă $S(\vec{\alpha}')$ și $\vec{\alpha}'$ sînt coliniari. Pe de altă parte $S(\vec{\alpha}') = -\vec{U}'$ și astfel afirmația devine evidentă.

(2) Deoarece $\dfrac{\vec{\alpha}'}{\|\vec{\alpha}'\|}$ este un vector principal avem

$$k_1 \text{ sau } k_2 = k_n\left(\frac{\vec{\alpha}'}{\|\vec{\alpha}'\|}\right)=\left(S\left(\frac{\vec{\alpha}'}{\|\vec{\alpha}'\|}\right), \frac{\vec{\alpha}'}{\|\vec{\alpha}'\|}\right)=\frac{(S(\vec{\alpha}'), \vec{\alpha}')}{\|\vec{\alpha}'\|^2}=\frac{(\vec{\alpha}'', \vec{U})}{(\vec{\alpha}', \vec{\alpha}')}$$

(vezi și lema 9.1).

Curbe asimptotice

Direcțiile tangente la suprafața $\mathbb{M}$ pe care curbura normală este zero se numesc *direcții asimptotice.* Cu alte cuvinte un vector $\vec{v}$ tangent la $\mathbb{M}$ este asimptotic $\Leftrightarrow k(\vec{v}) = 0 \Leftrightarrow (S(\vec{v}), \vec{v}) = 0$.

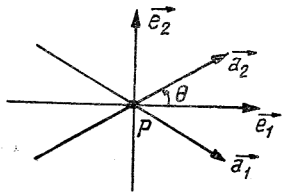


Fig. 139

13.3. Teoremă. Fie P un punct din suprafața $\mathbb{M}$.

(1) Dacă $K(P) > 0$, atunci în P nu există direcții asimptotice.

(2) Dacă $K(P) < 0$, atunci există exact două direcții asimptotice în P. Bisectoarele acestor direcții sînt direcțiile principale. Unghiul dintre o direcție principală și o direcție asimptotică este dat de (fig. 139)

$$\operatorname{tg}^2\theta = -\frac{k_1(P)}{k_2(P)}.$$

(3) Fie $K(P) = 0$. Dacă P este planar, atunci orice direcţie ce trece prin P este asimptotică. Dacă P nu este planar, atunci există o singură direcţie asimptotică care este şi direcţie principală.

Demonstraţie. Totul rezultă din formula Euler

$$k_n(\vec{u}) = k_1(P)\cos^2\theta + k_2(P)\sin^2\theta.$$

(1) Deoarece k_1, k_2 au acelaşi semn rezultă $k_n(\vec{u}) \neq 0$.

(2) Deoarece k_1 şi k_2 au semne contrare, din ecuaţia

$$k_1\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta = 0$$

obţinem două direcţii asimptotice.

(3) Dacă P este planar, adică $k_1(P) = k_2(P) = 0$, rezultă $k_n(\vec{u}) = 0$ şi deci direcţiile asimptotice sînt nedeterminate.

Dacă $k_1(P) \neq 0$, $k_2(P) = 0$, atunci $k_n(\vec{u}) = k_1(P)\cos^2\theta$ se anulează numai pentru $\theta = \frac{\pi}{2}$ şi deci $\vec{u} = \vec{e}_2$.

13.4. *Definiţie. O curbă regulată α din $\mathbb{M}$ se numeşte curbă asimptotică dacă viteza sa $\vec{\alpha}'$ dă în fiecare punct o direcţie asimptotică.*

13.5. Teoremă. Fie α o curbă regulată din $\mathbb{M}$ şi $\vec{U}$ restricţia cîmpului normal unitar la α.

(1) Curba α este asimptotică dacă şi numai dacă $\vec{U}'$ şi $\vec{\alpha}'$ sînt ortogonali în orice punct.

(2) Curba α este asimptotică dacă şi numai dacă acceleraţia sa $\vec{\alpha}''$ este tangentă la $\mathbb{M}$.

Demonstraţie. (1) Curba α este asimptotică $\Leftrightarrow k_n(\vec{\alpha}') = 0 \Leftrightarrow (S(\vec{\alpha}'), \vec{\alpha}') = 0$, şi ţinînd cont că $S(\vec{\alpha}') = -\vec{U}'$, $\Leftrightarrow (\vec{U}', \vec{\alpha}') = 0$.

(2) Derivînd pe $(\vec{U}, \vec{\alpha}') = 0$ găsim

$$(\vec{U}', \vec{\alpha}') + (\vec{U}, \vec{\alpha}'') = 0$$

şi deci $(\vec{U}', \vec{\alpha}') = 0 \Leftrightarrow (\vec{U}, \vec{\alpha}'') = 0$.

13.6. Teoremă. O suprafaţă $\mathbb{M}$ este minimală dacă şi numai dacă în fiecare punct al său există două direcţii asimptotice ortogonale.

Demonstraţie. $H(P) = 0 \Leftrightarrow k_1(P) = -k_2(P) \Leftrightarrow$ (1) P este planar (şi criteriul este banal) sau (2) $K(P) < 0$ cu $\theta = \pm\frac{\pi}{4}$ ceea ce înseamnă că cele două direcţii asimptotice sînt ortogonale.

13.7. Teoremă. Dacă $\mathbb{M}$ este o suprafaţă riglată, atunci $K \leqslant 0$. Suprafaţa riglată $\mathbb{M}$ este local euclidiană ($K = 0$) dacă şi numai dacă $\vec{U}$ este paralel de-a lungul fiecărei generatoare a lui $\mathbb{M}$ (de-a lungul generatoarei avem acelaşi plan tangent).

Demonstrație. O dreaptă $\vec{\alpha} = \vec{a} + t\vec{b}$ situată pe o suprafață este o curbă asimptotică deoarece $\vec{\alpha}'' = \vec{0}$ este un vector tangent la $\mathbb{M}$. Prin definiție, prin fiecare punct al unei suprafețe riglate trece o dreaptă care este conținută în suprafață. Astfel în fiecare punct avem cel puțin o direcție asimptotică și în baza teoremei 13.3 rezultă $K \leqslant 0$.

Fie α o generatoare oarecare a lui $\mathbb{M}$. Dacă $\vec{U}$ este paralel de-a lungul lui α, atunci $S(\vec{\alpha}') = -\vec{U}' = \vec{0}$. Astfel α este o curbă principală cu curbura normală $k_n(\vec{\alpha}') = 0$ și deci $K = k_1 k_2 = 0$. Invers, dacă $K = 0$, din cazul (3) al teoremei 13.3 rezultă că direcțiile asimptotice (și curbele) din $\mathbb{M}$ sînt și principale. Astfel fiecare generatoare α este atît o curbă principală, adică

$$S(\vec{\alpha}') = k_n(\vec{\alpha}')\vec{\alpha}',$$

cît și o curbă asimptotică, adică $k_n(\vec{\alpha}') = 0$.

Rezultă

$$\vec{U}' = -S(\vec{\alpha}') = \vec{0}.$$

Geodezice

13.8. *Definiție. O curbă regulată α din $\mathbb{M}$ se numește geodezică a lui $\mathbb{M}$ dacă accelerația sa $\vec{\alpha}''$ este normală la $\mathbb{M}$.*

Deoarece $\vec{\alpha}''$ este normală lui $\mathbb{M}$, un observator din $\mathbb{M}$ nu sesizează nici o accelerație de-a lungul lui α, adică pentru un astfel de observator geodezica α este ca linia dreaptă pentru un observator din spațiu. Se poate demonstra că arcul de curbă care dă minimul distanței între două puncte pe o suprafață este o geodezică (și reciproc).

Fie α o geodezică a lui $\mathbb{M}$. Deoarece $\vec{\alpha}''$ este normală la $\mathbb{M}$, în particular avem

$$(\vec{\alpha}'', \vec{\alpha}') = 0 \Rightarrow (\vec{\alpha}', \vec{\alpha}') = \text{const.}$$

și deci viteza unei geodezice este constantă.

Deși definiția geodezicei unei suprafețe este independentă de aplicația Weingarten, totuși între elementele Frenet atașate unei geodezice și aplicația Weingarten există o strînsă legătură. Pentru a pune în evidență acest lucru, fie α o geodezică cu viteza unu. Deoarece $\vec{N} = \dfrac{\vec{\alpha}''}{k}$ este un vector normal la $\mathbb{M}$, avem

$$-\vec{N}' = S(\vec{\alpha}') = S(\vec{T})$$

și în baza formulelor Frenet găsim

$$S(\vec{T}) = k\vec{T} - \tau\vec{B}.$$

§14. Aria unei porțiuni de suprafață

Fie σ o porțiune dintr-o suprafață $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^3$ reprezentată de imaginea funcției $r : \mathbb{D}_0 \to \mathbb{M}$, adică $\sigma = r(\mathbb{D}_0)$, unde $\mathbb{D}_0$ este un dreptunghi închis, iar $r : \mathbb{D} \to \mathbb{M}$, $\mathbb{D} = \text{int.}\, \mathbb{D}_0$ este o hartă. Dorim să definim aria lui $\sigma = r(\mathbb{D}_0)$.

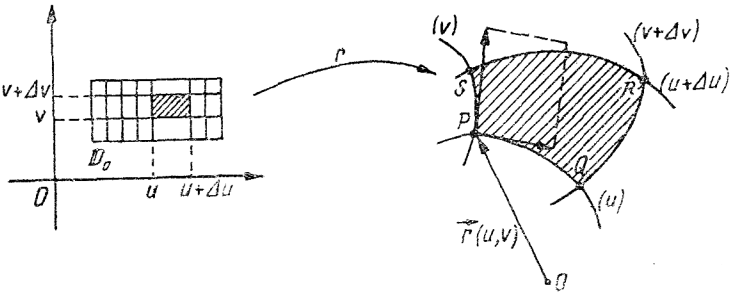


Fig. 140

Fie $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in \mathbb{D}_0$, ecuaţia vectorială a lui $r(\mathbb{D}_0) = \sigma$. Liniile de coordonate împart pe σ în patrulatere curbilinii. Dintre acestea alegem pe cel mărginit de curbele (u), (v), $(u + \Delta u)$, $(v + \Delta v)$, figura 140.

Aria patrulaterului curbiliniu $PQRS$ se aproximează cu aria paralelogramului rectiliniu construit în planul tangent $T_P\mathbb{M}$ pe vectorii $\vec{r}_u\Delta u$ şi $\vec{r}_v\Delta v$. Astfel

$$\text{Aria } PQRS = \|\vec{r}_u\Delta u \times \vec{r}_v\Delta v\| = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|\Delta u\Delta v$$

şi

$$\text{Aria } \sigma = \sum \text{Aria } PQRS = \sum \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| \, \Delta u\Delta v.$$

Aceste observaţii ne permit să spunem că simbolul

$$\mathrm{d}\sigma = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = \sqrt{\vec{r}_u^2\vec{r}_v^2 - (\vec{r}_u, \vec{r}_v)^2} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = \sqrt{EG - F^2} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$$

este elementul de arie al porţiunii σ. Aria lui σ se defineşte ca fiind integrala

$$A = \iint_\sigma \mathrm{d}\sigma = \iint_{\mathbb{D}_0} \sqrt{EG - F^2} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v.$$

Dacă σ este dată cartezian explicit prin $z = f(x, y)$, atunci

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \quad \text{şi} \quad A = \iint_{\mathbb{D}_0} \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Fie $\mathbb{M}$ o suprafaţă şi $\sigma_i \subset \mathbb{M}$ un număr finit de imagini de tipul $r_i(\mathbb{D}_{0i})$ care nu au în comun decît frontierele $\partial\sigma_i$ (fig. 141).

Prin definiţie avem

$$\text{Aria } (\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \ldots \cup \sigma_k) = \sum_k \iint_{\sigma_k} \mathrm{d}\sigma \cdot$$

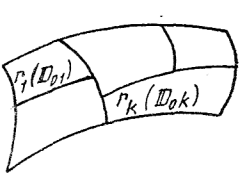


Fig. 141

14.1. Exemple

1) Fie σ sfera de rază R. Ea poate fi privită ca fiind imaginea lui $\mathbb{D}: 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ prin

$$\begin{cases} x = R \sin \varphi \cos \theta \\ y = R \sin \varphi \sin \theta \\ z = R \cos \varphi \end{cases}$$

și $\sqrt{EG - F^2} = R^2 \sin \varphi$. Astfel $A = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} R^2 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta = 4\pi R^2$.

2) Fie torul de raze $R > r > 0$:

$$\begin{cases} x = (R + r \cos u) \cos v \\ y = (R + r \cos u) \sin v \\ z = r \sin u, \ (u, v) \in [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]. \end{cases}$$

Să se arate că

$$A = 4\pi^2 R r.$$

§15. Subvarietăți ale lui $\mathbb{R}^n$

Fie $\mathbb{R}^n$ spațiul euclidian canonic cu n dimensiuni.

15.1. Fie $m \leqslant n$ două numere naturale. Incluziunea canonică $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$ este $(x_1, \ldots, x_m) \to (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$. Uneori se scrie $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$.

O submulțime $\mathbb{M}$ a lui $\mathbb{R}^n$ se numește *subvarietate de dimensiune m* dacă satisface una dintre următoarele condiții (echivalente):

(1) pentru $\forall x \in \mathbb{M}$ există o mulțime deschisă $\mathbb{D}$ din $\mathbb{R}^n$ care conține pe x și un difeomorfism $f: \mathbb{D} \to f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{R}^n$ astfel încît $f(\mathbb{D} \cap \mathbb{M}) = f(\mathbb{D}) \cap \mathbb{R}^m$;

(2) pentru $\forall x \in \mathbb{M}$ există o mulțime deschisă $\mathbb{D}$ din $\mathbb{R}^n$ care conține pe x și $n - m$ funcții diferențiabile $f_i: \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ astfel încît vectorii grad $f_i(x)$ să fie liniar independenți și

$$\mathbb{M} \cap \mathbb{D} = \{x \mid x \in \mathbb{D}, f_1(x) = 0, \ldots, f_{n-m}(x) = 0\};$$

(3) pentru $\forall x \in \mathbb{M}$ există o mulțime deschisă $\mathbb{D}$ din $\mathbb{R}^n$ care conține pe x și o submersie $f: \mathbb{D} \to \mathbb{R}^{n-m}$ astfel încît $\mathbb{M} \cap \mathbb{D} = \{x \mid x \in \mathbb{D}, f(x) = 0\}$;

(4) pentru $\forall x \in \mathbb{M}$ există o mulțime deschisă $\mathbb{D}$ din $\mathbb{R}^n$ care conține pe $x = (x_1, \ldots, x_n)$, o mulțime deschisă $\mathbb{E}$ din $\mathbb{R}^m$ care conține pe $(x_1, \ldots, x_m)$ și $n - m$ funcții diferențiabile $h_i: \mathbb{E} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n - m$, astfel încît, abstracție făcînd eventual de o permutare a coordonatelor, $\mathbb{M} \cap \mathbb{D}$ să fie graficul aplicației $(h_1, \ldots, h_{n-m}): \mathbb{E} \to \mathbb{R}^{n-m}$;

(5) pentru $\forall x \in \mathbb{M}$ există o mulțime deschisă $\mathbb{D}$ din $\mathbb{R}^n$ care conține pe x, o mulțime deschisă $\mathbb{E}$ din $\mathbb{R}^m$ și o imersie injectivă $g: \mathbb{E} \to \mathbb{R}^n$ cu imaginea $\mathbb{M} \cap \mathbb{D}$ și cu inversa $g^{-1}: \mathbb{M} \cap \mathbb{D} \to \mathbb{E}$ continuă.

Dacă în fiecare dintre aceste definiții utilizăm funcții de clasă C^p, atunci $\mathbb{M}$ se numește *subvarietate de clasă* C^p.

Numărul natural $n - m$ se numește *codimensiunea* lui $\mathbb{M}$.

15.2. Subvarietățile de dimensiune 0 sînt mulțimile de puncte izolate din $\mathbb{R}^n$. Subvarietățile de dimensiune 1 se numesc *curbe*, iar subvarietățile de dimensiune 2 se numesc *suprafețe*.

Subvarietățile de codimensiune 0 sînt mulțimile deschise din $\mathbb{R}^n$. Subvarietățile de codimensiune 1 se numesc *hipersuprafețe*.

15.3. Fie $\mathbb{M}$ o subvarietate a lui $\mathbb{R}^n$ de dimensiune m. O funcție diferențiabilă $h : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^n$ cu proprietățile

1) $\mathbb{D}$ este o mulțime deschisă din $\mathbb{R}^m$,
2) $h(\mathbb{D}) \subset \mathbb{M}$,
3) h este o imersie injectivă,

se numește *hartă* în $\mathbb{M}$.

Dacă h este numai imersie, atunci h se numește *parametrizare* a regiunii $h(\mathbb{D})$ din $\mathbb{M}$. Conform lui 15.1.(5) orice punct $x \in \mathbb{M}$ admite hărți $h : \mathbb{D} \to \mathbb{M}$ astfel încît $x \in h(\mathbb{D})$.

15.4. Fie $\mathbb{M}$ o subvarietate a lui $\mathbb{R}^n$. Un vector v din $\mathbb{R}^n$ se zice *tangent* în x la $\mathbb{M}$ dacă există o curbă din $\mathbb{M}$ (o aplicație diferențiabilă $\alpha : I \to \mathbb{M}$, I=interval deschis din $\mathbb{R}$) pentru care $\alpha(t_0) = x$, $\alpha'(t_0) = v$, $t_0 \in I$.

Mulțimea vectorilor din $\mathbb{R}^n$ tangenți la $\mathbb{M}$ în x este un subspațiu vectorial al lui $\mathbb{R}^n$ de dimensiune m, numit *spațiul tangent* la $\mathbb{M}$ în x și notat cu $\mathrm{T}_x \mathbb{M}$.

Mulțimea $\mathrm{T}\mathbb{M} = \bigcup_{x \in \mathbb{M}} \mathrm{T}_x \mathbb{M}$ se numește *fibrarea tangentă* a lui $\mathbb{M}$. Aceasta este o subvarietate a lui $\mathbb{R}^{2n}$ de dimensiune $2m$.

15.5. Fie $\mathbb{M}$ o subvarietate a lui $\mathbb{R}^n$ și $\alpha : I \to \mathbb{M}$ o curbă din $\mathbb{M}$. Restricția $\alpha : [a, b] \to \mathbb{M}$, $[a, b] \subset I$, se numește *segment de curbă* în $\mathbb{M}$.

O subvarietate $\mathbb{M}$ de clasă C^p, $p \geqslant 1$, se numește *conexă* dacă $\forall\, x, y \in \mathbb{M}$ există un segment de curbă în $\mathbb{M}$ care unește pe x cu y.

15.6. O submulțime $\mathbb{M}$ a lui $\mathbb{R}^n$ se numește subvarietate *de dimensiune m, cu frontieră*, dacă pentru $\forall x \in \mathbb{M}$ există o mulțime deschisă $\mathbb{D}$ din $\mathbb{R}^n$ care conține pe x și un difeomor, fism $f : \mathbb{D} \to f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{R}^n$ astfel încît

$$f(\mathbb{D} \cap \mathbb{M}) = f(\mathbb{D}) \cap (H^m \times \{c\}),$$

unde $H^m = \{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m,\ x_m \geqslant a\}$ și $c \in \mathbb{R}^{n-m}$.

Mulțimea $\partial\mathbb{M} = \{x \mid x \in \mathbb{M},\ f(x) \in \mathbb{R}^{m-1} \times \{a\} \times \{c\}\}$, numită *frontiera* lui $\mathbb{M}$, este o subvarietate de dimensiune $m - 1$. Mulțimea $\mathbb{M} - \partial\mathbb{M}$, numită *interiorul* lui $\mathbb{M}$, este o subvarietate de dimensiune m.

Spațiul tangent $\mathrm{T}_x \mathbb{M}$ se definește ca și pentru o varietate fără frontieră.

15.7. *Hipersuprafețe cu frontieră.* Fie $\widetilde{\mathbb{M}}$ o hipersuprafață în $\mathbb{R}^n$. O *hipersuprafață cu frontieră* în $\mathbb{R}^n$ poate fi definită astfel

$$\mathbb{M} = \{x \in \widetilde{\mathbb{M}} \mid g_1(x) \leqslant c_1, \ldots, g_k(x) \leqslant c_k\}, \text{ unde } g_1, \ldots, g_k : \widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{R}$$

sînt funcții diferențiabile cu proprietățile $g_i^{-1}(c_i) \cap g_j^{-1}(c_j) = \emptyset$, $\forall\, i \neq j$ și $\operatorname{grad} g_i(x) \neq 0$, $\forall\, x \in g_i^{-1}(c_i)$. Frontiera lui $\mathbb{M}$ este $\partial\mathbb{M} = \bigcup_{i=1}^{k} g_i^{-1}(c_i) \cap \mathbb{M}$.

Dacă hipersuprafața $\widetilde{\mathbb{M}}$ este caracterizată prin ecuația $f(x) = 0$ ($\operatorname{grad} f(x) \neq 0$, $\forall\, x \in \widetilde{\mathbb{M}}$), atunci $\mathbb{M} = f^{-1}(c) \cap \bigcap_{i=1}^{k} g_i^{-1}(-\infty, c_i])$ și $\mathrm{T}_x \mathbb{M} = \{v \in \mathrm{T}_x \mathbb{R}^n \mid (v, \nabla f(x)) = 0\}$. Un vector

$v \in T_x \mathbb{M}$, $x \in \partial \mathbb{M} \subset \mathbb{M}$ (adică $x \in g_i^{-1}(c_i)$ pentru anumiți i) se numește

1) *orientat către exterior* dacă $(v, \nabla g_i(x)) > 0$,
2) *orientat către interior* dacă $(v, \nabla g_i(x)) < 0$,
3) *tangent la frontieră* dacă $(v, \nabla g_i(x)) = 0$,
4) *normal la frontieră* dacă $(v, w) = 0$, $\forall\, w \in T_x \mathbb{M} \cap T_x \partial \mathbb{M}$.

15.8. Fie $\mathbb{M}$ o hipersuprafață a lui $\mathbb{R}^n$ cu sau fără frontieră. Un cîmp vectorial normal unitate U pe $\mathbb{M}$ se numește orientare a lui $\mathbb{M}$.

Noțiunea generală de orientare va fi dată în capitolul 4, § 7.

§16. Probleme

1. Fie funcția $r : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^3$, dată prin $r(u, v) = (\cos 2\pi u, \sin 2\pi u, v)$. Să se arate că r este o hartă proprie și că $r(\mathbb{D})$ este suprafața $\mathbb{M} : x^2 + y^2 = 1$, $-1 < x < 1$, $y > 0$, $z \in \mathbb{R}$.

2. Fie imersia $r : x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = a \ln(u + \sqrt{u^2 - a^2})$, $a > 0$, $u \in [a, \infty)$, $v \in \mathbb{R}$. Să se determine curbele de pe suprafața $r([a, \infty) \times \mathbb{R})$ care intersectează curbele $v = v_0$ sub un unghi constant.

3. Să se determine ecuațiile carteziene implicite ale suprafețelor cilindrice ale căror curbe directoare sînt

1) $x^2 + y^2 - 3x + 2y - 1 = 0$, $z = 0$,

2) $x^2 - x + 2y - 1 = 0$, $z = 0$,

ale căror generatoare sînt perpendicula re respectiv pe planele curbelor directoare.

4. Se consideră funcția $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $r(u, v) = (1 + uv,\ u + u^2 v,\ u^2 + u^3 v)$.

1) Să se arate că $r(\mathbb{R}^2)$ este o „suprafață conică";
2) Să se găsească ecuația carteziană a lui $r(\mathbb{R}^2)$.

5. O suprafață care admite simultan parametrizările $\vec{r}(u, v) = \vec{\alpha}(u) + v\vec{\beta}(u)$ și $\vec{r}(u, v) = \vec{\gamma}(v) + u\vec{\delta}(v)$ se numește *dublu riglată*.

1) Să se arate că orice suprafață dublu riglată este o cuadrică;
2) Se consideră harta r definită prin $x = a\left(u + \dfrac{1}{v}\right)$, $y = b\left(u - \dfrac{1}{v}\right)$, $z = \dfrac{2u}{v}$, $u \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R} - \{0\}$. Să se arate că imaginea $r(\mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{0\}))$ este o suprafață dublu riglată. Să se determine curbele coordonate ale suprafeței și ecuația carteziană a suprafeței.

6. Suprafața generată prin rotirea unui cerc în jurul unei axe conținută în planul cercului (care nu intersectează cercul) se numește tor.

Alegînd convenabil axele, să se găsească o parametrizare a torului. Apoi să se determine ecuația carteziană implicită.

7. Fie sfera $\mathbb{M} : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ și harta în sferă $r(u, v) = (a \cos u \sin v,\ a \sin u \sin v,\ a \cos v)$, $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, \pi)$. Să se găsească expresiile în coordonate pentru următoarele funcții definite pe $\mathbb{M}$:

1) $f(x, y, z) = x^2 + z^2$; 2) $f(x, y, z) = (y - z)^2 + x^2$.

8. Să se construiască mulțimile de nivel $\mathbb{M} = f^{-1}(c)$, pentru $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ și $c_1 = -1$, $c_2 = 0$, $c_3 = 1$. Pentru fiecare dintre ele să se cerceteze în care puncte spațiul tangent va fi $[\nabla f(P)]^{\perp}$.

9. Fie suprafața $\mathbb{M}: x^\alpha y^\beta z^\gamma = 1$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Planul tangent la $\mathbb{M}$ în punctul (x_0, y_0, z_0) intersectează axele de coordonate respectiv în punctele A, B, C. Să se arate că punctul (x_0, y_0, z_0) este centrul de greutate al „maselor" α, β, γ aplicate respectiv în A, B, C.

10. Fie $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ o mulțime deschisă și conexă, iar $r: \mathbb{D} \to \mathbb{R}^3$ o parametrizare. Să se arate că dacă normala la suprafața $r(\mathbb{D})$ are direcție fixă, atunci suprafața este o parte a unui plan. Să se verifice acest rezultat pentru

1) $r: \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^3$, $r(u, v) = (u^2 + v^2, uv, (u + v)^2)$,

2) $r: \mathbb{R}^2 - \{(u, v)/u > 0, v > 0, u - v > 0, u - 3v > 0\} \to \mathbb{R}^3$,

$$r(u, v) = \left((u - v)^2, u^2 - 3v^2, \frac{v}{2}(u - 2v)\right).$$

11. Să se arate că suprafața Țițeica $\mathbb{M}: xyz - 1 = 0$ nu este conexă.

12. Fie $a > b > 0$ și funcția $r: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definită prin $r(u, v) = ((a + b\cos v)\cos u, (a + b\cos v)\sin u, b\sin v)$.

1) Să se arate că r este o parametrizare a torului, dublu periodică.

2) Să se arate că torul este o suprafață conexă și compactă.

13. Fie $\mathbb{M}$ o suprafață orientată și fie $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ o bază pentru planul tangent $T_P\mathbb{M}$. Să se arate că orientarea bazei $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ este coerentă cu orientarea $\vec{U}$ a lui $\mathbb{M}$ dacă și numai dacă este îndeplinită una dintre următoarele condiții:

1) $(\vec{U}(P), \vec{a} \times \vec{b}) > 0$

2) $\dfrac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} = \mathscr{R}_\theta\left(\dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}\right)$ pentru $0 < \theta < \pi$, unde $\mathscr{R}_\theta$ este rotația pozitivă de unghi θ în $T_P\mathbb{M}$.

14. Fie suprafața $\mathbb{M}: z = f(x, y)$ orientată prin alegerea cîmpului normal unitar

$$\vec{U} = \frac{-f_x\vec{i} - f_y\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.$$

Presupunem că $f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$.

1) Să se arate că $\vec{i}$ și $\vec{j}$ sînt vectori tangenți la $\mathbb{M}$ în $(0, 0, 0)$.

2) Să se arate că

$$S(\vec{i}) = f_{x^2}(0, 0)\vec{i} + f_{xy}(0, 0)\vec{j}$$

$$S(\vec{j}) = f_{xy}(0, 0)\vec{i} + f_{y^2}(0, 0)\vec{j}.$$

15. Fie $\mathbb{M} = f^{-1}(1)$, unde $f(x, y, z) = -x^2 + y^2 + z^2$. Să se orienteze suprafața $\mathbb{M}$. Să se determine curbura normală a suprafeței în punctul $P(0, 0, 1)$, în direcția $\vec{v}$, unde $\vec{v}$ este un vector unitar, $\vec{v} \in T_P\mathbb{M}$. Cazuri particulare:

1) $\vec{v} = \vec{i} = (1, 0, 0)$; 2) $\vec{v} = \vec{j} = (0, 1, 0)$; 3) $\vec{v} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

16. Fie k_1, k_2, curburile principale ale suprafeței S de separație a unui lichid. Presiunea normală p, pe elementul de suprafață, într-un punct oarecare, e dată de ecuația Laplace $\sigma(k_1 + k_2) = p$, unde σ este tensiunea superficială, considerată constantă. Să se afle presiunea

p cînd S este :

1) Suprafața Enneper

$$x = \mathrm{Re}\int(1-t^2)\mathrm{d}t, \quad y = \mathrm{Im}\int(1+t^2)\mathrm{d}t, \quad z = \mathrm{Re}\int 2t\,\mathrm{d}t,$$

$$t = u + \mathrm{i}v, \quad \mathrm{i}^2 = -1.$$

2) Șaua : $z = xy$.

17. Fie suprafețele

1) $\mathbb{M} : z = \mathrm{e}^{x+y} - 1$, 2) $\mathbb{M} : z = \ln\cos x - \ln\cos y$, 3) $\mathbb{M} : z = (x+3y)^3$. Să se determine curburile principale și aproximarea pătratică a suprafeței $\mathbb{M}$ în jurul lui $(0, 0, 0)$.

18. Fie harta Monge $r : x = u,\ y = v,\ z = f(u, v)$. Să se arate că

$$E = 1 + f_u^2,\ F = f_u f_v,\ G = 1 + f_v^2,$$

$$l = \frac{f_{uu}}{W}, \quad m = \frac{f_{uv}}{W}, \quad n = \frac{f_{vv}}{W},$$

unde $W = \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}$.

19. Să se arate că imaginea imersiei (suprafața Enneper) $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $r(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2,\ v - \frac{v^3}{3} + u^2 v,\ u^2 - v^2\right)$, este o suprafață minimală.

20. *Pseudosfera.* Fie $\alpha(u) = (x(u),\ y(u))$ unde $x(u) = \int_0^u \sqrt{1 - \mathrm{e}^{-2t}}\,\mathrm{d}t$, $y(u) = \mathrm{e}^{-u}$, $u > 0$ și fie $\mathbb{M}$ suprafața de rotație obținută prin rotirea lui α în jurul lui Ox. Să se arate că $\mathbb{M}$ are curbura Gauss $K = -1$.

21. O suprafață pentru care $K/d^4 = \text{const.}$, unde K este curbura Gauss pe suprafață, iar d este distanța de la un punct fix la planul tangent într-un punct oarecare al suprafeței, se numește *suprafață Țițeica*. Să se arate că $\mathbb{M} : xyz - 1 = 0$ este o suprafață Țițeica.

22. Fie β o curbă cu viteza unu și curbura $k > 0$. Suprafața riglată $\vec{r}(u, v) = \vec{\beta}(u) + v\,\vec{T}(u)$, $v > 0$, se numește *suprafața tangentă* a lui β. Să se probeze că $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq 0$ și că suprafața tangentă este local euclidiană.

23. Se consideră imersia definită prin $x = \cos u \cos v$, $y = \cos u \sin v$, $z = \sin u - \ln \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right)$, $u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $v \in \mathbb{R}$. Să se determine liniile de curbură și liniile asimptotice ale suprafeței $r\left(\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \mathbb{R}\right)$.

24. Fie P centrul masei punctiforme m, care se mișcă pe o suprafață cu accelerația $\vec{a}$ și fie $\vec{N}$ reacțiunea (normală în P la suprafață). Dacă asupra particulei P nu acționează forțe exterioare, atunci să se arate că P descrie o curbă α, care este o geodezică a suprafeței.

25. 1) Să se afle aria suprafeței $\mathbb{M}$: $(x^2 + y^2 - 4)^2 + (z - 4)^2 = 1$.

2) Să se arate că aria suprafeței $\mathbb{M}$: $y^2 + z^2 - x^2 = 0$, $x^2 + y^2 \leqslant 1$ este $A = \pi\sqrt{2}$.

26. Să se găsească aria benzii Möbius: $x = \cos u + v \cos u \cos \frac{u}{2}$, $y = \sin u + v \sin u \cos \frac{u}{2}$, $z = \sin \frac{u}{2}$, $u \in [0, 2\pi]$, $v \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

27. Mulțimea matricelor pătratice reale de ordinul n, cu determinantul 1, este un grup în raport cu înmulțirea, numit *grupul liniar special* $SL(n, \mathbb{R})$. Identificăm pe $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ cu $\mathbb{R}^{n^2}$.

1) Să se arate că $SL(2, \mathbb{R})$ este o hipersuprafață a lui $\mathbb{R}^4$. Să se determine $T_{x_0}SL(2, \mathbb{R})$, unde

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2) Să se arate că $SL(3, \mathbb{R})$ este o hipersuprafață a lui $\mathbb{R}^9$. Să se determine $T_{x_0}SL(3, \mathbb{R})$, unde

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3) Să se arate că $SL(n, \mathbb{R})$ este o hipersuprafață a lui $\mathbb{R}^{n^2}$. Să se determine $T_{x_0}SL(n, \mathbb{R})$ pentru $x_0 = I$ (matricea unitate de ordinul n).

28. (Fibrarea tangentă). Fie $\mathbb{M}$ o hipersuprafață a lui $\mathbb{R}^n$ orientată prin U. Să se arate că

$$T\mathbb{M} = \{(x, v) \mid x \in \mathbb{M},\ (v, U) = 0\}$$

este o subvarietate de dimensiune $2n - 2$ în $\mathbb{R}^{2n}$.

29. (Fibrarea sferică). Fie $\mathbb{M}$ o hipersuprafață a lui $\mathbb{R}^n$ orientată prin U. Să se arate că

$$T^1\mathbb{M} = \{(x, v) \mid x \in \mathbb{M},\ (v, U) = 0,\ (v, v) = 1\}$$

este o varietate cu $2n - 3$ dimensiuni în $\mathbb{R}^{2n}$.

30. Să se verifice că semisfera

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \mid (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,\ x_3 \geqslant 0\}$$

este o suprafață cu frontieră în $\mathbb{R}^3$.

Fie $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ un punct de pe frontieră. Să se scrie ecuația planului tangent la S în acest punct și apoi să se expliciteze un vector tangent la S orientat către exterior, unul orientat către interior, unul tangent și unul normal la frontieră.

Capitolul 4

ALGEBRĂ ŞI ANALIZĂ TENSORIALĂ

§1. Tensori

Fie V un spaţiu vectorial real de dimensiune n. O transformare liniară $\omega : V \to \mathbb{R}$ (cîmpul $\mathbb{R}$ este considerat ca spaţiu vectorial aritmetic cu o dimensiune peste $\mathbb{R}$) se numeşte 1-*formă*. Spaţiul vectorial $\mathscr{L}(V, \mathbb{R})$ al tuturor 1-formelor definite pe V şi cu valori în $\mathbb{R}$ se numeşte *dualul* lui V şi se notează cu V^*. Spaţiul vectorial V^* are dimensiunea n. Dualul lui $V^* = \mathscr{L}(V, \mathbb{R})$, adică V^{**}, se identifică cu V în baza izomorfismului descris mai jos.

Elementele lui V vor fi notate cu $v_1, v_2, \ldots$, iar elementele lui V^* cu $\omega^1, \omega^2, \ldots$

Fie v un vector din V şi ω un vector din V^*. Dacă fixăm pe v, atunci funcţia $f_v : V^* \to \mathbb{R}$, $f_v(\omega) = \omega(v)$ este o 1-formă pe V^* şi deci un element din V^{**}. Într-adevăr, $\forall\, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, $\forall \omega^1, \omega^2 \in V^*$, găsim

$$f_v(k_1\omega^1 + k_2\omega^2) = (k_1\omega^1 + k_2\omega^2)(v) = k_1\omega^1(v) + k_2\omega^2(v) =$$

$$= k_1 f_v(\omega^1) + k_2 f_v(\omega^2).$$

Fiecărui vector $v \in V$ i se poate ataşa 1-forma f_v din V^{**}. Să arătăm că funcţia $v \to f_v$ este un izomorfism de la V la V^{**}. Mai întîi observăm că este o transformare liniară,

$$f_{k_1v_1 + k_2v_2}(\omega) = \omega(k_1v_1 + k_2v_2) = k_1\omega(v_1) + k_2\omega(v_2) =$$

$$= k_1 f_{v_1}(\omega) + k_2 f_{v_2}(\omega) \Rightarrow f_{k_1v_1 + k_2v_2} = k_1 f_{v_1} + k_2 f_{v_2}.$$

De asemenea se observă că $f_v = 0 \Leftrightarrow v = 0$, iar $\dim V = \dim V^* = \dim V^{**}$. Astfel funcţia $v \to f_v$ este o bijecţie şi deci un izomorfism de la V la V^{**}. În consecinţă, dacă f este o 1-formă pe V^*, atunci există un vector unic $v \in V$ astfel încît $f(\omega) = \omega(v)$, $\forall \omega \in V^*$.

Deoarece $v \to f_v$ este un izomorfism canonic de la V la V^{**} se obişnuieşte ca f_v să se identifice cu v şi deci V^{**} să se identifice cu V. În acest sens spunem că V este dualul lui V^* sau că V, V^* sînt duale unul altuia.

1.1. *Definiţie. Un tensor de tipul (p, q) pe V, unde $p, q \in \mathbb{N}$, este o funcţie*

$$T : \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{p \text{ factori}} \times \underbrace{V \times \ldots \times V}_{q \text{ factori}} \to \mathbb{R},$$

$$(\omega^1, \ldots, \omega^p, v_1, \ldots, v_q) \to T(\omega^1, \ldots, \omega^p, v_1, \ldots, v_q)$$

liniară în fiecare argument (multiliniară). Numărul p se numeşte ordin de contravarianţă, q se numeşte ordin de covarianţă, iar $p + q$ se numeşte ordinul tensorului.

Mulțimea tuturor tensorilor de tipul (p, q) pe V se notează cu $\mathcal{T}^p_q(V)$ și este un spațiu vectorial real de dimensiune n^{p+q}(pentru dimensiune vezi teorema 1.3). Tensorul *zero* din $\mathcal{T}^p_q(V)$ se definește prin $0(\omega^1, \ldots, \omega^p, v_1, \ldots, v_q) = 0$, $\forall\, \omega^1, \ldots, \omega^p \in V^*$, $\forall\, v_1, \ldots, v_q \in V$. Evident $\mathcal{T}^0_1(V) = V^*$ și se acceptă identificările $\mathcal{T}^0_0(V) = \mathbb{R}$, $\mathcal{T}^1_0(V) = V$, adică tensorii de ordinul zero sînt numere reale, iar tensorii de ordinul unu sînt vectori contravarianți (elementele lui V) sau vectorii covarianți (1-forme, elementele lui V^*).

Identificarea $\mathcal{T}^1_0(V) = V$ impune definiția $v(\omega) = \omega(v)$, $v \in V$, $\omega \in V^*$.

1.2. *Definiție. Fie* $\mathcal{T}^p_q(V)$, $\mathcal{T}^r_s(V)$ *și* $\mathcal{T}^{p+r}_{q+s}(V)$. *Funcția*

$$\otimes : \mathcal{T}^p_q(V) \times \mathcal{T}^r_s(V) \to \mathcal{T}^{p+r}_{q+s}(V)$$

definită prin

$S \otimes T(\omega^1, \ldots, \omega^{p+r}, v_1, \ldots, v_{q+s}) = S(\omega^1, \ldots, \omega^p, v_1, \ldots, v_q)\, T(\omega^{p+1}, \ldots, \omega^{p+r}, v_{q+1}, \ldots, v_{q+s})$ *se numește produs tensorial.*

Se observă că produsul tensorial este o aplicație biliniară și asociativă, adică

$$(k_1S_1 + k_2S_2) \otimes T = k_1S_1 \otimes T + k_2S_2 \otimes T,$$

$$S \otimes (k_1T_1 + k_2T_2) = k_1S \otimes T_1 + k_2S \otimes T_2,\ k_1, k_2 \in \mathbb{R},$$

$$S \otimes (T \otimes R) = (S \otimes T) \otimes R.$$

Asociativitatea permite extinderea definiției produsului tensorial la un număr finit de factori.

Fie $\{e_i, i = 1, \ldots, n\}$ o bază a lui V. Orice vector contravariant $v \in V$ se poate scrie în forma $v = v^i e_i$ (*convenția Einstein de însumare*) numerele reale v^i, $i = 1, \ldots, n$ numindu-se *coordonatele* lui v.

Fie $\delta^j_i = \begin{cases} 1 \text{ pentru } i = j \\ 0 \text{ pentru } i \neq j \end{cases}$ *simbolul lui Kronecker.* Mulțimea $\{e^j, j = 1, \ldots, n\}$ ale cărei elemente sînt definite prin

$$e^j(e_i) = \delta^j_i,\ i, j = 1, \ldots, n$$

este o bază în spațiul n-dimensional V^*. Într-adevăr, ecuația $\sum_{j=1}^{n} \omega_j e^j = 0$ implică $\sum_{j=1}^{n} \omega_j e^j(e_i) = 0$, adică $\omega_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$, și deci $\{e^j, j = 1, \ldots, n\}$ este liniar independentă. Orice vector covariant $\omega \in V^*$ se scrie în forma $\omega = \omega_j e^j$ (convenția Einstein de însumare), numerele reale ω_j, $j = 1, \ldots, n$, numindu-se *coordonatele* lui ω.

Baza $\{e^j, j = 1, \ldots, n\}$ a lui V^* definită prin $e^j(e_i) = \delta^j_i$, $i, j = 1, \ldots, n$, se numește *bază duală*. Avînd în vedere identificarea lui V^{**} cu V bazele $\{e_i, i = 1, \ldots, n\}$ și $\{e^j, j = 1, \ldots, n\}$ sînt duale una alteia.

1.3. Teoremă. Dacă $\{e_i, i = 1, \ldots, n\}$ este o bază a lui V, iar $\{e^j, j = 1, \ldots, n\}$ este baza duală în V^*, atunci mulțimea

$$\{e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q},\ i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q = 1, \ldots, n\}$$

este o bază a lui $\mathcal{T}^p_q(V)$, numită baza produs. Deci $\dim \mathcal{T}^p_q(V) = n^{p+q}$.

Demonstrație. Mulțimea din teoremă este liniar independentă. Într-adevăr, relația

$$T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\, e_{i_1}\otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q} = 0 \text{ (tensorul zero)}$$

scrisă cu convenția Einstein de însumare, implică

$$0 = T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\, e_{i_1}\otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q}(e^{k_1}, \ldots, e^{k_p}, e_{l_1}, \ldots, e_{l_q}) =$$

$$= T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\, e_{i_1}(e^{k_1}) \ldots e_{i_p}(e^{k_p}) e^{j_1}(e_{l_1}) \ldots e^{j_q}(e_{l_q}) =$$

$$= T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\, \delta^{k_1}_{i_1} \ldots \delta^{k_p}_{i_p}\, \delta^{j_1}_{l_1} \ldots \delta^{j_q}_{l_p} = T^{k_1\ldots k_p}_{l_1\ldots l_q},\ k_1, \ldots, k_p, l_1, \ldots, l_q = 1, \ldots n.$$

Să arătăm că mulțimea din teoremă generează pe $\mathcal{T}^p_q(V)$. Pentru aceasta fie $T \in \mathcal{T}^p_q(V)$ și numerele reale $T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = T(e^{i_1}, \ldots, e^{i_p}, e_{j_1}, \ldots, e_{j_q})$. Găsim $T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\, e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q}(e^{k_1}, \ldots, e^{k_p}, e_{l_1}, \ldots, e_{l_q}) = T(e^{k_1}, \ldots, e^{k_p}, e_{l_1}, \ldots, e_{l_q})$. Deoarece T este multiliniar, iar $\{e_i\}$, $\{e^j\}$ sînt baze duale, ultima relație implică

$$T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\, e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q}(\omega^1, \ldots, \omega^p, v_1, \ldots, v_q) =$$

$$= T(\omega^1, \ldots, \omega^p, v_1, \ldots, v_q),\ \forall\, \omega^1, \ldots, \omega^p \in V^*,\ \forall\, v_1, \ldots, v_q \in V. \text{ Deci}$$

$$T = T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\, e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q},$$

unde numerele reale

$$T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = T(e^{i_1}, \ldots, e^{i_p}, e_{j_1}, \ldots, e_{j_q})$$

sînt *coordonatele tensorului* T în raport cu baza produs.

Fie $S^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ coordonatele lui S, fie $T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ coordonatele lui T și fie $k \in \mathbb{R}$. Coordonatele tensorilor kS, $S + T$ și $S \otimes T$ sînt respectiv

$$kS^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q},\ S^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} + T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q},\ S^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\ T^{k_1\ldots k_p}_{l_1\ldots l_q}$$

Fie $\{e_i, i = 1, \ldots, n\}$ și $\{e_{i'}, i' = 1', \ldots, n'\}$ două baze în V și $\{e^j, j = 1, \ldots, n\}$, $\{e^{j'}, j' = 1', \ldots, n'\}$ respectiv bazele duale în V^*. Schimbarea bazelor este descrisă de relațiile

$$e_{i'} = A^i_{i'} e_i, \quad e^{i'} = A^{i'}_i e^i,$$

unde

$$A^{i'}_i A^i_{j'} = \delta^{i'}_{j'}, \quad A^i_{i'} A^{i'}_j = \delta^i_j.$$

Corespunzător,

$$e_{i'_1} \otimes \ldots \otimes e_{i'_p} \otimes e^{j'_1} \otimes \ldots \otimes e^{j'_q} = A^{i_1}_{i'_1} \ldots A^{i_p}_{i'_p} A^{j'_1}_{j_1} \ldots A^{j'_q}_{j_q} e_{i_1} \otimes$$

$$\otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q}.$$

Aceasta implică

$$v^{i'} = A^{i'}_{i} v^{i}, \quad \omega_{j'} = A^{j}_{j'} \omega_{j}$$

şi în general

$$T^{i'_1 \dots i'_p}_{j'_1 \dots j'_q} = A^{i'_1}_{i_1} \dots A^{i'_p}_{i_p} A^{j_1}_{j'_1} \dots A^{j_q}_{j'_q} T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}.$$

Aceasta din urmă poartă numele de *regula de schimbare a coordonatelor unui tensor la o schimbare a bazei*. Se observă că schimbarea pentru indicii de covarianţă se face cu ajutorul elementelor matricei $A = [A^{i}_{i'}]$ în timp ce schimbarea pentru indicii de contravarianţă se face cu ajutorul matricei $A^{-1} = [A^{i'}_{i}]$.

Fie $\omega : V \times \dots \times V \to \mathbb{R}$, $(v_1, \dots, v_q) \to \omega(v_1, \dots, v_q)$, un tensor de tipul $(0, q)$. Acesta se numeşte

1) *simetric* dacă valoarea sa rămîne aceeaşi pentru toate permutările posibile ale argumentelor,

2) *antisimetric* dacă valoarea sa după orice permutare a argumentelor este produsul dintre valoarea înainte de permutare şi semnul permutării.

1.4. *Definiţie. Fie* $p > 0, q > 0$, $s = 1, \dots, p$; $t = 1, \dots, q$. *Aplicaţia*

$$\mathrm{tr}^{i}_{j} : \mathcal{T}^{p}_{q}(V) \to \mathcal{T}^{p-1}_{q-1}(V)$$

definită prin

$$(\mathrm{tr}^{i}_{j} T)(\omega^1, \dots, \omega^{p-1}, v_1, \dots, v_{q-1}) = \sum_{k=1}^{n} T(\omega^1, \dots, \omega^{s-1}, e^k, \omega^s, \dots, \omega^{p-1},$$

$$v_1, \dots, v_{t-1}, e_k, v_t, \dots, v_{q-1}),$$

unde $\{e_i\}$ *este baza lui* V, *iar* $\{e^j\}$ *este baza duală din* V^*, *se numeşte contracţie.*

Pe coordonate contracţia acţionează astfel

$$(\mathrm{tr}^{i}_{j}\, T)^{i_1 \dots i_{p-1}}_{j_1 \dots j_{q-1}} = \sum_{k=1} T^{i_1 \dots i_{s-1} k i_s \dots i_{p-1}}_{j_1 \dots j_{t-1} k j_t \dots j_{q-1}}.$$

Exemple. 1) Dacă T^{i}_{j} sînt coordonatele unui tensor mixt de ordinul doi, atunci $T^{i}_{i} = T^{1}_{1} + \dots + T^{n}_{n}$ este un tensor de ordinul zero (număr real). Evident T^{i}_{i} este urma matricei ale cărei elemente sînt coordonatele T^{i}_{j}.

2) Fie T^{i}_{jk} un tensor de tipul (1, 2). Contractînd pe i cu j obţinem vectorul covariant T^{i}_{ik}; contractînd pe i cu k obţinem vectorul covariant T^{i}_{ji}.

În final presupunem că V este un spaţiu euclidian. Produsul scalar (,) pe V este un tensor covariant de ordinul doi (formă biliniară), simetric şi pozitiv definit. Acesta se numeşte *metrica riemanniană* pe V. Metrica induce transformarea liniară nesingulară (izomorfism) $\mathcal{G} : V \to V^*$, $\mathcal{G}(u)(v) = (u, v)$, $\forall v \in V$. Fie $\mathcal{G}^{-1}$ inversa lui $\mathcal{G}$; dacă $\omega \in V^*$, atunci $(\mathcal{G}^{-1}\omega, v) = \omega(v)$.

Fie $\{e_i\}$ baza ortonormată în V. Dacă notăm $\mathcal{G}(e_i) = e^i$, $i = 1, \dots, n$ atunci $\mathcal{G}(e_i)(e_j) = (e_i, e_j) = \delta_{ij}$, adică $e^i(e_j) = \delta_{ij} (= \delta^{j}_{i})$. Rezultă că mulţimea $\{e^i\}$ este bază duală în V^*.

Fie $\{e^k \otimes e^l\}$ baza în $\mathcal{T}^0_2(V)$. Metrica riemanniană și transformarea liniară nesingulară asociată $\mathcal{G}$ sînt caracterizate prin matricea $[g_{kl}]$ simetrică și pozitiv definită. Inversa lui $[g_{kl}]$ este o matrice simetrică și se notează cu $[g^{kl}]$; deci $g_{kl}g^{kj} = \delta^j_l$. Dacă v^k este un vector din V, atunci $g_{kl}v^k$ este un vector din V^*; dacă ω_k este un vector din V^*, atunci $g^{kl}\omega_k$ este un vector din V. Acestea se extind prin definițiile care urmează.

1.5. *Definiție. Fie* $s = 1, \ldots, p$; $t = 1, \ldots, q$ *și* $T \in \mathcal{T}^p_q(V)$. *Funcția definită prin*

$$\mathcal{G}_{s,t} : \mathcal{T}^p_q(V) \to \mathcal{T}^{p-1}_{q+1}(V),$$

$$(\mathcal{G}_{s,t}T)(\omega^1, \ldots, \omega^{p-1}, v_1, \ldots, v_{q+1}) = T(\omega^1, \ldots, \omega^{s-1}, \mathcal{G}(v_t), \omega^s, \ldots, \omega^{p-1}, v_1 \ldots, \hat{v}_t, \ldots, v_{q+1}),$$

unde semnul ^ *înseamnă că argumentul respectiv lipsește, se numește coborîrea indicilor.*

Pe coordonate,

$$(\mathcal{G}_{s,t}\, T)^{i_1 \ldots i_{p-1}}_{j_1 \ldots j_{t-1}\, s j_{t+1} \ldots j_{q+1}} = g_{st} T^{i_1 \ldots i_{s-1} t_s \ldots i_{p-1}}_{j_1 \ldots j_{t-1}\, j_{t+1} \ldots j_{q+1}}.$$

Analog, utilizînd pe $\mathcal{G}^{-1}$, se definește ridicarea indicilor.

Izomorfismul $\mathcal{G}$ permite identificarea lui V cu V^*. De asemenea prin intermediul coborîrii și ridicării indicilor el induce un izomorfism între $\mathcal{T}^p_q(V)$ și $\mathcal{T}^q_p(V)$. În acest context vorbim despre coordonatele contravariante, mixte sau covariante (după caz) ale aceluiași tensor. De exemplu,

$$g^{li}g^{nk}\, T_{ik},\ g^{li}\, T_{ik},\ T_{ik}$$

sînt respectiv coordonatele contravariante, mixte și covariante ale tensorului de ordinul doi $T = T_{ik}e^i \otimes e^k$.

§2. Cîmpuri tensoriale

Fie $\mathbb{M}$ o mulțime deschisă din $\mathbb{R}^n$. Mulțimea $\mathcal{F}(\mathbb{M})$ a tuturor funcțiilor reale (cîmpurilor scalare) diferențiabile de clasă C^∞ definite pe $\mathbb{M}$ este un spațiu vectorial real. Deoarece înmulțirea funcțiilor reale este o operație $\mathbb{R}$-biliniară, comutativă, mulțimea $\mathcal{F}(\mathbb{M})$ este o *algebră comutativă*.

Fie $x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{M}$ și $f \in \mathcal{F}(\mathbb{M})$. Unui vector X_x tangent la $\mathbb{M}$ în punctul x i se asociază numărul

$$X_x(f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x + tX)\,|_{t=0}$$

numit *derivata lui f în raport cu* X_x sau *derivata lui f după direcția* X_x. Derivata după o direcție are următoarele proprietăți

$$X_x(af + bg) = aX_x(f) + bX_x(g)$$

$$X_x(fg) = (X_x(f))g(x) + f(x)X_x(g)$$

$$(aX_x + bY_x)(f) = aX_x(f) + bY_x(f),$$

unde X_x, Y_x sînt vectorii tangenți la $\mathbb{M}$ în punctul x, a și $b \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{M})$.

Să privim acum lucrurile dintr-un alt punct de vedere. Se observă că dacă dăm regula $f \to X_x(f)$, atunci X_x este bine determinat. Astfel sîntem conduşi la următoarea definiţie care este potrivită pentru teoria cîmpurilor vectoriale.

2.1. *Definiţie. O funcţie* $X_x : \mathscr{F}(\mathbb{M}) \to \mathbb{R}$ *cu proprietăţile*

$$X_x(af + bg) = aX_x(f) + bX_x(g)$$

$$X_x(fg) = (X_x(f))g(x) + f(x)X_x(g),$$

unde $a, b \in \mathbb{R}, f, g \in \mathscr{F}(\mathbb{M})$, *se numeşte vector tangent la* $\mathbb{M}$ *în punctul* x.

În acest context se observă că funcţia definită prin $O_x(f) = 0$, $\forall f \in \mathscr{F}(\mathbb{M})$, deci *vectorul zero*, ca şi operatorii $\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_x, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_x$ sînt vectori tangenţi la $\mathbb{M}$ în punctul x. De asemenea, dacă $f = g = 1$, atunci $X_x(1) = 2X_x(1)$ şi deci $X_x(1) = 0$. În plus $X_x(c) = cX_x(1) = 0$, pentru orice funcţie constantă c. Identificînd funcţiile constante cu valorile lor putem spune că valorile oricărui vector tangent pentru scalari sînt nule.

Fie $T_x\mathbb{M}$ mulţimea tuturor vectorilor tangenţi la $\mathbb{M}$ în punctul x. Elementele lui $T_x\mathbb{M}$ sînt funcţii reale definite pe $\mathscr{F}(\mathbb{M})$ şi deci are sens suma a doi vectori tangenţi şi produsul dintre un număr real şi un vector tangent. Mai mult, pentru fiecare $x \in \mathbb{M}$, mulţimea $T_x\mathbb{M}$ este un spaţiu vectorial real.

2.2. Teoremă. Mulţimea $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}, i = 1, \ldots, n\right\}_{x_0}$ este o bază a spaţiului vectorial $T_{x_0}\mathbb{M}$ (reper în punctul x_0).

Demonstraţie. Evident $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{x_0}$, $i = 1, \ldots, n$, fac parte din $T_{x_0}\mathbb{M}$. Să arătăm că ei sînt liniar independenţi. Pentru aceasta pornim de la relaţia $a^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{x_0} = 0$ şi folosim funcţiile coordonate $x^j : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$. În baza definiţiei 2.1, a faptului că $T_{x_0}\mathbb{M}$ este un spaţiu vectorial şi a observaţiei $\frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \delta_i^j$ rezultă $0 = a^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{x_0} (x^j) = a^i \left.\frac{\partial x^j}{\partial x^i}\right|_{x_0} = a^i \delta_i^j = a^j, j = 1, \ldots, n$.

A rămas să demonstrăm că $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}, i = 1, \ldots, n\right\}_{x_0}$ generează pe $T_{x_0}\mathbb{M}$. Pentru aceasta observăm că pe o vecinătate convexă a lui x_0 şi pentru orice $f \in \mathscr{F}(\mathbb{M})$ avem

$$f(x) = f(x_0) + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x_0 + t(x - x_0))\,\mathrm{d}t = f(x_0) + \int_0^1 \sum_{i=1}^n \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_{(x_0 + t(x - x_0))} (x^i - x_0^i)\mathrm{d}t =$$

$$= f(x_0) + \sum_{i=1}^n (x^i - x_0^i) g_i(x), \text{ unde } g_i(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0).$$

Conform definiției 2.1 și a observației că valorile lui X_x pe constante sînt nule găsim

$$X_x(f) = \sum_{i=1}^{n} X_x(x^i - x_0^i)g_i(x) + \sum_{i=1}^{n} (x^i - x_0^i)X_x(g_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_x(x^i)g_i(x) + \sum_{i=1}^{n} (x^i - x_0^i)X_x(g_i).$$

Înlocuirea $x = x_0$ implică

$$X_{x_0}(f) = \sum_{i=1}^{n} X_{x_0}(x^i) \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0).$$

Ținînd seama că $f \in \mathscr{F}(\mathbb{M})$ este arbitrară și notînd $X_{x_0}(x^i) = a^i$ deducem

$$X_{x_0} = a^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{x_0}.$$

Numerele $X_{x_0}(x^i) = a^i$ se numesc *coordonatele* lui X_{x_0}, iar reperul $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}, i = 1, \ldots, n\right\}_{x_0}$ se numește *reper natural.*

Dacă raportăm pe $T_{x_0}\mathbb{M}$ la reperul natural, atunci adunarea a doi vectori se reduce la adunarea coordonatelor corespondente, iar înmulțirea unui vector cu un număr real se reduce la înmulțirea coordonatelor vectorului cu acel număr.

Exemplu. Pentru $X = 2\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x} + 7\frac{\partial}{\partial y}$ și $k \in \mathbb{R}$ găsim

$$X + Y = 3\frac{\partial}{\partial x} + 6\frac{\partial}{\partial y}, \quad kX = 2k\frac{\partial}{\partial x} - k\frac{\partial}{\partial y}.$$

2.3. *Definiție. O funcție* $X : \mathbb{M} \to \bigcup_{x \in \mathbb{M}} T_x\mathbb{M}$, $X(x) \in T_x\mathbb{M}$, *se numește cîmp vectorial pe* $\mathbb{M}$.

Adunarea dintre două cîmpuri vectoriale și produsul dintre o funcție reală și un cîmp vectorial se definesc punctual.

Cîmpurile vectoriale definite prin

$$x \to \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x, \quad i = 1, \ldots, n$$

și notate cu $\frac{\partial}{\partial x^i}$, $i = 1, \ldots, n$, se numesc *cîmpuri fundamentale.* Ansamblul lor se numește *cîmpul reperului natural.*

2.4. Teoremă. Dacă X este un cîmp vectorial pe $\mathbb{M}$, atunci există n funcții reale $X^i : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$ astfel încît

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Demonstrație. Prin definiție X asociază lui $x \in \mathbb{M}$ un vector $X(x)$ tangent la $\mathbb{M}$ în punctul x. Dar $X(x) = X^i(x) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x$ și regulile $x \to X^i(x)$, $x \in \mathbb{M}$ definesc (unic) funcțiile $X^i : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$.

Funcțiile reale X^i se numesc *coordonatele cîmpului* X. Cîmpul vectorial $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ se numește diferențiabil (de clasă C^∞) dacă funcțiile coordonate sînt diferențiabile (de clasă C^∞).

Exemplu. $X(x, y) = 2x \frac{\partial}{\partial x} + e^y \frac{\partial}{\partial y}$ este un cîmp vectorial de clasă C^∞.

Alternativ, cîmpul vectorial X poate fi privit ca fiind aplicația $X : \mathscr{F}(\mathbb{M}) \to \mathscr{F}(\mathbb{M})$ cu proprietățile

$$X(af + bg) = aX(f) + bX(g)$$

$$X(fg) = (X(f))g + fX(g),$$

unde $a, b \in \mathbb{R}$, iar $f, g \in \mathscr{F}(\mathbb{M})$.

2.5. *Definiție. Fie X și Y două cîmpuri vectoriale diferențiabile de clasă C^∞ pe $\mathbb{M}$. Cîmpul vectorial $[X, Y]$ definit prin $f \to [X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$ se numește croșetul cîmpurilor X și Y.*

Evident $[X, Y] = -[Y, X]$. De asemenea pentru orice trei cîmpuri vectoriale diferențiabile X, Y, Z se satisface *identitatea lui Jacobi*

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Mulțimea $\mathscr{X}(\mathbb{M})$ a tuturor cîmpurilor vectoriale diferențiabile de clasă C^∞ pe $\mathbb{M}$ este un spațiu vectorial real infinit dimensional. Deoarece croșetul $[,] : \mathscr{X}(\mathbb{M}) \times \mathscr{X}(\mathbb{M}) \to \mathscr{X}(\mathbb{M})$ este biliniar peste cîmpul numerelor reale, mulțimea $\mathscr{X}(\mathbb{M})$ este ceea ce se cheamă o *algebră*; croșetul fiind anticomutativ și verificînd identitatea lui Jacobi, algebra $\mathscr{X}(\mathbb{M})$ se numește *algebră Lie*.

Fie $T_x \mathbb{M}$ spațiul tangent la $\mathbb{M}$ în punctul x și ω_x o 1-formă în x, adică o transformare liniară $\omega_x : T_x \mathbb{M} \to \mathbb{R}$. Mulțimea tuturor 1-formelor în x este un spațiu vectorial real de dimensiune n, dualul lui $T_x \mathbb{M}$. Acest spațiu vectorial se numește *spațiul cotangent* la $\mathbb{M}$ în x și se notează cu $T_x^* \mathbb{M}$.

2.6. *Definiție. Fie $f \in \mathscr{F}(\mathbb{M})$. Funcția $df_x : T_x \mathbb{M} \to \mathbb{R}$ definită prin $df_x(X_x) = X_x(f)$ se numește diferențiala lui f în punctul x.*

Această definiție împreună cu definiția vectorilor tangenți arată că df_x este o 1-formă în x.

2.7. Teoremă. Fie $x^j : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$, funcțiile coordonate pe $\mathbb{M}$. Mulțimea $\{dx^j, j = 1, \ldots, n\}_{x_0}$ este o bază a lui $T_{x_0}^* \mathbb{M}$ (reper în punctul x_0).

Demonstrație. Evident $dx^j|_{x_0}$, $j = 1, \ldots, n$, aparțin lui $T_{x_0}^* \mathbb{M}$. Fie $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}, i = 1, \ldots, n\right\}_{x_0}$ reperul natural în $T_{x_0} \mathbb{M}$. Ținînd seama de definiția 2.6 deducem

$$dx^j|_{x_0} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{x_0} = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{x_0} (x^j) = \left.\frac{\partial x^j}{\partial x^i}\right|_{x_0} = \delta_i^j, \; i, j = 1, \ldots, n,$$

și deci $\{dx^j, j = 1, \ldots, n\}_{x_0}$ este bază duală.

Reperul $\{dx^j, j = 1, \ldots, n\}_{x_0}$ se numeşte *coreper natural* în x_0.

Fie $X_x = a^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x$. Rezultă $dx^j|_x(X_x) = a^i dx^j|_x \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x = a^j$. De asemenea orice 1-formă $\omega_x \in T_x^* \mathbb{M}$ se scrie $\omega_x = \omega_j dx^j|_x$, ω_j fiind coordonatele lui ω_x în raport cu coreperul natural. Rezultă $\omega_x \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x = \omega_i$, adică coordonatele 1-formei ω_x sînt valorile lui ω_x pentru vectorii reperului natural în x.

Fie $\mathscr{F}(\mathbb{M})$ algebra funcţiilor reale diferenţiabile pe $\mathbb{M}$ şi $\mathscr{X}(\mathbb{M})$ algebra Lie a cîmpurilor vectoriale diferenţiabile pe $\mathbb{M}$.

2.8. *Definiţie. O funcţie* $\omega : \mathscr{X}(\mathbb{M}) \to \mathscr{F}(\mathbb{M})$, $\mathscr{F}(\mathbb{M})$*-liniară,* $\omega(X)$*-diferenţiabilă* $\forall X \in \mathscr{X}(\mathbb{M})$, *se numeşte* 1*-formă diferenţială pe* $\mathbb{M}$.

Adunarea a două 1-forme şi produsul dintre o funcţie reală şi o 1-formă se definesc punctual.

Fie ω o 1-formă diferenţială. Valorile ω_x sînt 1-forme în x. De aceea expresia locală a unei 1-forme diferenţiale este $\omega_x = \omega_j(x) dx^j|_x$. Mai scurt, putem scrie $\omega = \omega_j dx^j$ deoarece 1-formele diferenţiale $dx^1, \ldots, dx^n$ sînt duale cîmpurilor fundamentale $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$. Ansamblul $\{dx^j, j = 1, \ldots, n\}$ se numeşte *cîmpul coreperului natural.* Mulţimea tuturor 1-formelor diferenţiale pe $\mathbb{M}$ va fi notată cu $\mathscr{X}^*(\mathbb{M})$.

O mulţime ordonată $\{X_1, \ldots, X_n\}$ de cîmpuri vectoriale se numeşte *cîmp de repere* pe $\mathbb{M}$ dacă $\{X_1(x), \ldots, X_n(x)\}$ este o bază în $T_x \mathbb{M}$, $\forall\, x \in \mathbb{M}$. Analog se defineşte *cîmpul de corepere* $\{\omega^1, \ldots, \omega^n\}$. Acestea se numesc *duale* unul altuia dacă $\omega^b(X_a) = \delta_a^b$. În general, cîmpurile de repere (sau de corepere) nu există decît pe o vecinătate a punctului x din $\mathbb{M}$.

Dacă $\{X_a, a = 1, \ldots, n\}$ este un cîmp de repere pe $\mathbb{M}$, atunci orice alt cîmp vectorial V se exprimă în forma $V = V^a X_a$. Analog, dacă $\{\omega^b, b = 1, \ldots, n\}$ este un cîmp de corepere, atunci orice altă 1-formă diferenţială η se exprimă în forma $\eta = \eta_b \omega^b$.

2.9. *Definiţie. Fie* $\mathscr{T}_q^p(T_x \mathbb{M})$ *mulţimea tuturor tensorilor de tipul* (p, q) *pe spaţiul tangent* $T_x \mathbb{M}$. *O funcţie*

$$T : \mathbb{M} \to \bigcup_{x \in \mathbb{M}} \mathscr{T}_q^p(T_x \mathbb{M}), \quad T(x) \in \mathscr{T}_q^p(T_x \mathbb{M}),$$

se numeşte cîmp tensorial de tipul (p, q) *pe* $\mathbb{M}$.

Fie $\mathscr{T}_q^p(\mathbb{M})$ mulţimea tuturor cîmpurilor tensoriale pe $\mathbb{M}$ de tipul (p, q). Adunarea a două elemente din această mulţime ca şi produsul dintre o funcţie reală şi un cîmp vectorial se definesc punctual. Mulţimea $\mathscr{T}_q^p(\mathbb{M})$ este un spaţiu vectorial real infinit dimensional. Identificări: $\mathscr{T}_0^0(\mathbb{M}) = \mathscr{F}(\mathbb{M})$, $\mathscr{T}_0^1(\mathbb{M}) = \mathscr{X}(\mathbb{M})$, $\mathscr{T}_1^0(\mathbb{M}) = \mathscr{X}^*(\mathbb{M})$.

Deoarece baza canonică în $\mathscr{T}_q^p(T_x \mathbb{M})$ este

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_q}\right\}_x$$

expresia în coordonate a lui T este

$$T(x) = T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}(x) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_q}.$$

Cîmpul T se numeşte *diferenţiabil* dacă funcţiile coordonate $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ sînt diferenţiabile.

Echivalent, un cîmp tensorial de tipul (p, q) este o funcţie

$$T : \underbrace{\mathscr{X}^*(\mathbb{M}) \times \ldots \times \mathscr{X}^*(\mathbb{M})}_{p \text{ factori}} \times \underbrace{\mathscr{X}(\mathbb{M}) \times \ldots \times \mathscr{X}(\mathbb{M})}_{q \text{ factori}} \to \mathscr{F}(\mathbb{M}),$$

$$(\omega^1, \ldots, \omega^p, X_1, \ldots, X_q) \to T(\omega^1, \ldots, \omega^p, X_1, \ldots, X_q),$$

$\mathscr{F}(\mathbb{M})$-liniară în fiecare argument. Identificarea $\mathscr{T}^1_0(\mathbb{M}) = \mathscr{X}(\mathbb{M})$ impune definiţia $X(\omega) = \omega(X)$, $X \in \mathscr{X}(\mathbb{M})$, $\omega \in \mathscr{X}^*(\mathbb{M})$.

Definiţiile cîmpurilor tensoriale *simetrice* respectiv *antisimetrice* ca şi definiţiile *produsului tensorial* şi *contracţiei* pentru cîmpuri tensoriale sînt evidente.

Fie $S^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ coordonatele cîmpului tensorial S, fie $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ coordonatele cîmpului tensorial T şi fie $f \in \mathscr{F}(\mathbb{M})$. Coordonatele cîmpurilor fS, $S + T$ şi $S \otimes T$ sînt respectiv

$$fS^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}, \quad S^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} + T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}, \quad S^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \; T^{k_1 \ldots k_p}_{l_1 \ldots l_q}.$$

Fie x un punct din $\mathbb{M}$ caracterizat pe de o parte prin coordonatele $(x^1, \ldots, x^n) = (x^i)$, iar pe de altă parte prin coordonatele $(x^{1'}, \ldots, x^{n'}) = (x^{i'})$, schimbarea de coordonate fiind $x^{i'} = x^{i'}(x^i)$ cu inversa $x^i = x^i(x^{i'})$, pe o vecinătate a lui x conţinută în $\mathbb{M}$. Baza $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right\}_x$ se schimbă în $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^{i'}}\right\}_x$ cu legătura $\left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_x = \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}(x^i) \left.\dfrac{\partial}{\partial x^{i'}}\right|_x$; corespunzător baza duală $\{dx^j\}_x$ se schimbă în $\{dx^{j'}\}_x$ cu legătura $dx^j|_x = \dfrac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}(x^{j'})\, dx^{j'}|_x$.

Evident,

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} = \delta^{i'}_{j'}, \quad \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} = \delta^i_j.$$

Corespunzător

$$\frac{\partial}{\partial x^{i'_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i'_p}} \otimes dx^{j'_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j'_q} = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \ldots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{i'_p}} \frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{j_1}} \ldots$$

$$\ldots \frac{\partial x^{j'_q}}{\partial x^{j_q}} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_q}$$

Acestea implică

$$X^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} X^i, \quad \omega_{j'} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \omega_j$$

și în general

$$T^{i'_1 \dots i'_p}_{j'_1 \dots j'_q} = \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}} T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}.$$

Observaţie. În acest paragraf, ca și în § 3, 4, 5, mulţimea deschisă $\mathbb{M}$ poate fi înlocuită cu orice subvarietate de dimensiune $m \geqslant 1$, cu sau fără frontieră, a lui $\mathbb{R}^n$.

§3. Conexiune liniară

Fie Y un cîmp vectorial diferenţiabil definit pe mulţimea deschisă $\mathbb{M}$ din $\mathbb{R}^n$ și X_x un vector tangent la $\mathbb{M}$ în punctul x. Vectorul

$$\mathrm{D}_{X_x} Y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Y(x + tX)\Big|_{t=0}$$

tangent în $\mathbb{M}$ în punctul x se numește *derivata covariantă a lui Y în raport cu X_x*. Dacă $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, atunci $\mathrm{D}_{X_x} Y = X_x(Y^i) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x$.

Această noţiune se extinde la *derivata covariantă a unui cîmp vectorial Y în raport cu cîmpul vectorial X*. Rezultatul este un cîmp vectorial care se notează cu $\mathrm{D}_X Y$ și a cărui valoare este $\mathrm{D}_{X(x)} Y$; pe coordonate, $\mathrm{D}_X Y = X(Y^i) \frac{\partial}{\partial x^i}$. Această derivată are următoarele proprietăţi

$$\mathrm{D}_{fX+gY} Z = f \mathrm{D}_X Z + g \mathrm{D}_Y Z$$

$$\mathrm{D}_X(aY + bZ) = a \mathrm{D}_X Y + b \mathrm{D}_X Z \tag{1}$$

$$\mathrm{D}_X(fY) = X(f) Y + f \mathrm{D}_X Y,$$

unde $f, g \in \mathscr{F}(\mathbb{M})$, $a, b \in \mathbb{R}$ și $X, Y, Z \in \mathscr{X}(\mathbb{M})$.

3.1. *Definiţie. O funcţie* $\mathrm{D} : \mathscr{X}(\mathbb{M}) \times \mathscr{X}(\mathbb{M}) \to \mathscr{X}(\mathbb{M})$, $(X, Y) \to \mathrm{D}_X Y$, *cu proprietăţile* (1) *se numește conexiune liniară sau derivare covariantă pe* $\mathbb{M}$.

Fie D o conexiune liniară pe $\mathbb{M}$. Funcţiile reale $\Gamma^h_{ij} : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$, $h, i, j = 1, \dots, n$, definite prin

$$\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma^h_{ij} \frac{\partial}{\partial x^h}$$

se numesc *componentele conexiunii* D. Aceste n^3 funcţii reale determină unic pe $\mathrm{D}_X Y$. Într-adevăr, dacă $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, atunci

$$\mathrm{D}_X Y = \mathrm{D}_{X^i \frac{\partial}{\partial x^i}} \left(Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = X^i \mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = X^i \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + Y^j \mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) =$$

$$= \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + Y^j \Gamma^h_{ij} \frac{\partial}{\partial x^h} \right) X^i = \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} + \Gamma^j_{ih} Y^h \right) X^i \frac{\partial}{\partial x^j} = Y^j_{\,i} X^i \frac{\partial}{\partial x^j},$$

unde s-a notat

$$Y^j_{,i} = \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} + \Gamma^j_{ih} Y^h.$$

O conexiune D determină următoarele două cîmpuri tensoriale:

1) unul de tipul (1,2), $T : \mathscr{X}(\mathbb{M}) \times \mathscr{X}(\mathbb{M}) \to \mathscr{X}(\mathbb{M})$, $T(X, Y) = \mathrm{D}_X Y - \mathrm{D}_Y X - [X, Y]$,
numit *cîmpul tensorial de torsiune*;

2) altul de tipul (1,3), $R : \mathscr{X}(\mathbb{M}) \times \mathscr{X}(\mathbb{M}) \times \mathscr{X}(\mathbb{M}) \to \mathscr{X}(\mathbb{M})$, $R(X, Y)Z = \mathrm{D}_X(\mathrm{D}_Y Z) - \mathrm{D}_Y(\mathrm{D}_X Z) - \mathrm{D}_{[X,Y]} Z$, numit *cîmpul tensorial de curbură*.

Coordonatele lui T și R în raport cu bazele canonice sînt respectiv

$$T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj},$$

$$R^h_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^h_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^h_{ji}}{\partial x^k} + \Gamma^r_{ki}\Gamma^h_{jr} - \Gamma^r_{ji}\Gamma^h_{kr}.$$

Conexiunea D se numește *simetrică* dacă $T = 0$ sau echivalent $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$.

La o schimbare a bazei în punctul x, componentele conexiunii se schimbă după legea locală

$$\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^j \partial x^k} = \Gamma^{i'}_{j'k'} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} - \Gamma^h_{jk} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^h}.$$

Fie D o conexiune pe $\mathbb{M}$ și $X \in \mathscr{X}(\mathbb{M})$. Conexiunea D induce *derivarea covariantă în raport cu* X, notată D_X, care aplică pe $\mathscr{T}^p_q(\mathbb{M})$ în el însuși. Operatorul D_X se definește prin

$$\mathrm{D}_X f = X(f),\ f \in \mathscr{F}(\mathbb{M}),$$

$$\mathrm{D}_X Y = \text{conexiunea pe } \mathbb{M},$$

$$(\mathrm{D}_X \omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega(\mathrm{D}_X Y),\ \omega \in \mathscr{T}^0_1(\mathbb{M}),$$

$$(\mathrm{D}_X T)(\omega^1, \ldots, \omega^p, Y_1, \ldots, Y_q) = X(T(\omega^1, \ldots, \omega^p, Y_1, \ldots, Y_q)) -$$

$$- T(\mathrm{D}_X \omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^p, Y_1, \ldots, Y_q) - \ldots - T(\omega^1, \ldots, \omega^p,$$

$$Y_1, \ldots, \mathrm{D}_X Y_q),\quad T \in \mathscr{T}^p_q(\mathbb{M}).$$

Sé verifică relația

$$\mathrm{D}_X(S \otimes T) = \mathrm{D}_X S \otimes T + S \otimes \mathrm{D}_X T,\ \forall S, T.$$

Dacă $\mathrm{D}_X T = 0$, $\forall X \in \mathscr{X}(\mathbb{M})$, atunci T se numește *cîmp tensorial paralel* în raport cu D.

Operatorul D_X induce un *operator general de derivare covariantă* care aplică pe $\mathscr{T}^p_q(\mathbb{M})$ în $\mathscr{T}^p_{q+1}(\mathbb{M})$. Acesta comută cu contracția.

Iată cîteva reguli de derivare covariantă pe coordonate:

$$Y^j_{,i} = \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} + \Gamma^j_{ih} Y^h, \quad \omega_{j,i} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \Gamma^h_{ij}\omega_h,$$

$$T^i_{j,k} = \frac{\partial T^i_j}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kh} T^h_j - \Gamma^h_{kj} T^i_h, \quad (Y^i\omega_j)_{,k} = Y^i_{,k}\omega_j + Y^i\omega_{j,k}.$$

§4. Metrici riemanniene

Reamintim că un produs scalar pe $T_x\mathbb{M}$ se numeşte metrică riemanniană pe $T_x\mathbb{M}$.

4.1. *Definiţie. Un cîmp tensorial g de tipul* (0,2) pe $\mathbb{M}$ *cu proprietatea că pentru fiecare $x \in \mathbb{M}$ tensorul $g(x)$ este o metrică riemanniană pe $T_x\mathbb{M}$ se numeşte cîmp tensorial metric sau metrică riemanniană pe $\mathbb{M}$. Perechea* $(\mathbb{M}, g)$ *se numeşte varietate Riemann.*

Cu ajutorul lui g putem defini *norma* pentru cîmpurile vectoriale, $\|X\|^2 = g(X, X)$, şi unghiul a două cîmpuri tensoriale X, Y nenule,

$$\cos\theta = \frac{g(X, Y)}{\|X\|\,\|Y\|}, \quad \theta \in [0, \pi].$$

De asemenea metrica riemanniană g induce operaţiile de ridicare şi coborîre a indicilor pentru orice cîmp tensorial pe $\mathbb{M}$.

Dacă există, un cîmp de repere $\{X_1, \ldots, X_n\}$ pe $\mathbb{M}$ se numeşte *ortonormat* dacă $g(X_a, X_b) = \delta_{ab}$, adică $\{X_1(x), \ldots, X_n(x)\}$ este o bază ortonormată în $T_x\mathbb{M}$, $\forall\, x \in \mathbb{M}$.

Local avem exprimarea $g = g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$, unde $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$.

De asemenea reamintim că dacă coordonatele (x^i) ale punctului x se schimbă în $(x^{i'})$, atunci funcţiile g_{ij} se schimbă după legea (locală)

$$g_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} g_{ij}.$$

4.2. Teoremă. Pe spaţiul riemannian $(\mathbb{M}, g)$ există o singură conexiune simetrică D cu proprietatea

$$D_X(g(Y, Z)) = g(D_X Y, Z) + g(Y, D_X Z), \quad \forall\, X, Y, Z \in \mathscr{X}(\mathbb{M}),$$

numită conexiune riemanniană.

Demonstraţie. Mai întîi observăm că relaţia din teoremă este echivalentă cu $D_X g = 0$, $\forall X \in \mathscr{X}(\mathbb{M})$, adică cu faptul că g este un cîmp tensorial paralel în raport cu D. Pentru simplificarea demonstraţiei vom lucra direct pe coordonate; fie g_{ij} coordonatele lui g şi Γ^h_{ij} componentele lui D. Prin ipoteză

$$\Gamma^h_{ij} = \Gamma^h_{ji}, \quad g_{ij,k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^h_{ki} g_{hj} - \Gamma^h_{kj} g_{hi} = 0.$$

Rezultă

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 2g_{hk}\Gamma^h_{ij}$$

și deci

$$\Gamma^h_{ij} = 1/2g^{hk}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right).$$

Astfel conexiunea riemanniană este caracterizată prin *simbolurile Christoffel.*

Exemple de metrici. 1) metrica uzuală pe $\mathbb{R}^n$, $g(X_x, Y_x) = (X_x, Y_x) =$ produsul scalar canonic ; $g_{ij}(x) = \delta_{ij}$.

2) metrica stereografică pe $\mathbb{R}^n$, $g(X_x, Y_x) = \dfrac{4}{(1 + k\|x\|^2)^2}(X_x, Y_x)$, $k \geqslant 0$; $g_{ij}(x) = \dfrac{4}{(1 + k\|x\|^2)^2}\delta_{ij}$.

3) metrica pe $\mathbb{M} = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|^2 < \dfrac{1}{-k},\ k < 0\right\}$, $g(X_x, Y_x) = \dfrac{4}{(1 + k\|x\|^2)^2}(X_x, Y_x)$; $g_{ij}(x) = \dfrac{4}{(1 + k\|x\|^2)^2}\delta_{ij}$.

4) metrica Poincaré pe $\mathbb{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y > 0\}$; $g_{ij}(x, y) = \dfrac{1}{y^2}\delta_{ij}$.

Facem precizarea că în unele lucrări, metrica este dată prin pătratul elementului de arc, $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$.

Fie $g_{ij} = \delta_{ij}$ metrica uzuală pe $\mathbb{M} = \mathbb{R}^n$ și (x^i) coordonatele euclidiene (sistem de coordonate ortonormat) ale punctului $x \in \mathbb{R}^n$. În acest caz, pentru orice cîmp tensorial, coordonatele covariante, mixte sau contravariante coincid. În particular pentru un cîmp vectorial coordonatele contravariante coincid cu cele covariante și cu cele obișnuite din geometria analitică elementară numite *deseori coordonate fizice.*

Presupunem că de la coordonatele euclidiene (x^i) trecem la alte coordonate $(x^{i'})$, tot ale punctului x. Rezultă

$$g_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^i}{x^{j'}}.$$

Sistemul de coordonate $(x^{i'})$ se numește *ortogonal* dacă $g_{i'j'} = 0$ pentru $i' \neq j'$. În acest caz $g_{i'i'}(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ și funcțiile $h_i = \sqrt{g_{i'i'}}$, $i' = 1', \ldots, n'$, se numesc *coeficienții Lamé.*

Fixăm un sistem de coordonate $(x^{i'})$ ortogonal. Fie cîmpul vectorial $X = X^{i'}\dfrac{\partial}{\partial x^{i'}}$. Coordonatele covariante ale lui X sînt $X_{j'} = \sum_{i'=1}^{n'} g_{j'i'}X^{i'} = h^2_{j'}X^{j'}$ (fără sumare după j'). Pe de altă parte observăm că ansamblul format din cîmpurile vectoriale

$$t_{i'} = \frac{\partial x^1}{\partial x^{i'}}\frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + \frac{\partial x^n}{\partial x^{i'}}\frac{\partial}{\partial x^n},\quad i' = 1', \ldots, n',$$

este un cîmp de repere pe $\mathbb{R}^n$. Ortonormînd acest cîmp de repere în raport cu metrica uzuală obţinem

$$e_{1'} = \frac{1}{h_{1'}} t_{1'}, \ldots, e_{n'} = \frac{1}{h_{n'}} t_{n'}.$$

Cu aceasta obţinem exprimarea

$$X = X^{i'} \frac{\partial}{\partial x^{i'}} = X^{i'} \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \frac{\partial}{\partial x^j} = X^{1'} t_{1'}, \ldots + X^{n'} t_{n'} =$$

$$= (h_{1'} X^{1'}) e_{1'} + \ldots + (h_{n'} X^{n'}) e_{n'},$$

coordonatele

$$X_{x^{1'}} = h_{1'} X^{1'}, \ldots, X_{x^{n'}} = h_{n'} X^{n'}$$

numindu-se *coordonate fizice* pentru X.

§5. Operatori diferenţiali

Fie $(\mathbb{M}, g)$ o varietate riemanniană, fie $\mathscr{F}(\mathbb{M})$ algebra funcţiilor diferenţiabile de clasă C^∞ pe $\mathbb{M}$ şi $\mathscr{X}(\mathbb{M})$ algebra Lie a cîmpurilor vectoriale diferenţiabile de clasă C^∞ pe $\mathbb{M}$.

Gradient. Fie $f \in \mathscr{F}(\mathbb{M})$. Cîmpul vectorial grad f definit prin

$$g(X, \operatorname{grad} f) = X(f) = \mathrm{d}f(X), \ \forall X \in \mathscr{X}(\mathbb{M})$$

se numeşte *gradientul* lui f.

În coordonate,

$$\operatorname{grad} f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} \ ; \ (\operatorname{grad} f)^i = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}.$$

Din definiţie se observă că grad f este ortogonal hipersuprafeţelor de nivel constant ataşate lui f.

Se verifică următoarele relaţii

$$\operatorname{grad}(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 \operatorname{grad} f_1 + a_2 \operatorname{grad} f_2$$

$$\operatorname{grad}(f_1 f_2) = f_1 \operatorname{grad} f_2 + f_2 \operatorname{grad} f_1$$

$$\operatorname{grad} \frac{f_1}{f_2} = \frac{f_2 \operatorname{grad} f_1 - f_1 \operatorname{grad} f_2}{f_2^2}.$$

Demonstraţie. $g(X, \operatorname{grad}(f_1 f_2)) = X(f_1 f_2) = f_1 X(f_2) + f_2 X(f_1) = f_1 g(X, \operatorname{grad} f_2) + f_2 g(X, \operatorname{grad} f_1) = g(X, f_1 \operatorname{grad} f_2 + f_2 \operatorname{grad} f_1)$, $\forall X \in \mathscr{X}(\mathbb{M})$. Rezultă $\operatorname{grad}(f_1 f_2) = f_1 \operatorname{grad} f_2 + f_2 \operatorname{grad} f_1$.

Operatorul grad : $\mathscr{F}(\mathbb{M}) \to \mathscr{X}(\mathbb{M})$ definit prin $f \to \operatorname{grad} f$ se numeşte *gradient*.

Hessiană. Fie $f \in \mathscr{F}(\mathbb{M})$. A doua derivată covariantă a lui f în raport cu conexiunea riemanniană se numeşte *hessiana* lui f şi se notează prin Hess f. Alternativ, hessiana este cîmpul tensorial de tipul (0,2) definit prin

$$\operatorname{Hess} f(X, Y) = D_X(df)(Y) = X(df(Y)) - df(D_X Y), \ \forall\, X, Y \in \mathscr{X}(\mathbb{M}).$$

În coordonate,

$$\operatorname{Hess} f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} - \Gamma^h_{jk} \frac{\partial f}{\partial x^h}\right) dx^j \otimes dx^k, \ (\operatorname{Hess} f)_{jk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} - \Gamma^h_{jk} \frac{\partial f}{\partial x^k}.$$

Operatorul Hess : $\mathscr{F}(\mathbb{M}) \to \mathscr{T}^0_2(\mathbb{M})$ definit prin $f \to \operatorname{Hess} f$ se numeşte *hessiană.*

Divergenţă. Fie $X \to \mathscr{X}(\mathbb{M})$, $X = X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ şi derivata sa covariantă $X^i_{,j}$ în raport cu conexiunea riemanniană. Cîmpul scalar div X definit prin contracţia

$$\operatorname{div} X = X^i_{,i} = \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{ij} X^j$$

se numeşte *divergenţa* lui X.

Fie $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$. Dacă notăm $G = \det [g_{ij}]$, atunci

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial(\sqrt{G}\, X^i)}{\partial x^i}.$$

Într-adevăr se observă că

$$\Gamma^i_{ij} = 1/2 g^{ik} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) = 1/2\, g^{ik} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j},$$

şi ţinînd seama de regula de derivare a unui determinant,

$$\frac{\partial G}{\partial x^j} = \frac{\partial G}{\partial g_{ik}} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = G g^{ik} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j},$$

deducem

$$\Gamma^i_{ij} = \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial x^j} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial x^j}.$$

Deci

$$\operatorname{Div} X = \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial x^j} X^j = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial(\sqrt{G} X^i)}{\partial x^i}.$$

Această expresie a divergenţei este des utilizată şi permite dovedirea imediată a relaţiei

$$\operatorname{div}(fX) = X(f) + f \operatorname{div} X, \ \forall\, f \in \mathscr{F}(\mathbb{M}), \ \forall\, X \in \mathscr{X}(\mathbb{M}).$$

Operatorul $\operatorname{div}: \mathscr{X}(\mathbb{M}) \to \mathscr{F}(\mathbb{M})$ definit prin $X = X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i} \to X^i_{,i}$ se numeşte *divergenţă*.

Laplaceian. Operatorul Δ definit prin

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$$

se numeşte *laplaceian*. Explicit

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\sqrt{G} g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x^k} \right) = g^{kl} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial f}{\partial x^h} \Gamma^h_{kl} \right),$$

adică Δ este urma hessianei.

Rotor. Fie cîmpul vectorial $X = X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ şi $\omega = g_{ij} X^i \mathrm{d}x^j$, $\omega_j = g_{ij} X^j$, 1-formă diferenţială asociată. Cîmpul tensorial $\operatorname{rot} X$ de tipul (0,2) definit prin

$$\operatorname{rot} X = (\omega_{j,i} - \omega_{i,j}) \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j = \left(\frac{\partial (g_{hj} X^h)}{\partial x^i} - \frac{\partial (g_{hi} X^h)}{\partial x^j} \right) \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$$

se numeşte *rotorul* lui X.

Operatorul $\operatorname{rot}: \mathscr{X}(\mathbb{M}) \to \mathscr{T}^0_2(\mathbb{M})$, $X \to \operatorname{rot} X$, se numeşte *rotor*. Se dovedeşte că dacă $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^3$, atunci cîmpul tensorial $\operatorname{rot} X$ este echivalent cu un cîmp vectorial contravariant definit prin coordonatele

$$(\operatorname{rot} X)^i = \frac{1}{\sqrt{G}} \left(\frac{\partial (g_{hk} X^h)}{\partial x^j} - \frac{\partial (g_{hj} X^h)}{\partial x^k} \right),$$

unde $\{i, j, k\}$ este o permutare ciclică a mulţimii $\{1, 2, 3\}$. Tot în acest context se verifică şi relaţiile

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} X) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} X) - \Delta X$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0, \ \operatorname{div}(\operatorname{rot} X) = 0.$$

§6. Forme alternate

Fie V un spaţiu vectorial real de dimensiune n.

6.1. *Definiţie. O q-formă sau formă alternată de ordinul q pe V este o funcţie*

$$\omega : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{q \text{ factori}} \to \mathbb{R}, \quad (v_1, \ldots, v_q) \to \omega(v_1, \ldots, v_q)$$

care satisface următoarele condiţii.

1) *multiliniară : pentru fiecare* $i \in \{1, \ldots, q\}$ *şi* $v_1, \ldots v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_q \in V$, *restricţia* $v \to \omega(v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_q)$ *este liniară,*

2) *antisimetrică*: *pentru fiecare* $v_1, \ldots, v_q \in V$ *şi pentru fiecare permutare* σ *a mulţimii* $\{1, \ldots, q\}$ *se satisface* $\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(q)}) = (\text{sign } \sigma)\omega(v_1, \ldots, v_q)$.

Cu alte cuvinte o q-formă pe V nu este altceva decît un tensor antisimetric de tipul $(0, q)$ pe V. Mulţimea tuturor q-formelor pe V se notează cu $\mathscr{F}_q(V)$ şi este un spaţiu vectorial real cu (vezi teorema 6.3)

$$\dim \mathscr{F}_q(V) = \begin{cases} C_n^q & \text{dacă } 0 \leqslant q \leqslant n \\ 0 & \text{dacă } \quad q > n. \end{cases}$$

Evident, $\mathscr{F}_0(V) = \mathbb{R}$, $\mathscr{F}_1(V) = V^*$.

6.2. *Definiţie. Fie* $\mathscr{F}_p(V)$, $\mathscr{F}_q(V)$ şi $\mathscr{F}_{p+q}(V)$. *Funcţia*

$$\wedge : \mathscr{F}_p(V) \times \mathscr{F}_q(V) \to \mathscr{F}_{p+q}(V)$$

definită prin

$$(\omega^1 \wedge \omega^2)(v_1, \ldots, v_{p+q}) =$$

$$= \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma} (\text{sign } \sigma)\, \omega^1(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)})\omega^2(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}),$$

suma fiind luată după toate permutările σ *ale lui* $\{1, \ldots, p+q\}$, *se numeşte produs exterior.*

Se observă că produsul exterior este o aplicaţie biliniară şi asociativă. Asociativitatea permite extinderea definiţiei produsului exterior la un număr finit de factori.

Evident, $$\omega^1 \wedge \omega^2 = (-1)^{pq}\omega^2 \wedge \omega^1.$$

6.3. Teoremă. Dacă $\{e_j, j = 1, \ldots, n\}$ este o bază a lui V şi $\{e^i, i = 1, \ldots, n\}$ este baza duală în V^*, atunci mulţimea

$$\{e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_q},\ 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_q \leqslant n\}$$

este o bază a lui $\mathscr{F}_q(V)$, numită *baza produs.*

Demonstraţie. Mulţimea din teoremă este liniar independentă. Într-adevăr, relaţia

$$\sum_{i_1 < \ldots < i_q} \omega_{i_1 \ldots i_q} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_q} = 0 \ (q\text{-forma zero}),$$

implică

$$0 = \sum_{i_1 < \ldots < i_q} \omega_{i_1 \ldots i_q}\, e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_q}(e_{j_1}, \ldots, e_{j_q}) =$$

$$= \sum_{i_1 < \ldots < i_q} \omega_{i_1 \ldots i_q} \sum_{\sigma} (\text{sign } \sigma)\, e^{i_1}(e_{\sigma(j_1)}) \ldots e^{i_q}(e_{\sigma(j_q)}) =$$

$$= \sum_{i_1 < \ldots < i_q} \omega_{i_1 \ldots i_q} \sum_{\sigma} (\text{sign } \sigma)\, \delta^{i_1}_{\sigma(j_1)} \ldots \delta^{i_q}_{\sigma(j_q)} = \omega_{j_1 \ldots j_q},$$

unde $j_1 < \ldots < j_q$.

Să arătăm că mulțimea din teoremă sau mai general mulțimea $\{e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_q},\ i_1, \ldots, i_q = 1, \ldots, n\}$ generează pe $\mathscr{F}_q(V)$. Pentru aceasta fie $\omega \in \mathscr{F}_q(V)$ și numerele reale $\omega_{i_1 \ldots i_q} = \omega(e_{i_1}, \ldots, e_{i_q})$. Găsim

$$\omega_{i_1 \ldots i_q} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_q}(e_{j_1}, \ldots, e_{j_q}) =$$

$$= \omega_{i_1 \ldots i_q} \frac{1}{q!} \sum_{\sigma} (\operatorname{sign} \sigma) e^{i_1}(e_{\sigma(j_1)}) \ldots e^{i_q}(e_{\sigma(j_q)}) =$$

$$= \frac{1}{q!} \omega_{i_1 \ldots i_q} \sum_{\sigma} (\operatorname{sign} \sigma)\, \delta^{i_1}_{\sigma(j_1)} \ldots \delta^{i_q}_{\sigma(j_q)} = \omega_{j_1 \ldots j_q} = \omega(e_{j_1}, \ldots, e_{j_q}).$$

Deoarece ω este multiliniară, ultima relație implică

$$\omega_{i_1 \ldots i_q} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_q}(v_1, \ldots, v_q) = \omega(v_1, \ldots, v_q).$$

Deci

$\omega = \omega_{i_1 \ldots i_q} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_q} = q! \sum_{j_1 < \ldots < j_q} \omega_{j_1 \ldots j_q} e^{j_1} \wedge \ldots \wedge e^{j_q}$, unde numerele reale $q!\ \omega_{j_1 \ldots j_q}$, $j_1 < \ldots < j_q$, sînt *coordonatele stricte* ale q-formei ω.

§7. Forme diferențiale alternate

Fie $\mathbb{M}$ o mulțime deschisă din $\mathbb{R}^n$, fie $T_x\mathbb{M}$ spațiul tangent la $\mathbb{M}$ în punctul x și $\mathscr{F}_q(T_x\mathbb{M})$ mulțimea tuturor q-formelor pe $T_x\mathbb{M}$.

7.1. *Definiție. O funcție*

$$\omega : \mathbb{M} \to \bigcup_{x \in \mathbb{M}} \mathscr{F}_q(T_x\mathbb{M}),\quad \omega(x) \in \mathscr{F}_q(T_x\mathbb{M}),$$

se numește q-formă diferențială sau formă diferențială alternată de ordinul q pe $\mathbb{M}$.

Cu alte cuvinte o q-formă diferențială este un cîmp tensorial antisimetric de tipul $(0, q)$ pe $\mathbb{M}$. Fie $\mathscr{F}_q(\mathbb{M})$ mulțimea tuturor q-formelor diferențiale pe $\mathbb{M}$. Adunarea a două elemente din această mulțime ca și produsul dintre o funcție reală și o q-formă se definesc punctual.

Fie $T^*_x\mathbb{M}$ dualul spațiului tangent. Baza canonică în $T_x\mathbb{M}$ este $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i},\ i = 1, \ldots, n\right\}_x$, iar duala sa, bază în $T^*_x\mathbb{M}$, este $\{dx^i,\ i = 1, \ldots, n\}_x$. Baza indusă în $\mathscr{F}_q(\mathbb{M})$ este $\{dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_q},\ 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_q \leqslant n\}_x$. De aceea expresia în coordonate a lui ω este

$$\omega(x) = \omega_{i_1 \ldots i_q}(x) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_q}.$$

Funcțiile $x \to \omega_{i_1 \ldots i_q}(x)$ se presupun diferențiabile de clasă C^∞ pe $\mathbb{M}$.

Fie $\mathscr{F}(\mathbb{M})$ algebra funcţiilor reale şi $\mathscr{X}(\mathbb{M})$ algebra Lie a cîmpurilor vectoriale. O q-formă diferenţială pe $\mathbb{M}$ poate fi privită ca fiind funcţia

$$\omega : \mathscr{X}(\mathbb{M}) \times \ldots \times \mathscr{X}(\mathbb{M}) \to \mathscr{F}(\mathbb{M}), \quad (X_1, \ldots, X_q) \to \omega(X_1, \ldots, X_q),$$

$\mathscr{F}(\mathbb{M})$ —liniară în fiecare argument şi cu proprietatea $\omega(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(q)}) = (\operatorname{sign}\sigma)\, \omega(X_1, \ldots, X_q)$, unde σ este o permutare a mulţimii $\{1, \ldots, q\}$.

Definiţia *produsului exterior* pentru q-forme diferenţiale este evidentă.

Fie $X \in \mathscr{X}(\mathbb{M})$ şi $\omega \in \mathscr{F}_q(\mathbb{M})$. Prin *contracţia* dintre X şi ω înţelegem $(q-1)$-forma diferenţială $X \lrcorner \omega$ definită prin $(X \lrcorner \omega)(X_1, \ldots, X_{q-1}) = \omega(X, X_1, \ldots, X_{q-1})$, $X_1, \ldots, X_{q-1} \in \mathscr{X}(\mathbb{M})$.

7.2. *Definiţie. Fie $\mathscr{F}_q(\mathbb{M})$ şi $\mathscr{F}_{q+1}()\mathbb{M}$. O funcţie $\mathbb{R}$-liniară $\mathrm{d} : \mathscr{F}_q(\mathbb{M}) \to \mathscr{F}_{q+1}(\mathbb{M})$ cu proprietăţile*

$$\mathrm{d}^2 = 0$$

$$\mathrm{d}(\omega^1 \wedge \omega^2) = \mathrm{d}\omega^1 \wedge \omega^2 + (-1)^q\, \omega^1 \wedge \mathrm{d}\omega^2$$

$$X(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}(X(\omega)), X \in \mathscr{X}(\mathbb{M})$$

$$X(\omega) = X \lrcorner \mathrm{d}\omega + \mathrm{d}(X \lrcorner \omega)$$

se numeşte diferenţială exterioară.

Utilizînd derivata covariantă şi croşetul putem scrie

$$\mathrm{d}\omega(X_1, \ldots, X_{q+1}) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant q+1} (-1)^{i-1} \mathrm{D}_{X_i}\omega(X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_{q+1}) +$$

$$+ \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant q+1} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_{j-1}, X_{j+1}, \ldots, X_{q+1}).$$

Pe $\mathscr{F}(\mathbb{M}) = \mathscr{F}_0(\mathbb{M})$ diferenţiala exterioară se reduce la diferenţiala obişnuită. Mai mult,

$$\mathrm{d}\omega(x) = \mathrm{d}\omega_{i_1 \ldots i_q}(x) \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_q}.$$

O q-formă diferenţială ω cu proprietatea $\mathrm{d}\omega = 0$ se numeşte *formă închisă*. O $(q+1)$-formă diferenţială η cu proprietatea că există o q-formă ω astfel încît $\eta = \mathrm{d}\omega$ se numeşte *formă exactă*.

O b s e r v a ţ i i. 1) Mulţimea deschisă $\mathbb{M}$ poate fi înlocuită cu orice subvarietate de dimensiune $m \geqslant 1$, cu sau fără frontieră, a lui $\mathbb{R}^n$.

2) Fie $\mathbb{M}$ o subvarietate a lui $\mathbb{R}^n$, de dimensiune m, cu sau fără frontieră. O *formă volum* pe $\mathbb{M}$ este o m-formă diferenţială ω pe $\mathbb{M}$ cu proprietatea $\omega(v_1, \ldots, v_m) = \pm 1$ ori de cîte ori $v_1, \ldots, v_m$ este o bază ortonormată a lui $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$. O alegere a unei forme volum ω pe $\mathbb{M}$ se numeşte *orientare* a lui $\mathbb{M}$; despre $\mathbb{M}$ se zice că este *orientată*.

Fie $\mathbb{M}$ o subvarietate de dimensiune $m \geqslant 2$, cu frontieră. O orientare pe $\mathbb{M}$ induce o orientare pe $\partial\mathbb{M}$.

3) În $(\mathbb{R}^3, \delta_{ij})$, 1-formele şi 2-formele pot fi convertite în cîmpuri vectoriale prin corespondenţele

$$\sum f_i\, \mathrm{d}x^i \overset{(1)}{\leftrightarrow} \sum f_i U_i \overset{(2)}{\leftrightarrow} f_1 \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 + f_2 \mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^1 + f_3 \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2$$

$$\mathrm{d}f \overset{(1)}{\leftrightarrow} \operatorname{grad} f$$

$$\omega \overset{(1)}{\leftrightarrow} V \Rightarrow \mathrm{d}\omega \overset{(2)}{\leftrightarrow} \operatorname{rot} V,$$

$$\eta \overset{(2)}{\leftrightarrow} V \Rightarrow \mathrm{d}\eta = (\operatorname{div} V)\, \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3.$$

§ 8. Probleme

1. Să se explicite ze sumele

$$\omega_i v^i, \quad T^i_{ij}, \quad \omega_i T^i_j, \quad T^i_j v^j.$$

2. Să se verifice că $(\,,\,): \mathcal{T}^1_1(V) \times \mathcal{T}^1_1(V) \to \mathbb{R}$, $(S, T) = S^i_j T^j_i$ este un produs scalar pe $\mathcal{T}^1_1(V)$.

3. Fie $T \in \mathcal{T}_2(V)$ și $[T_{ij}]$ matricea coordonatelor sale. Să se verifice că la o schimbare a bazei avem

$$\det[T_{i'j'}] = (\det[A^i_{i'}])^2 \det[T_{ij}].$$

4. Se dau $X = 2x\dfrac{\partial}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial}{\partial y}$, $Y = \sin x\dfrac{\partial}{\partial x} + xy\dfrac{\partial}{\partial y}$. Să se găsească $[X, Y]$. Apoi, luînd $\omega = -x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y$, să se calculeze $\omega(X)$ și $\omega(Y)$.

5. Pe $\mathbb{M}: x > 0,\ y > 0$, considerăm cîmpul tensorial

$$T = (x^2 + y^2)\frac{\partial}{\partial x} \otimes \frac{\partial}{\partial x} + \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y} \otimes \frac{\partial}{\partial y}.$$

Să se găsească funcțiile coordonate ale lui T în coordonate polare.

6. Pe $\mathbb{R}^3 - Oz$ se consideră cîmpul vectorial

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}.$$

Să se găsească funcțiile coordonate ale lui X în coordonate sferice.

7. Pe $\mathbb{R}^2$ se dau: conexiunea D de componente

$$\Gamma^i_{jk}(x) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } i = j = 1,\ k = 2 \text{ sau } i = k = 1,\ j = 2 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

și

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial x} - e^x\frac{\partial}{\partial y}, \quad \omega = xy\mathrm{d}x + e^y\mathrm{d}y.$$

Să se calculeze $D_X Y$, $D_X\omega$, $D_X(Y \otimes \omega)$.

8. Se dă varietatea riemanniană $(\mathbb{R}^3 - Oz, \delta_{ij})$. Să se explicite ze coordonatele metricii, coeficienții Lamé și simbolurile Christoffel, în coordonate cilindrice și sferice.

9. Fie $\mathbb{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$, $g_{ij}(x, y) = \dfrac{1}{y^2}\delta_{ij}$, $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $X = y\dfrac{\partial}{\partial x} + x^2 y\dfrac{\partial}{\partial y}$. Să se determine grad f, Hess f, div X, Δf, rot X.

10. Să se calculeze $\mathrm{d}\omega$ pentru fiecare din formele diferențiale

$$\omega = x^2\mathrm{d}x + y^2\mathrm{d}y + z^2\mathrm{d}z, \quad \omega = e^{xy}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z, \quad \omega = \frac{1}{x + y + z}(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z),$$

$$\omega = (1 + 2xyz^2)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - y^2z^2\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + xy^2\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

4

ECUAȚII DIFERENȚIALE

Notații și terminologie

Ecuațiile care conțin funcții, variabilele independente corespunzătoare și derivatele funcțiilor și în care necunoscutele sînt funcțiile se numesc *ecuații diferențiale*. Dacă funcțiile necunoscute depind de o singură variabilă, atunci ecuațiile se numesc *ecuații diferențiale ordinare*. Dacă funcțiile necunoscute depind de mai multe variabile, atunci ecuațiile se numesc *ecuații cu derivate parțiale*.

Ecuații diferențiale ordinare. O ecuație de forma $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})=0$, $F: I\times \mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$, $x\in I$, unde $y: I\to \mathbb{R}$ este funcția necunoscută, se numește *ecuație diferențială ordinară de ordinul n* dacă $y^{(n)}$ intervine efectiv. O funcție definită prin $x\to y(x)$, $x\in I_1 \subset I$ care posedă derivate pînă la ordinul n inclusiv se numește *soluție* pe intervalul I_1 dacă $F(x, y(x), y'(x), \ldots$ $\ldots, y^{(n)}(x)) = 0$, $\forall x\in I_1$. Graficul unei soluții se numește *curbă integrală*. De exemplu, o soluție a ecuației $y'' = y$ este $y = e^x$. De asemenea $y = xc + \dfrac{5}{c}$ și $y = 2\sqrt{5x}$ sînt soluții ale ecuației $y = xy' + \dfrac{5}{y'}$, $x > 0$.

O soluție a unei ecuații diferențiale ordinare poate să depindă sau nu de un anumit număr de constante arbitrare. De exemplu $y = xc + \dfrac{5}{c}$ depinde de constanta arbitrară c. O soluție a unei ecuații diferențiale de ordinul n care depinde de n constante arbitrare (independente) se numește *soluție generală* a ecuației. Orice soluție obținută din cea generală prin particularizarea constantelor se numește *soluție particulară*.

Există însă și soluții care nu provin din soluția generală prin particularizarea constantelor. De obicei acestea sînt *soluții singulare*, adică soluții care satisfac $\dfrac{\partial F}{\partial x_{n+2}}(x, y(x), y'(x), \ldots$ $\ldots, y^{(n)}(x)) = 0$, $\forall x\in I_1$. De exemplu $y = 2\sqrt{5x}$ nu se poate obține din $y = xc + \dfrac{5}{c}$ prin particularizarea lui c.

Fie $y = f(x; c_1, \ldots, c_n)$, $x\in I$ o familie de funcții de clasă C^n care depinde de n constante independente c_i. Acestei familii i se poate atașa o ecuație diferențială de ordinul n a cărei soluție generală să fie chiar familia de funcții de la care am plecat. Într-adevăr ansamblul

$$\begin{cases} y = f(x; c_1, \ldots, c_n) \\ y' = f'(x; c_1, \ldots, c_n) \\ \cdots\cdots\cdots \\ y^{(n)} = f^{(n)}(x; c_1, \ldots, c_n) \end{cases}$$

poate fi privit ca un sistem de $n+1$ ecuații cu n necunoscute c_i. Condiția de compatibilitate, $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, este ecuația diferențială căutată.

De exemplu, familiei $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ i se atașează ecuația $y'' + y = 0$. Aceasta rezultă din faptul că $y' = -c_1 \sin x + c_2 \cos x$, $y'' = -c_1 \cos x - c_2 \sin x = -y$.

Ecuații cu derivate parțiale. O ecuație de forma

$$F\left(x, f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^{i_1+\ldots+i_n} f}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}\right) = 0, \; x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n,$$

unde f este funcția necunoscută, se numește *ecuație cu derivate parțiale de ordinul* $i_1 + \ldots + i_n$, dacă în ecuație apare efectiv cel puțin o derivată parțială de acest ordin. O funcție definită prin $x \to f(x)$ care posedă derivate parțiale pînă la ordinul $i_1 + \ldots + i_n$ inclusiv se numește *soluție* în $\mathbb{D}^* \subset \mathbb{D}$ dacă $F\left(x, f(x), \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x), \ldots, \frac{\partial^{i_1+\ldots+i_n} f}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}(x)\right) = 0, \; \forall x \in \mathbb{D}^*$.

Graficul unei soluții se numește *hipersuprafață integrală.*

Drept exemplu considerăm ecuația $\frac{\partial f}{\partial x} = xy$, $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Ea este o ecuație cu derivate parțiale de ordinul întîi care admite soluția definită prin $f(x, y) = y\frac{x^2}{2} + \varphi(y)$, unde $\varphi \in C^1(\mathbb{D})$ este o funcție arbitrară.

În general, funcțiile arbitrare din soluțiile ecuațiilor cu derivate parțiale joacă rolul constantelor arbitrare din soluțiile ecuațiilor ordinare. Teoremele de existență și unicitate a soluției pun în evidență analogia respectivă.

Capitolul 1

ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL ÎNTÎI

Fie I un interval din $\mathbb{R}$ și $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție care admite primitivă. Cea mai simplă ecuație diferențială de ordinul întîi este $y' = f(x)$ și rezolvarea ei se reduce la aflarea primitivei lui f. Teoria primitivelor este prezentată amănunțit în manualele de Analiză matematică (inclusiv în cele de liceu). De asemenea, reamintim că în manualele de liceu pentru clasa a XII-a este prezentată ecuația diferențială liniară $y' = yf(x)$ și ecuația cu variabile separate $g(y)y' = f(x)$.

Fie $\mathbb{D}$ o submulțime deschisă din $\mathbb{R}^2$ și $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. *Forma normală* a unei ecuații diferențiale de ordinul întîi este

$$y' = f(x, y).$$

Presupunem că $Q : \mathbb{D} \to \mathbb{R} - \{0\}$ este o funcție continuă. Dacă înmulțim ambii membri ai ecuației diferențiale cu factorul nenul $Q(x, y)$ găsim ecuația diferențială echivalentă $Q(x, y)y' - Q(x, y)f(x, y) = 0$. Notînd $P(x, y) = -Q(x, y)f(x, y)$ și utilizînd pentru y' notația lui Leibniz $\frac{dy}{dx}$ (cîtul

a două diferenţiale — particularitate a funcţiilor de o variabilă) ecuaţia diferenţială se transcrie

$$P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = 0,\ P, Q \in C^0(\mathbb{D}).$$

Evident, expresia $P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y$ poate fi gîndită ca o 1-formă pe $\mathbb{D}$ fapt ce procură o alternativă de prezentare pentru ecuaţiile de tipul $y' = f(x, y)$.

§1. Ecuaţia diferenţială cu variabile separate

O ecuaţie diferenţială de tipul

$$a(x)\,\mathrm{d}x + b(y)\,\mathrm{d}y = 0,$$

unde $a : I_1 \to \mathbb{R}$ şi $b : I_2 \to \mathbb{R}$ sînt funcţii continue date, se numeşte *ecuaţie diferenţială cu variabile separate.*

1.1. Teoremă. 1) Funcţia $f : I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} b(t)\,\mathrm{d}t$, $(x_0, y_0) \in I_1 \times I_2$, are proprietatea $\mathrm{d}f(x, y) = a(x)\mathrm{d}x + b(y)\,\mathrm{d}y$.

2) Fiecare soluţie $x \to y(x)$ a ecuaţiei diferenţiale cu variabile separate, cu graficul inclus în $I_1 \times I_2$, satisface relaţia $f(x, y(x)) = c$ pentru o anumită constantă c. Reciproc, dacă ecuaţia $f(x, y) = c$ defineşte pe y ca funcţie implicită diferenţiabilă de x, atunci această funcţie este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale cu variabile separate.

Demonstraţie. 1) Existenţa lui f este asigurată de continuitatea funcţiilor a şi b. În plus, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t = a(x)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_{y_0}^{y} b(t)\,\mathrm{d}t = b(y)$.

2) Presupunem că $x \to y(x)$, $x \in (a, b) \subset I_1$ este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale cu variabile separate astfel încît $(x, y(x)) \in I_1 \times I_2$, $\forall x \in (a, b)$. Să arătăm că $f(x, y(x)) = c$. Pentru aceasta considerăm funcţia compusă $x \to g(x) = f(x, y(x))$, $x \in (a, b)$ şi derivata ei $g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))y'(x) = a(x) + b(y(x))y'(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$. Deci g este o constantă c pe (a, b). Astfel orice soluţie y a ecuaţiei diferenţiale cu variabile separate satisface ecuaţia carteziană implicită $f(x, y) = c$.

Să presupunem acum că ecuaţia $f(x, y) = c$ defineşte pe y ca funcţie implicită diferenţiabilă de x pe $(a, b) \subset I_1$. Ecuaţia $f(x, y) = c$ implică faptul că $x \to g(x) = f(x, y(x))$ este constantă pe (a, b). Rezultă $0 = g'(x) = a(x) + b(y)y'$ şi deci y este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale cu variabile separate.

Teorema precedentă procură de fapt un procedeu pentru a găsi soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale cu variabile separate şi anume: această

soluție este definită prin familia de ecuații carteziene implicite

$$\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} b(t)\,\mathrm{d}t = c$$

care descrie familia curbelor integrale. Dacă impunem ca la $x = x_0$ să corespundă $y = y_0$, atunci $c = 0$; soluția particulară există și este unică.

O ecuație diferențială de tipul

$$a_1(x)b_2(y)\mathrm{d}x + a_2(x)b_1(y)\,\mathrm{d}y = 0,$$

unde $a_1, a_2 \in C^0(I_1)$, $b_1, b_2 \in C^0(I_2)$ se numește *ecuație diferențială cu variabile separabile*. Dacă ne limităm la subintervalele lui I_1 respectiv I_2 pe care $a_2(x) \neq 0$ respectiv $b_2(y) \neq 0$, atunci ecuația diferențială cu variabile separabile se reduce la o ecuație cu variabile separate

$$\frac{a_1}{a_2}(x)\,\mathrm{d}x + \frac{b_1}{b_2}(y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

În ipoteza $a_2(x_0) = 0$ $(b_2(y_0) = 0)$, printr-o simplă verificare se dovedește că $x = x_0 (y = y_0)$ este o soluție a ecuației diferențiale cu variabile separabile.

Exemplu. Procesul de dizolvare a unui solid într-un lichid este guvernat de ecuația diferențială cu variabile separabile

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k(a - x), \quad a, k = \text{const.},$$

unde x reprezintă cantitatea de solid dizolvată la momentul t. Evident, $x = a$ este o soluție a acestei ecuații. Pentru $x \neq a$ putem scrie

$$\frac{\mathrm{d}x}{a - x} = k\,\mathrm{d}t$$

și de aici deducem soluția generală $x = a + ce^{-kt}$, $t \in [0, \infty)$, unde c este constantă arbitrară.

§ 2. Ecuația diferențială omogenă

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{y}{x}\right), \text{ unde } f \in C^0(I),\ x \neq 0,$$

se reduce la ecuația

$$x\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = f(t) - t,$$

care este o ecuație cu variabile separabile. Într-adevăr, schimbarea de funcție (difeomorfism) $y \leftrightarrow t$ definită prin $y = tx$, $x \neq 0$ conduce la $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} + t$ și demonstrația constă în simple înlocuiri.

Exemplu. Să se determine familia de curbe cu proprietatea că tangenta în punctul (x^2, y^2) taie axa OY într-un punct a cărui ordonată este $-\frac{1}{4}x^2$.

Dacă $y = y(x)$ este ecuația unei astfel de curbe, atunci tangenta în (x^2, y^2) are ecuația $Y - y^2 = y'(X - x^2)$. De aceea ordonata punctului de intersecție cu OY este $y^2 - x^2y'$. Rezultă ecuația diferențială omogenă

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{1}{4}.$$

Soluția generală a acestei ecuații omogene este $y = x\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\ln cx}\right)$, $x > 0$, unde $c > 0$ este constanta arbitrară.

§ 3. Ecuația diferențială liniară

$$\frac{dy}{dx} = yf(x) + g(x), \text{ unde } f, g \in C^0(I).$$

Acesteia i se atașează ecuația diferențială cu variabile separabile

$$\frac{dy}{dx} = yf(x),$$

numită *ecuație diferențială liniară și omogenă*, cu soluția generală

$$y = ce^{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}, \quad x_0 \in I.$$

Să arătăm că există o funcție $u : I \to \mathbb{R}$ de clasă C^1 astfel încît $y = u(x)e^{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}$ să fie soluția generală a ecuației diferențiale inițiale. Într-adevăr,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}e^{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt} + uf\,e^{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}$$

și introducînd în ecuația inițială găsim

$$\frac{du}{dx} = g(x)\,e^{-\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}.$$

Deci

$$u(x) = c + \int_{x_0}^{x} g(s)\,e^{-\int_{x_0}^{s} f(t)\,dt}\,ds,$$

adică

$$y = e^{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}\left(c + \int_{x_0}^{x} g(s)\, e^{-\int_{x_0}^{s} f(t)\,dt}\, ds\right).$$

Tehnica precedentă de obținere a soluției ecuației diferențiale liniare neomogene din soluția generală a ecuației diferențiale liniare omogene asociate este un caz particular al *metodei variației constantelor* (cap. 3, § 3).

Proprietăți. 1) Mulțimea soluțiilor unei ecuații diferențiale liniare este convexă.

Într-adevăr, dacă y_1 și y_2 sînt două soluții, atunci și $y = cy_1 + (1 - c)y_2$ este o soluție. Această observație are următoarele consecințe:

— raportul simplu atașat celor trei soluții y_1, y_2, y nu depinde de x, adică

$$\frac{y(x) - y_2(x)}{y_1(x) - y_2(x)} = c, \ \forall x \in I.$$

— o ecuație diferențială liniară are sau toate soluțiile mărginite sau cel mult una.

2) Presupunem că pentru $x = x_0$ găsim $y = y_0$. Atunci $c = y_0$.

Dacă $f(x) < 0, \forall x \in [x_0, \infty)$, atunci soluția generală a ecuației diferențiale liniare este o funcție uniform continuă în raport cu valoarea inițială $c = y_0$ ($\Rightarrow$ soluțiile particulare sînt stabile, vezi cap. 2, § 5). Cu alte cuvinte dacă $x \to y_i(x)$ sînt soluțiile care satisfac condițiile inițiale $y_i(x_0) = y_{i0}$, $i = 1, 2$, atunci $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon)$ astfel încît $\forall y_{i0}$ cu $|y_{10} - y_{20}| < \delta$ avem $\|y_1 - y_2\| = \sup_x |y_1(x) - y_2(x)| < \varepsilon$. Într-adevăr se observă că

$$y_1(x) - y_2(x) = (y_{10} - y_{20})\, e^{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}$$

și deci relația

$$e^{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt} < 1$$

implică $|y_1(x) - y_2(x)| < |y_{10} - y_{20}|$.

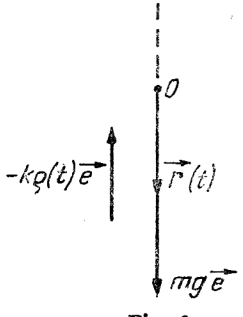


Fig. 1

Exemplu. O particulă de masă m cade vertical, asupra sa acționînd forța de gravitație și rezistența aerului (fig. 1) a cărei mărime este proporțională cu modulul vitezei particulei. Fixînd originea și versorul $\vec{e}$, vectorul de poziție $\vec{r}(t)$ are expresia $\vec{r}(t) = \rho(t)\vec{e}$ și $\vec{v}(t) = \dot{\rho}(t)\vec{e}$. Forța de gravitație este $mg\vec{e}$, iar rezistența aerului este $-k\dot{\rho}(t)\vec{e}$. Legea lui Newton se transcrie

$$m\ddot{\rho}(t)\vec{e} = -k\dot{\rho}(t)\vec{e} + mg\vec{e}$$

sau, notînd $y = \dot{\rho}(t)$,

$$\dot{y} = -\frac{k}{m}y + g.$$

Aceasta este o ecuaţie liniară cu coeficienţi constanţi, cu soluţia generală

$$\dot{y} = (c + g)\, e^{-\frac{k}{m}(x - x_0)} - \frac{mg}{k}.$$

§ 4. Ecuaţia Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} = y^r f(x) + y g(x),\ r \in \mathbb{R} - \{0, 1\},\ f, g \in C^0(I).$$

Mulţimea valorilor lui y este impusă de valorile r. Corespunzător rezultă intervalul I.

În ipoteza $y > 0$ ecuaţia Bernoulli se reduce la ecuaţia liniară

$$\frac{dz}{dx} = (1 - r)g(x)z + (1 - r)f(x).$$

Într-adevăr, schimbarea de funcţie (difeomorfism) $y \leftrightarrow z$ definită prin $z = y^{1-r}$ conduce la $\frac{dz}{dx} = (1 - r)y^{-r}\frac{dy}{dx}$, iar înlocuirile în ecuaţia Bernoulli conduc la ecuaţia liniară.

Exemplu. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} + \frac{x^2}{2y},\ x > 0.$$

Cu schimbarea $z = y^2$ obţinem ecuaţia liniară $\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x} + x^2$ cu soluţia generală $z = c_1 x + \frac{x^3}{3}$, $x > 0$. Soluţia generală a ecuaţiei Bernoulli este definită prin $y^2 = c_1 x + \frac{x^3}{3}$, $x > 0$.

§ 5. Ecuaţia Riccati

$$\frac{dy}{dx} = y^2 f(x) + y g(x) + h(x),\ \text{unde } f, g, h \in C^0(I).$$

Soluţia generală a unei asemenea ecuaţii diferenţiale nu se poate obţine cu ajutorul primitivelor decît în ipoteze suplimentare. De exemplu, dacă se cunoaşte o soluţie y_0, atunci schimbarea de funcţie (difeomorfism) $y \leftrightarrow z$ definită prin $y = y_0 + \frac{1}{z}$ arată că ecuaţia Riccati se reduce la ecuaţia liniară

$$\frac{dz}{dx} = (-g(x) - 2y_0 f(x))z - f(x).$$

Observaţie. Fie $x \to z_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, trei soluţii ale ecuaţiei diferenţiale liniare ataşate ecuaţiei Riccati. Deoarece

$$\frac{z_1(x) - z_3(x)}{z_2(x) - z_3(x)} = \text{const}, \quad z_i(x) = \frac{1}{y_i(x) - y_0(x)}, \quad i = 1, 2, 3$$

rezultă

$$\frac{y_1(x) - y_3(x)}{y_2(x) - y_3(x)} : \frac{y_1(x) - y_0(x)}{y_2(x) - y_0(x)} = \text{const},$$

adică biraportul a patru soluţii ale ecuaţiei Riccati este constant. De aceea, trei soluţii ale ecuaţiei Riccati determină soluţia generală.

Exemplu. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$\frac{dy}{dx} = xy^2 - 2x^2y + x^3 + 1.$$

Se observă că $y_0 = x$ este o soluţie. Punînd $y = x + \frac{1}{z}$ obţinem ecuaţia diferenţială liniară omogenă

$$\frac{dz}{dx} = -x.$$

Rezultă $z = -\frac{x^2 + c}{2}$ şi deci $y = x - \frac{2}{x^2 + c}$.

§6. Ecuaţii diferenţiale exacte

Fie ecuaţia diferenţială

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0, \tag{1}$$

unde P, Q sînt funcţii de clasă C^1 pe mulţimea deschisă $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$.

6.1. Teoremă. Dacă $\mathbb{D}$ este un dreptunghi şi dacă $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ pe $\mathbb{D}$, atunci funcţia $(x, y) \to f(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy$ are proprietatea $df = Pdx + Qdy$ şi deci soluţia generală a ecuaţiei (1) este definită prin $f(x, y) = c$.

Demonstraţie. Se observă că

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = P(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx + Q(x_0, y) =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\,dx + Q(x_0, y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)\,dx + Q(x_0, y) = Q(x, y).$$

De aceea ecuaţia (1) este echivalentă cu $df = 0$. Mulţimea $\mathbb{D}$ fiind conexă rezultă $f(x, y) = c$. Aceasta îndeplineşte condiţiile din teorema funcţiilor implicite în orice punct $(x, y) \in \mathbb{D}$ pentru care $Q(x, y) \neq 0$.

Observaţie. Există posibilitatea să modificăm ipotezele din teorema precedentă fără a afecta formularea concluziei. De exemplu dreptunghiul $\mathbb{D}$ poate fi înlocuit cu o mulţime conexă şi simplu conexă.

6.2. Teoremă. Dacă $\mathbb{D}$ este o mulţime conexă şi dacă $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ pe $\mathbb{D}$, atunci funcţia $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \int_0^1 [P(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))(x - x_0) + Q(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)) \cdot (y - y_0)]\, dt$ are proprietatea $df = P\,dx + Q\,dy$ şi deci soluţia generală a ecuaţiei (1) este definită prin $f(x, y) = c$.

Demonstraţie. Într-adevăr, dacă notăm $u(t) = x_0 + t(x - x_0)$, $v(t) = y_0 + t(y - y_0)$, atunci

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \int_0^1 \left[\frac{\partial P}{\partial u}(u(t), v(t))t(x - x_0) + P(u(t), v(t)) + \frac{\partial Q}{\partial u}(u(t), v(t))t \cdot (y - y_0)\right] dt = \left(\text{ţinem seama că } \frac{\partial Q}{\partial u} = \frac{\partial P}{\partial v}\right), \int_0^1 t \frac{d}{dt} P(u(t), v(t))\, dt + \int_0^1 P(u(t), v(t))dt = \text{(integrăm prin părţi)}, \; P(u(1), v(1)) = P(x, y).$$

Analog se găseşte

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = Q(x, y).$$

Restul raţionamentului este ca şi în demonstraţia teoremei precedente.

6.3. *Definiţie. Ecuaţiile diferenţiale* (1) *pentru care mulţimea* $\mathbb{D}$ *este conexă şi simplu conexă, iar* $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\forall (x, y) \in \mathbb{D}$, *se numesc ecuaţii exacte.*

Ecuaţiile cu variabile separate sînt ecuaţii exacte.

Exemplu. Liniile de curent în mişcarea staţionară a unui fluid plan sînt descrise de o ecuaţie diferenţială de tipul $-\psi(x, y)dx + \varphi(x, y)dy = 0$, unde (φ, ψ) este cîmpul vectorial viteză. Dacă fluidul este incompresibil, atunci este îndeplinită condiţia

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\psi}{dy} = 0$$

și ecuația liniilor de curent este exactă. Soluția generală $f(x, y) = c$ reprezintă familia liniilor de curent, unde $f(x, y) = -\int_{x_0}^{x} \psi(x, y)\, dx + \int_{y_0}^{y} \varphi(x_0, y)\, dy$.

6.4. Teoremă. Fie $\mathbb{D}$ o mulțime deschisă conexă și simplu conexă. Există o funcție nenulă $\mu : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ de clasă C^1 astfel încît

$$\mu(x, y)P(x, y)\, dx + \mu(x, y)Q(x, y)\, dy = 0$$

să fie o ecuație exactă.

Funcția μ se numește *factor integrant.*

Demonstrație. Ecuația din teoremă este exactă dacă și numai dacă μ satisface ecuația cu derivate parțiale

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}. \tag{2}$$

Această ecuație are cel puțin o soluție nebanală; în ipoteza $Q(x, y) \neq 0$, aceasta se procură din soluția ecuației $\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ (vezi § 3, Cap. 5), soluție a cărei existență și unicitate este garantată de teorema 2.1, § 2 din Cap. 2.

Observație. Găsirea efectivă a unei soluții a ecuației cu derivate parțiale (2) nu este o problemă mai ușoară decît cea a găsirii soluției generale a ecuației diferențiale ordinare (1). Există însă destule cazuri particulare în care putem găsi o soluție particulară a ecuației(2), soluție care este un factor integrant pentru ecuația (1).

Exemple. 1) Ecuația cu variabile separabile (cu coeficienți de clasă C^1),

$$a_1(x)b_2(y)\, dx + a_2(x)b_1(y)\, dy = 0,\ a_2(x) \neq 0,\ \forall x \in I_1;\ b_2(y) \neq 0,\ \forall y \in I_2,$$

admite factorul integrant

$$\mu(x, y) = \frac{1}{a_2(x)b_2(y)}.$$

2) Ecuația liniară (cu coeficienți de clasă C^1),

$$[yf(x) + g(x)]\, dx - dy = 0$$

admite factorul integrant

$$\mu(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt}.$$

3) În ipotezele: $Q(x, y) \neq 0, \forall (x, y) \in \mathbb{D}$, μ și $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ depind explicit numai de x, ecuația care determină factorul integrant se reduce la ecuația diferențială liniară omogenă

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mu.$$

În ipotezele: $P(x, y) \neq 0$, $\forall (x, y) \in \mathbb{D}$, μ și $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$ depind explicit numai de y, ecuația care determină factorul integrant se reduce la ecuația diferențială liniară omogenă

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mu.$$

§7. Ecuația Clairaut

$y = xy' + \psi(y')$, unde ψ este o funcție de clasă C^1, $x \in I$, iar y admite derivată de ordinul doi pe I.

Se notează $y' = p$ și se derivează în raport cu x în ambii membri. Rezultă

$$\frac{dp}{dx}\left(x + \frac{d\psi}{dp}\right) = 0.$$

Din $\frac{dp}{dx} = 0$ deducem $p = c$ și deci $y' = c$. Introducînd în ecuația inițială găsim soluția generală a ecuației Clairaut și anume $y = cx + \psi(c)$.

Din $x + \frac{d\psi}{dp} = 0$, $y = xp + \psi(p)$ rezultă soluția singulară $x = -\frac{d\psi}{dp}$, $y = xp + \psi(p)$, care nu este altceva decît înfășurătoarea familiei de drepte de ecuații $y = cx + \psi(c)$.

Exemplu. Să se determine soluțiile ecuației

$$y'^2 + (x + 1)y' - y = 0.$$

Se observă că putem scrie $y = xy' + y'(1 + y')$. Notînd $y' = p$ și derivînd în ambii membri găsim $\frac{dp}{dx}(x + 2p + 1) = 0$. Rezultă soluția generală $y = cx + c(1 + c)$ și soluția singulară $x = -2p - 1$, $y = -p^2$, adică $y = -\frac{(x+1)^2}{4}$.

§8. Ecuația Lagrange

$y = x\varphi(y') + \psi(y')$, unde $\varphi(y') \neq y'$, φ și ψ sînt funcții de clasă C^1, $x \in I$, iar y admite derivată de ordinul doi pe I.

Notînd $y' = p$ și derivînd în raport cu x în ambii membri găsim $p - \varphi(p) = x\frac{d\varphi}{dp}\frac{dp}{dx} + \frac{d\psi}{dp}\frac{dp}{dx}$. Dacă $\frac{dp}{dx} \neq 0$, atunci privind pe x ca funcție de p, obținem ecuația liniară

$$(p - \varphi(p))\frac{dx}{dp} = x\frac{d\varphi}{dp} + \frac{d\psi}{dp}$$

cu soluția generală $x = x(p, c)$. Rezultă că soluția generală a unei ecuații Lagrange este definită parametric prin $x = x(p, c)$, $y = x(p, c)\,\varphi(p) + \psi(p)$.

Ipoteza $\frac{dp}{dx} = 0$ implică ecuația algebrică $p = \varphi(p)$. Soluțiile ecuației Lagrange corespunzătoare soluțiilor acestei ecuații algebrice sînt de regulă soluții singulare ale ecuației inițiale.

Exemplu. Ecuația

$$y = -2xy' - y'^2$$

admite soluția generală $x = cp^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{5}p$, $y = -\frac{p^2}{5} - 2cp^{\frac{1}{3}}$ și soluția singulară $y = 0$.

§ 9. Probleme

1. Să se determine soluții (generale, particulare, singulare) pentru următoarele ecuații diferențiale, precizîndu-se domeniul de definiție maxim posibil pentru fiecare caz în parte.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-x}{y-2}, \qquad (x\cos y)\frac{dy}{dx} + \sin y = 0 \qquad \text{(separabile)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad x\frac{dy}{dx} = x\sin\frac{y}{x} + y \qquad \text{(omogene)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-1}{x^2}y + 1, \qquad x\frac{dy}{dx} - y = \frac{x}{\ln x} \qquad \text{(liniare)}$$

$$\frac{dy}{dx} = -x^3y^2 + \frac{3y}{x}, \qquad x\frac{dy}{dx} - y^2\ln x + y = 0 \qquad \text{(Bernoulli)}$$

$$\frac{dy}{dx} = xy^2 - 2x^2y + x^3 + 1, \qquad \frac{dy}{dx} = y^2 - x^4 - 2x^2 + 2x - 1 \qquad \text{(Riccati)}$$

cu soluția $y_0 = x$ cu soluția $y_0 = x^2 + 1$

$$-y^2dx + (xy - x^2)dy = 0, \qquad (x+y+1)dx + (x-y^2+3)dy = 0 \qquad \text{(exacte)}$$

$$\mu(x, y) = -\frac{1}{x^2y}$$

$$y = xy' + \frac{5}{y'}, \qquad y = xy' + 3y'^2 \qquad \text{(Clairaut)}$$

$$y = 2xy' - y'^2, \qquad x + y = \left(\frac{y'+1}{y'-1}\right)^2 \qquad \text{(Lagrange)}$$

2. Să se determine traiectoriile ortogonale ale familiei de parabole $\Gamma_a : y^2 = ax$, $a \in \mathbb{R}$.

3. Să se găsească ecuația diferențială ce caracterizează familia de cercuri $C_a : x^2 + y^2 = ay$.

4. Să se rezolve următoarele probleme cu condiții inițiale

$$xy' - 2y = x^5,\ x \in (0, \infty),\ \text{cu } y = 1 \text{ pentru } x = 1;$$

$$y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \sin 2x,\ x \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ \text{cu } y = 2 \text{ pentru } x = 0.$$

5. Să se găsească soluțiile ecuației $xy' + y + 3y^2x \ln x = 0$, $x > 0$, al căror grafic este inclus în primul cadran.

6. Să se arate că soluția generală a ecuației

$$y'(1 - x^3) = y^2 - x^2y - 2x$$

este o familie de funcții raționale.

7. Să se arate că $\mu(x, y) = \frac{1}{x^2}$ este un factor integrant pentru $(x^2 - y)dx + xdy = 0$. Să se determine soluția generală a acestei ecuații utilizînd teorema 6.2.

8. Să se găsească curba a cărei tangentă formează cu axele de coordonate un triunghi de arie constantă.

9. Să se traseze curbele integrale ale ecuației

$$y'^2 + 2xy' + 2y = 0.$$

Capitolul 2

PROBLEME ȘI METODE DE REZOLVARE

§ 1. Aflarea soluțiilor prin metode analitice

Soluțiile unor ecuații diferențiale simple se pot obține cu ajutorul primitivelor (vezi Cap. 1), seriilor de puteri (vezi Cap. 3 § 4), valorilor și vectorilor proprii (vezi Cap. 3 § 5, Cap. 4 § 5) sau a artificiilor de calcul (vezi Cap. 3 § 6). În general însă aceste metode prezintă dezavantaje de tipul următor :

— există ecuații diferențiale a căror soluție nu se poate scrie ca o combinație de funcții elementare și de primitive din astfel de funcții (de exemplu ecuații Riccati),

— expresia complicată care dă soluția explicită este adesea mai puțin utilă decît o aproximare a sa etc.

§ 2. Probleme Cauchy

Principiul reducerii. Orice ecuație diferențială de ordinul n, de forma numită *normală*,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

poate fi scrisă ca un sistem de n ecuaţii de ordinul întîi. Într-adevăr, dacă punem $y_1 = y$, $y_2 = y'$, $y_3 = y''$, ..., $y_n = y^{(n-1)}$, atunci

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \dots \quad \dots \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases}$$

Ţinînd seama de această observaţie este suficient să facem raţionam entele pur teoretice numai pe sisteme de ecuaţii de ordinul întîi scrise sub forma normală,

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \dots, y_n), \quad x \in I, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Găsirea funcţiilor $x \to y_i(x)$ care verifică condiţiile $y_i(x_0) = y_{i0} \in \mathbb{R}$ poartă numele de *problema lui Cauchy* (problemă locală). Numerele x_0, y_{i0} se numesc *condiţii iniţiale.*

2.1. Teorema de existenţă şi unicitate. Dacă funcţiile reale $(x, y) \to f_i(x, y)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ sînt de clasă C^0 pe o mulţime deschisă şi conexă $\mathbb{D} = I \times U$ din $\mathbb{R}^{n+1}$, iar funcţiile parţiale $y \to f_i(x, y)$ sînt de clasă C^1, atunci $\forall\, (x_0, y_0) \in \mathbb{D}$ există o soluţie unică $x \to y(x)$ definită pe o vecinătate a lui x_0 care verifică condiţiile $y_i(x_0) = y_{i0}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Demonstraţie. Mai întîi observăm că $y : I \to U$ este o soluţie a problemei Cauchy (notaţii vectoriale)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

dacă şi numai dacă

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt.$$

Pentru simplificarea raţionamentului presupunem că funcţia $f = (f_1, \dots, f_n)$ este de clasă C^1 pe $\mathbb{D}$. În această ipoteză formula creşterilor finite arată că $\exists\, c > 0$ astfel încît $\|f(x, y) - f(x, z)\| \leqslant c\,\|y - z\|$, de îndată ce punctele (x, y), (x, z) aparţin unui hiperparalelipiped închis $J \times V \subset I \times U$ cu centrul în punctul (x_0, y_0).

Fie $J_r = [x_0 - r, x_0 + r] \subset J$ şi $r < \dfrac{1}{c}$. Notăm cu M mulţimea funcţiilor continue $y : J_r \to V$ cu proprietatea $y(x_0) = y_0$. Mulţimea M este un spaţiu metric complet în raport cu distanţa $d(y, z) = \sup\limits_{x \in J_r} \|y(x) - z(x)\|$. Definim aplicaţia $y \to \varphi(y)$, $(\varphi(y))(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$.

Evident $(\varphi(y))(x_0) = y_0$ şi din continuitatea lui y rezultă continuitatea lui $\varphi(y)$; deci $\varphi : M \to M$. Mai mult, φ este o contracţie. Într-adevăr

$$d(\varphi(y), \varphi(z)) = \sup_{x \in J_r} \|(\varphi(y))(t) - (\varphi(z))(t)\| = \sup_{x \in J_r} \left\| \int_{x_0}^{x} (f(t, y(t)) - f(t, z(t)))\, dt \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x\in J_r}\int_{x_0}^{x} \|f(t, y(t)) - f(t, z(t))\| \, dt \leqslant \sup_{x\in J_r}\int_{x_0}^{x} c\|y(t)-z(t)\| dt \leqslant c|x-x_0| d(y, z) \leqslant$$

$\leqslant crd(y, z)$ şi $cr < 1$ prin ipoteză. Rezultă că φ este o contracţie şi deci există un punct unic $y \in M$ astfel încît $\varphi(y) = y$, adică o funcţie unică $y : J_r \to V$ astfel încît $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t)) \, dt$.

Principii pentru condiţiile iniţiale. (1) Pentru o ecuaţie diferenţială de ordinul n condiţiile iniţiale constau din punctul x_0 şi din valorile $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

(2) Dacă avem un sistem de ecuaţii diferenţiale cu funcţiile necunoscute $y_1, \ldots, y_n$, iar $m_1, \ldots, m_n$ sînt respectiv ordinele maxime ale derivatelor lui $y_1, \ldots, y_n$, atunci condiţiile iniţiale constau din punctul x_0 şi din valorile

$$y_1(x_0) = y_{10}, \; y'_1(0) = y'_{10}, \ldots, y_1^{(m_1-1)}(x_0) = y_{10}^{(m_1-1)},$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$y_n(x_0) = y_{n0}, \; y'_n(x_0) = y'_{n0}, \ldots, y_n^{(m_n-1)}(x_0) = y_{n0}^{(m_n-1)}.$$

Pentru rezolvarea numerică a problemei lui Cauchy se poate aplica metoda Euler şi metoda Runge-Kutta.

§ 3. Metoda Euler

Fie problema Cauchy

$$y' = f(x, y), \; y(x_0) = y_0,$$

în care $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verifică condiţiile din teorema de existenţă şi unicitate. Conform acestei teoreme există o soluţie $x \to y(x)$, $x \in [a, b] \subset I$, dar explicitarea sa exactă nu este întotdeauna posibilă. Dacă se reuşeşte să se aproximeze valorile acestei soluţii în punctele $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$ din $[a, b]$, fie cu ajutorul unui polinom de aproximare fie cu ajutorul funcţiilor spline, se spune că soluţia a fost determinată aproximativ.

Folosim o diviziune a intervalului $[a, b]$ prin puncte echidistante, pasul fiind $h = \dfrac{b-a}{n}$. Prin integrare pe intervalul $[x_k, x_{k+1}]$, $x_{k+1} = x_k + h$, ecuaţia diferenţială se transformă în ecuaţia integrală

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t, y(t)) \, dt,$$

cu necunoscuta $y(x_k)$ pentru fiecare $k = 0, 1, 2, \ldots$ Notînd prin y_k^* o aproximare a lui $y(x_k)$ și aplicînd metoda dreptunghiurilor găsim relația de recurență

$$y_{k+1}^* = y_k^* + hf(x_k, y_k^*), \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Procedeul de aproximare a soluției problemei Cauchy prin valorile determinate de această ecuație cu diferențe finite este cunoscut sub numele de *metoda Euler*. Această metodă este interesantă mai mult prin valoarea ei metodologică și mai puțin prin rezultatele la care conduce (dă erori mari!)

Cazul $y \in \mathbb{R}^n$ este analog celui precedent și se rezolvă prin sistemul cu diferențe finite (notații vectoriale)

$$y_{k+1}^* = y_k^* + hf(x_k, y_k^*), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Evaluarea erorii absolute este descrisă de teorema care urmează.

3.1. Teoremă. Dacă $\varepsilon(x) = y(x) - y^*(x)$ este diferența între soluția exactă și soluția aproximativă, atunci există o constantă $M > 0$ astfel încît $\| \varepsilon(x) \| \leqslant e^{Mx} o(h)$.

Demonstrație. Folosind $\varepsilon_k = y_k^* - y(x_k)$ obținem

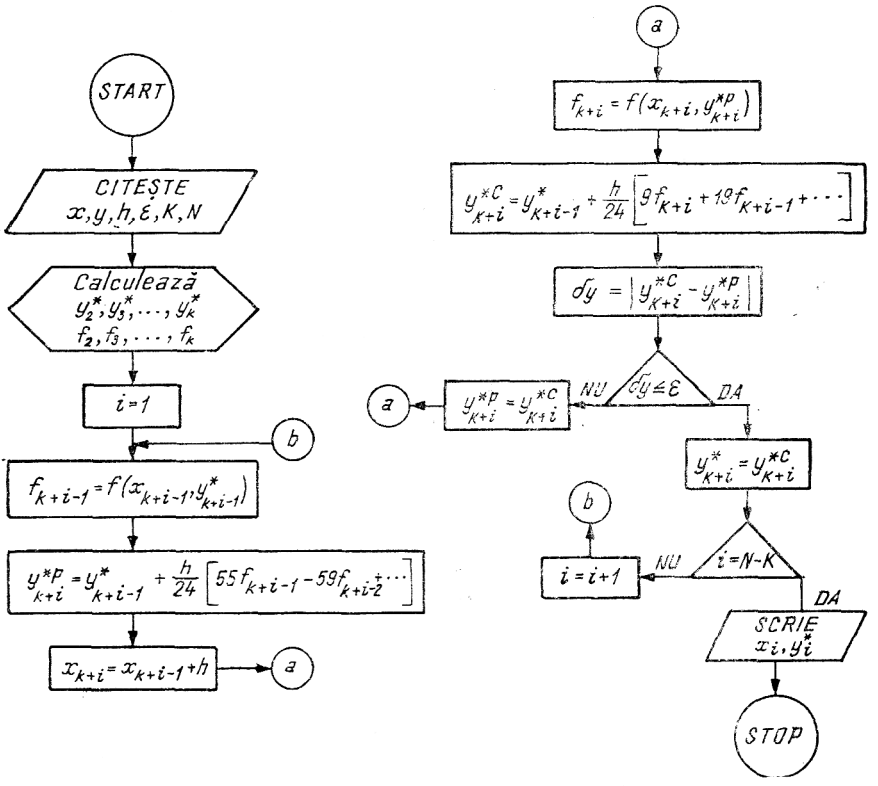
$$\frac{\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k}{h} = \frac{y_{k+1}^* - y(x_{k+1}) - (y_k^* - y(x_k))}{h} =$$

$$= \frac{y_{k+1}^* - y_k^*}{h} - \frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h} = f(x_k, y_k^*) - \frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h}.$$

Diferențiabilitatea lui y implică $y(x_{k+1}) = y(x_k + h) = y(x_k) + hy'(x_k) + o(h^2)$ așa încît $y(x_{k+1}) - y(x_k) = hy'(x_k) + o(h^2) = hf(x_k, y(x_k)) + o(h^2)$. Deci $\dfrac{\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k}{h} = f(x_k, y_k^*) - f(x_k, y(x_k)) + o(h^2)$ și conform teoremei creșterilor finite avem $\|f(x_k, y_k^*) - f(x_k, y(x_k))\| = \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\xi} \|y_k^* - y(x_k)\| \leqslant$ $\leqslant \sup\limits_{x \in I} \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right| \|y_k^* - y(x_k)\| = M\|y_k^* - y(x_k)\| = M\|\varepsilon_k\|$. Rezultă $\|\varepsilon_{k+1}\| \leqslant \|\varepsilon_k\| + hM\|\varepsilon_k\| + o(h^2)$ sau $\|\varepsilon_{k+1}\| \leqslant (1 + hM)\|\varepsilon_k\| + o(h^2)$. După N pași se obține $\|\varepsilon_N\| \leqslant \|\varepsilon_{N-1}\|(1 + hM) + o(h^2) \leqslant \|\varepsilon_{N-2}\|(1 + hM)^2 + o(h^2) + (1 + hM)o(h^2) \leqslant \ldots \leqslant \|\varepsilon_0\|(1+hM)^N + o(h^2)[1+(1+hM)+(1+hM)^2 + \ldots + (1 + hM)^{N-1}]$, unde $\varepsilon_0 = y_0^* - y(x_0) = 0$. Deci $\|\varepsilon_N\| \leqslant \dfrac{(1 + hM)^N - 1}{hM} o(h^2)$ și observăm că pentru x fixat și $h = x/N$ avem $\lim\limits_{h \to 0} (1 + hM)^N = \lim\limits_{h \to 0} (1 + hM)^{x/h} = e^{Mx}$. De aceea

$$\|\varepsilon(x)\| \leqslant \frac{e^{Mx} - 1}{hM} o(h^2) \leqslant e^{Mx} \frac{o(h^2)}{hM} \leqslant e^{Mx} o(h).$$

Dăm următoarea schemă logică pentru metoda Euler modificată (predictor—corector).



Exemple. 1) Să se calculeze, cu o eroare $\varepsilon = \frac{1}{100}$, valoarea soluţiei $x \to y(x)$ a problemei Cauchy

$$y' = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} xy^2, \quad y(0) = 0,$$

în punctul $x = \frac{1}{400}$.

Soluţie. Ecuaţia diferenţială este de tip Riccati şi nu dispunem de un procedeu pentru aflarea soluţiei exacte deşi se verifică condiţiile de existenţă şi unicitate a soluţiei. Într-adevăr

— funcţia $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} xy^2$ este de clasă C^∞,

— funcţia parţială $y \to f(x, y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} xy^2$ este de clasă C^∞.

Cu notaţiile din § 2, fie $J = [-1, 1]$, $V = [-1, 1]$. Deoarece

$$(x, y), (x, z) \in J \times V \Rightarrow |f(x, y) - f(x, z)| = \frac{1}{3} |x| \, |y - z| \, |y + z| \leqslant \frac{2}{3} |y - z|,$$

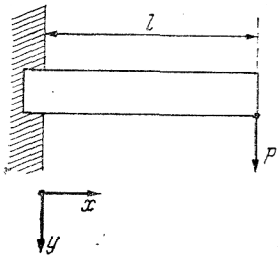


Fig. 2

rezultă $c = \frac{2}{3}$ şi deci $r < \frac{3}{2}$. Punem $r = 1$. Conform teoriei, ecuaţia admite soluţia $y : [-1, 1] \to \mathbb{R}$. Fixînd $h = \frac{1}{800}$, găsim $y\left(\frac{1}{400}\right) = 0{,}00125$.

2) *Bară supusă la încovoiere.*

Fie o bară de lungime l, încastrată la un capăt şi supusă la capătul liber unei sarcini P (fig. 2). Alegînd reperul cartezian ca în figură, capătul încastrat este caracterizat de ecuaţia $x = 0$. Variabila y va măsura încovoierea barei. Dacă E este modulul lui Young, iar I este momentul de inerţie al secţiunii transversale a barei în raport cu o dreaptă care trece prin centrul de greutate al secţiunii şi este perpendiculară pe planul xOy, se poate arăta că deformaţia la încovoiere satisface ecuaţia diferenţială $y'' = \frac{P}{EI}(1 - x)(1 + y'^2)^{3/2}$ în ipoteza că tensiunile din bară rămîn în domeniul elastic, adică $P \leqslant P_0$. Întrucît bara este încastrată în $x = 0$ se impun valorile $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. Dacă P este relativ mic, atunci panta y' a încovoierii este mică aşa încît y'^2 poate fi neglijat şi ecuaţia devine $y'' = \frac{P}{EI}(l - x)$ cu soluţia $y(x) = \frac{P}{6EI}x^2(3l - x)$.

Dacă P este mare atunci y cît şi y' devin mari în comparaţie cu unitatea, iar termenul y'^2 nu mai poate fi neglijat aşa încît, în acest caz, pentru obţinerea soluţiei vom aplica o metodă numerică. Anume, reducem ecuaţia la un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi $y' = z$, $z' = k(l - x)(1 + z^2)^{3/2}$, $K = P/EI$, cu condiţiile iniţiale $y(0) = 0$, $z(0) = 0$. Algoritmul metodei numerice pe care o folosim se compune din următorii paşi : (1) notăm $f(x, z) = k(l - x) \cdot (1 + z^2)^{3/2}$, (2) utilizăm metoda Euler pentru a calcula y_1^* şi z_1^* reţinînd că $y_0^* = y(0) = 0$, $z_0^* = z(0) = 0$; deci $y_1^* = klh^2/2$, $z_1^* = \frac{h}{2}[kl + f(h, klh)]$, (3) se prezic valorile y_{k+1}^*, z_{k+1}^* luînd $y_{k+1}^{*(0)} = y_{k-1}^* + 2hz_k^*$, $z_{k+1}^{*(0)} = z_{k-1}^* + 2hf(x_k^*, z_k^*)$ pentru $k = 1, 2, 3, \ldots$, (4) se cercetează y_{k+1}^*, z_{k+1}^* luînd $y_{k+1}^{*(i)} = y_k^* + \frac{h}{2}[z_k^* + z_{k+1}^{*(i-1)}]$, $z_{k+1}^{*(i)} = z_k^* + \frac{h}{2}[f(x_k, z_k^*) + f(x_{k+1}, z_{k+1}^{*(i-1)})]$, $i = 1,2,3 \ldots$; iteraţiile se opresc de îndată ce $|z_{k+1}^{*(i)} - z_{k+1}^{*(i-1)}| < \varepsilon$, ε impus iniţial, (5) se face o ultimă corecţie a lui z_{k+1}^*, estimînd eroarea de trunchiere folosind $e_T = \frac{1}{5}(z_k^{*(0)} - z_k^{*(i)})$ şi luînd apoi $z_{k+1}^* = z_k^{*(i)} + e_T = z_k^{*(i)} + \frac{1}{5}(z_k^{*(0)} - z_k^{*(i)})$, (6) înlocuim în expresia lui $y_{k+1}^{*(i)}$, pe $z_{k+1}^{*(i-1)}$ cu valoarea z_{k+1}^* şi obţinem $y_{k+1}^* = y_k^* + \frac{h}{2}(z_k^* + z_{k+1}^*)$.

Pentru calcule s-a ales $l = 100$ m, $E = 10^7$, $I = 0{,}128$, bara fiind din duraluminiu. S-a rulat un program FORTRAN, pentru algoritmul descris mai sus, în care P a luat diferite valori, iar $h = 2$ şi $h = 4$. Rezultatele obţinute s-au trecut în tabelul din pagina următoare.

Sarcina (P)	Deformația (y)	Eroarea
10	2,605	0,03
20	5,219	0,21
30	7,850	0,48
40	10,505	0,84
50	13,195	1,32
60	15,929	1,91
70	18,719	2,62
80	21,575	3,44
90	24,512	4,38
100	27,546	5,46

§4. Metoda Runge-Kutta

Pentru simplificare considerăm un sistem autonom de ecuații diferențiale $y' = f(y)$, cu condiția inițială $y(x_0) = y_0$, unde x_0, y_0 sînt date. Admitem, f de clasă C^2 într-un domeniu $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^m$. Fie $h > 0$ un pas de integrare fixat, fie formula Taylor $y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + o(h^3)$ sau $y(x+h) = y(x) + hf(y(x)) + \frac{h^2}{2} f'(y(x)) \cdot f(x) + o(h^3)$ și $k_1 = hf(y)$, $k_2 = hf(y + \lambda_{21}k_1)$, $k_3 = hf(y + \lambda_{31}k_1 + \lambda_{32}k_2)$, $k_4 = hf(y + \lambda_{41}k_1 + \lambda_{42}k_2 + \lambda_{43}k_3), \ldots$, în care λ_{ij} sînt constante deocamdată nedeterminate.

Ideea metodei Runge-Kutta constă în a determina parametrii λ_{ij} și α_i astfel încît coeficienții puterilor lui h, din membrul drept al lui $y(x + h)$ și din suma $y + \sum_{i=1}^{s} \alpha_i k_i$, să coincidă pînă la puteri cît mai mari, adică să putem adopta aproximarea,

$$y(x + h) \simeq y(x) + \sum_{i=1}^{s} \alpha_i k_i.$$

Pentru ușurință vom efectua calculele în cazul $s = 2$. Ținînd seama de formula Taylor găsim $k_2 = hf(y) + h\lambda_{21}k_1 \frac{df}{dy} + h \frac{\lambda_{21}^2}{2} k_1^2 \frac{d^2f}{dy^2} + o(k_1^3) = hf(y) + \lambda_{21}h^2 f(y) \cdot f'(y) + \lambda_{21}^2 \frac{h^3}{2} f^2(y) \cdot f''(y) + o(h^4)$, unde $k_1 = hf(y)$.

Atunci

$$y + \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 = y + h(\alpha_1 + \alpha_2)f(y) + h^2\alpha_2\lambda_{21}f(y)f'(y) + \frac{h^3}{2}\alpha_2\lambda_{21}^2 f^2(y)f''(y) + o(h^4).$$

Comparînd cu membrul al doilea al lui $y(x + h)$, din egalitatea coeficienților lui h și h^2 obținem $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $\alpha_2 \cdot \lambda_{21} = 1/2$. Notînd $\alpha_2 = \lambda$ găsim $\alpha_1 = 1 - \lambda$, $\alpha_2 = \lambda$, $\lambda_{21} = \frac{1}{2\lambda}$. Rezultă sistemul cu diferențe finite

$$y_{k+1}^* = y_k^* + (1 - \lambda)k_1 + \lambda k_2,$$

unde $y_0^* = y_0$, $k_1 = hf(y_k^*)$, $k_2 = hf\left(y_k^* + \frac{1}{2\lambda} k_1\right)$ care aproximează $y' = f(y)$ cu o precizie pînă la termenii de gradul doi, inclusiv, în raport cu h. Acest sistem a fost obţinut prin alegerea unei diviziuni $x_0, x_1, \ldots, x_n$ a intervalului $[x_0, T]$, în care este definită funcţia necunoscută y, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h, \ldots$, iar $y_k^* \simeq y(x_k)$.

Un caz des întîlnit în aplicaţii este cazul $s = 4$ definit de sistemul

$$y_{k+1}^* = y_k^* + \frac{1}{6}[k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4], \tag{1}$$

unde $k_1 = hf(y_k^*)$, $k_2 = hf(y_k^* + 1/2k_1)$, $k_3 = hf(y_k^* + 1/2k_2)$, $k_4 = hf(y_k^* + k_3)$.

Pentru $s = 4$, sistemul diferenţial $y' = f(x, y)$, cu condiţia iniţială $y(x_0) = y_0$, se reduce la sistemul cu diferenţe finite (1) dar în care $k_1 = hf(x_k, y_k^*)$, $k_2 = hf\left(x_k + h/2,\ y_k^* + \frac{k_1}{2}\right)$, $k_3 = hf\left(x_k + h/2,\ y_k^* + \frac{k_2}{2}\right)$, $k_4 = hf(x_k + h,\ y_k^* + k_3)$.

Observaţii. (1) Metodele de tip Runge-Kutta sînt metode cu *un singur pas* dar care necesită calculul de s ori a valorii funcţiei f la fiecare pas al procesului de integrare. Spre deosebire de metodele de aproximaţii succesive (Euler) care necesită calculul anterior al punctelor de pornire, metodele Runge-Kutta au autostart.

(2) Metodele Runge-Kutta pot fi exprimate prin sistemul cu diferenţe finite de forma

$$y_{k+1}^* = y_k^* + hg(y_k^*, h), \tag{2}$$

unde $g(y_k^*, h) = \alpha_1 f(y_k^*) + \alpha_2 f(y_k^* + \lambda_{21} hf(y_k^*) + \ldots) + \ldots$

4.1. *Definiţie. Metoda Runge-Kutta dată prin* (2) *se numeşte consistentă dacă* $g(y, 0) = f(y)$.

4.2. Teoremă. Presupunem că funcţia $(y, h) \to g(y, h)$, $h > 0$, $y \in \mathbb{R}^m$, este continuă, iar $y \to g(y, h)$ este lipschitziană, adică $\|g(y_1, h) - g(y_2, h)\| \leqslant M\|y_1 - y_2\|$, $M =$ constant. Metoda Runge-Kutta este *convergentă* dacă şi numai dacă este consistentă.

Întrucît condiţia de consistenţă este satisfăcută, adică $\sum_{i=1}^{s} \alpha_i = 1$, rezultă că metodele Runge-Kutta sînt convergente.

4.3. Teoremă. Dacă $\varepsilon_k = \| y(x_k) - y_k^* \|$ este eroarea prin metoda Runge-Kutta, exprimată de sistemul (2), atunci $\varepsilon_k \leqslant \frac{e^{khM} - 1}{M} o(h^s)$, unde s este ordinul metodei.

Demonstraţie. Din sistemul (2) în care substituim soluţia exactă y avem $y(x_{k+1}) = y(x_k) + hg(y(x_k), h) + o(h^{s+1})$. Scăzînd pe (2) din această egalitate şi avînd în vedere că g este o funcţie lipschitziană obţinem $\varepsilon_{k+1} \leqslant (1 + Mh)\varepsilon_k + Lo(h^{s+1})$, unde $L > 0$ este o constantă pozitivă, iar M este constanta lui Lipschitz. Prin inducţie se arată că

$\varepsilon_k \leqslant (1 + hM)^k \varepsilon_0 + \dfrac{(1 + Mh)^k - 1}{hM} Lo(h^{s+1})$ şi, cum $\varepsilon_0 = 0$, rezultă inegalitatea din enunţul teoremei.

O b s e r v a ţ i e. Evaluarea erorii prin teorema 4.3 este neconvenabilă în practică, deoarece necesită cunoaşterea constantelor M şi M^*. Pentru a evita această situaţie se poate construi o formulă semiempirică pentru estimarea erorii, care se produce într-un singur pas al integrării. Anume dacă presupunem $y(x_k) \simeq y_k^* + Ah^s$, $A =$ = constantă, şi dacă executăm un pas al integrării de lungime h şi doi paşi de lungime $h/2$, începînd de la acelaşi punct x_k, atunci $y(x_{k+1}) \simeq y_{k+1}^* + Ah^s \simeq y_{k+2}^* + 2A\left(\dfrac{h}{2}\right)^s$. De aici $A \simeq \dfrac{y_{k+1}^* - y_{k+2}^*}{h\left(\dfrac{1}{2^{s-1}} - 1\right)}$.

Însumînd erorile locale $|A|\, h^s$, după efectuarea unui anumit număr de paşi, obţinem *estimarea aproximativă a erorii.*

Schema logică şi o variantă de program FORTRAN pentru metoda Runge-Kutta de ordinul patru ($s = 4$) sînt date în figura 3 şi respectiv în figura 4.

Variantă de program

```
  DIMENSION X(100), Y(100)
  DATA H/0.01/, X(1)/0.01, Y(1)/1.0/
  READ (105,1) N
1 FORMAT (7X,I2)
  DO 2 K = 2,N
  X(K) = X(K - 1) + H
  RK1 = H*F(X(K - 1), Y(K - 1))
  RK2 = H*F(X(K - 1)+H/2,Y(K-1)+
        + RK1/2)
  RK3 = H*F(X(K-1)+H/2, Y(K-1)+
        +RK2/2)
  RK4 = H*F(X(K - 1)+H, Y(K - 1)+
        +RK3)
  Y(K) = Y(K-1)+1./6.*(RK1+
*       +2*RK2+2*RK3+RK4)
2 CONTINUE
  WRITE (108,3) Y(K)
3 FORMAT (3X, E14.6)
  STOP
  END
```

Fig. 3

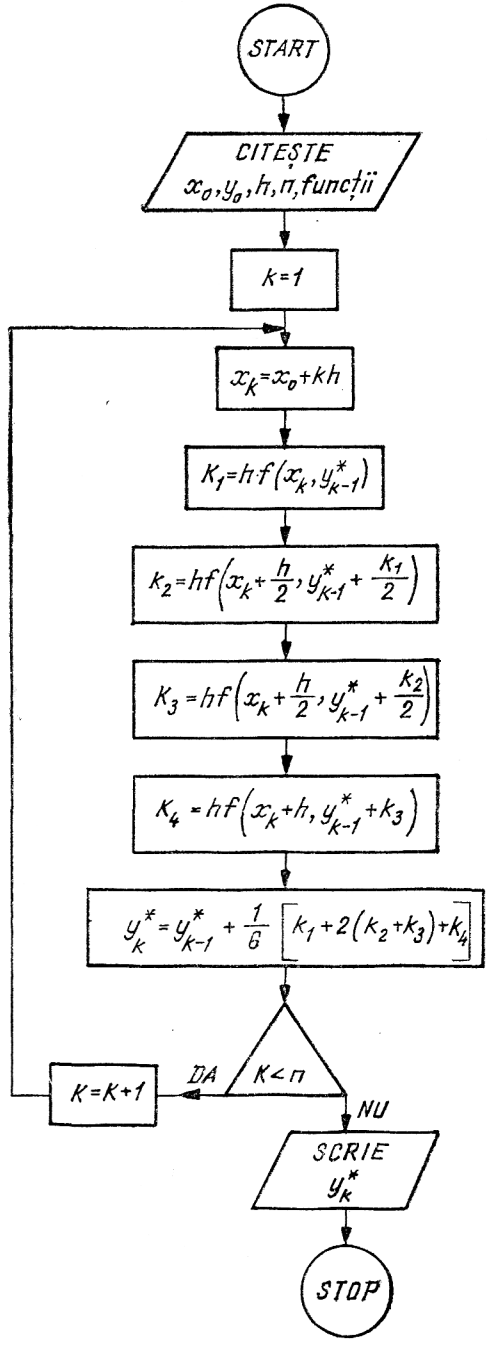


Fig. 4

§5. Stabilitatea soluțiilor

O problemă practică importantă este aceea a determinării comportării unui sistem fizic în vecinătatea unei stări de echilibru. Dacă sistemul revine la această stare după ce a fost supus unor perturbații mici, atunci el se numește *stabil*; dacă nu revine, se numește *instabil*. De obicei sistemele instabile conduc la catastrofe.

Verificarea stabilității unui sistem fizic se poate face pe cale experimentală, dar acest lucru este costisitor și reclamă o mare durată de timp. De aceea, în proiectarea sistemelor sînt de preferat criteriile matematice pentru stabilitate.

Să considerăm un sistem fizic a cărui comportare în timp este descrisă de *sistemul autonom* (nu conține explicit variabila independentă)

$$\frac{dy}{dt} = f(y),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n,\ \ f = (f_1, \ldots, f_n), \tag{1}$$

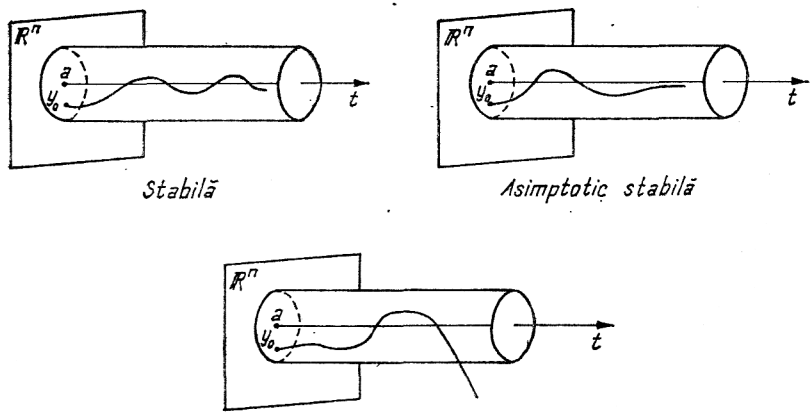
f fiind de fapt un cîmp vectorial pe $\mathbb{D}$.

Dacă a este un punct pentru care $f(a) = 0$, atunci $y = a$ este o soluție a sistemului (1) care verifică condițiile inițiale $y(t_0) = a$. O astfel de soluție se numește *poziție (punct) de echilibru*. Din punct de vedere intuitiv spunem că poziția de echilibru a este stabilă dacă orice soluție a lui (1) ce pleacă la $t = t_0$ dintr-un punct suficient de apropiat de a rămîne pentru $t > t_0$ într-o vecinătate a lui a. Presupunem că f este de clasă C^1 pe $\mathbb{D}$ și notăm cu $t \to y(t, y_0)$ soluția lui (1) care verifică condițiile inițiale $y(t_0, y_0) = y_0$.

5.1. *Definiție*

Poziția de echilibru a sistemului (1) *se numește* (fig. 5): (*i*) *stabilă, dacă există o vecinătate V a lui a astfel încît $y_0 \in V$ să implice existența soluției $t \to y(t, y_0)$, $t \in [t_0, \infty)$ și dacă $\lim\limits_{y_0 \to a} y(t, y_0) = a$, $\forall t \in [t_0, \infty)$;*

(ii) *asimptotic stabilă, dacă este stabilă și dacă există o vecinătate $U \subset V$ a lui a astfel încît $y_0 \in U$ să implice $\lim\limits_{t \to \infty} y(t, y_0) = a$.*



Graficul soluției

Fig. 5

Definiţiile precedente se pot extinde şi la sisteme neautonome, iar teoria stabilităţii dă răspunsuri la asemenea probleme utilizînd informaţiile pe care le avem despre cîmpul vectorial $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Noi vom formula teorema numai pentru unele cazuri particulare (vezi cap. 1, § 3; cap. 3, § 6; cap. 4, § 5; cap. 5, § 2).

Exemplu. Sistemul autonom $\frac{dx}{dt} = y$, $\frac{dy}{dt} = -x$ admite poziţia de echilibru $(0, 0)$. Derivînd prima ecuaţie în raport cu t şi ţinînd seama de a doua obţinem ecuaţia $\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$ (ecuaţia oscilaţiilor mici ale pendulului în vecinătatea poziţiei inferioare de echilibru) cu soluţia generală $x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$. Deci $y(t) = c_2 \cos t - c_1 \sin t$.

Fie condiţiile iniţiale $t = 0, x(0) = x_0, y(0) = y_0$. Soluţia care le satisface este $x(t) = x_0 \cos t + y_0 \sin t$, $y(t) = y_0 \cos t - x_0 \sin t$. Ipoteza $|x_0| < \delta$, $|y_0| < \delta$ implică $|x(t)| \leqslant |x_0| + |y_0| < 2\delta$, $|y(t)| \leqslant |x_0| + |y_0| \leqslant 2\delta$. Notînd $2\delta = \varepsilon$ putem scrie $|x(t)| < \varepsilon$, $|y(t)| < \varepsilon$, $\forall t > 0$. Astfel poziţia de echilibru $(0, 0)$ este stabilă. Ea nu este asimptotic stabilă deoarece $\lim\limits_{t \to \infty} x(t)$ nu există.

§6. Probleme la limită

Ecuaţiile diferenţiale la care se pun asemenea probleme trebuie să fie cel puţin de ordinul doi.

Fie $y'' = f(x, y, y')$, $x \in [a, b]$. Găsirea soluţiei $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ în condiţiile (la limită) $\varphi(y(a), y'(a)) = 0$, $\varphi(y(b), y'(b)) = 0$ se numeşte *problemă la limită* (bilocală). Pentru rezolvarea numerică a unei asemenea probleme este potrivită *metoda diferenţelor finite* pe care o explicităm pe cazul particular

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$

$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \quad \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B,$$

soluţia y fiind presupusă de clasă C^4. Se fac notaţiile $x_0 = a$, $x_n = b$, $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = x_0 + ih$, $p_i = p(x_i)$, $q_i = q(x_i)$, $f_i = f(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Admiţînd aproximările

$$y_i' \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad y_i'' \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

obţinem sistemul algebric liniar

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$\alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = A, \quad \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = B$$

de $n+1$ ecuații cu $n+1$ necunoscute $y_0, y_1, \ldots, y_n$. Dacă acesta este compatibil, atunci soluția sa procură valori ale soluției problemei la limită

x	$x_0 = a$	$x_1 \ldots$	$x_n = b$
y	y_0	$y_1 \ldots$	y_n

Pentru evaluarea erorii se utilizează formula

$$|y_i - y_i(x)| \leqslant \frac{h^2 M}{96}(b-a)^2,$$

unde $M = \max\limits_{x \in [a,b]} |y^{(4)}(x)|$, iar $y(x_i)$ este valoarea exactă.

Pentru a pune în evidență modul în care se formulează o problemă la limită pentru ecuații de ordin superior lui doi considerăm un exemplu din rezistența materialelor.

Dacă rigiditatea la încovoiere EI și sarcina transversală q sînt constante, atunci ecuația diferențială de echilibru și condițiile la limită pentru grinda solicitată la încovoiere cu forță axială constantă P sînt

$$y^{(4)} + k^2 y^{(2)} = \frac{q}{EI}, \quad k^2 = \frac{P}{EI}$$

$$y(0) = 0, \; y(l) = 0$$

$$y^{(2)}(0) = -\frac{M_0}{EI}, \quad y^{(2)}(l) = -\frac{M_l}{EI},$$

unde M_0, M_l sînt momentele concentrate la capete, iar y reprezintă săgeata (fig. 6). Soluția generală a ecuației este (vezi Cap. 3, § 5, 6)

$$y = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx + \frac{qx^2}{2EIk^2} + c_3 x + c_4,$$

iar soluția care satisface condițiile la limită este

$$y = \frac{1}{k^2 EI}\left\{\left(M_0 + \frac{q}{k^2}\right)(\cos kx - 1) + \frac{\sin kx}{\sin kl}\left[M_l - M_0 \cos kl + \frac{q}{k^2}(1 - \cos kl)\right] - \right.$$

$$\left. - \left[M_l - M_0 + \frac{ql}{2}(l - x)\right]\frac{x}{l}\right\}.$$

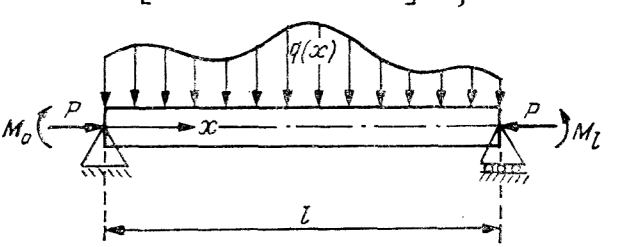


Fig. 6

§7. Probleme

1. Să se găsească soluţii pentru următoarele ecuaţii

$$y'^2 - (x^2 + y^2)y' + x^2y^2 = 0,\ x^2 + y'^2 = 1,\ \ x = yy' + y'^2.$$

2. Să se cerceteze valabilitatea teoremei de existenţă şi unicitate pentru

$$y' = -\sqrt[3]{y-2},\quad y^{(4)} = e^{-x},\quad \begin{cases} 2x\dfrac{dx}{dt} = \ln y - x^2 \\ 2\dfrac{dy}{dt} = x^2y + y\ln y \end{cases},\ x \in \mathbb{R},\ y > 0.$$

3. Se consideră ecuaţia diferenţială $y' = \dfrac{2y^2 + x}{3y^2 + 5}$.

1) Să se găsească locul geometric al punctelor critice ale soluţiilor acestei ecuaţii.

2) Să se verifice dacă $x = 0$ este sau nu punct de extrem local pentru soluţia care satisface condiţiile iniţiale $x = 0$, $y = 0$.

4. Fie o funcţie reală care verifică ecuaţia diferenţială

$$xf''(x) + 3x(f'(x))^2 = 1 - e^{-x},\ x \in \mathbb{R}.$$

1) Să se arate că dacă x_0 este un punct de extrem local al lui f, atunci x_0 este un punct de minim (cazul $x_0 = 0$ se va discuta separat).

2) Presupunem $f(0) = f'(0)$. Să se determine cea mai mică constantă a astfel încît $f(x) \leqslant ax^2$, $\forall x \geqslant 0$.

5. Să se rezolve următoarele probleme Cauchy:

$$x^2 - y^2 = 5xyy',\ y(1) = 0;$$

$$y'\cos x + y\sin x + 4\cos^3 x = 0,\ y(\pi) = 1;$$

$$y''' = e^x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = -1.$$

6. Să se aproximeze soluţia, prin metoda Euler, în fiecare din cazurile

1) $y' = y^2$, $y(0) = 1$, $x \in [0, 1]$

2) $y' = \sqrt{1 - x^2y^2}$, $y(0) = 0$, $x \in [0, 1]$

3) $y' = x + y^4$, $y(0) = 1$, $x \in [0, 2]$.

7. Să se aproximeze soluţia, prin metoda Runge-Kutta, în fiecare din cazurile

1) $y' = y^3 - x$, $y(0) = 1$, $x \in [0, 1]$, $h = 0{,}1$

2) $y' = \sqrt{x + y}$, $y(0) = 2$, $x \in [0, 10]$, $h = 0{,}2$

3) $y' = e^{-y} + x^2$, $y(0) = 1/2$, $x \in [0, 1]$, $h = 0{,}05$.

8. Să se cerceteze stabilitatea poziţiilor de echilibru pentru

$$1)\ \frac{dx}{dt} = x;\quad 2)\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x \\ \dfrac{dy}{dt} = -y \end{cases};\quad 3)\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -\sin x \end{cases}$$

9. Să se rezolve problemele la limită

1) $y'' + xy' = 0,\ y(0) = y(1) = 1$

2) $y'' + y' \sin x = 0,\ y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$

Capitolul 3

ECUAŢII DIFERENŢIALE LINIARE

§1. Generalităţi

O ecuaţie diferenţială de forma

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x),\ y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k},$$

unde $a_i,\ f \in C^0(I),\ i = 0, 1, \ldots, n,\ a_0 \neq 0$, iar $y \in C^n(I)$ este funcţia necunoscută, se numeşte *ecuaţie diferenţială liniară de ordinul n*. Dacă $f = 0$, ecuaţia se numeşte *omogenă*, iar dacă $\exists x \in I$ astfel încît $f(x) \neq 0$, atunci ecuaţia se numeşte *neomogenă*. Funcţiile a_i se numesc *coeficienţii ecuaţiei*.

Considerăm funcţia

$$\mathscr{L} : C^n(I) \to C^0(I),\quad \mathscr{L}(y) = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y.$$

Prin calcule directe se dovedeşte că $\mathscr{L}$ este un operator liniar, adică

$$\mathscr{L}(y_1 + y_2) = \mathscr{L}(y_1) + \mathscr{L}(y_2),\ \mathscr{L}(cy) = c\mathscr{L}(y),\ c \in \mathbb{R}.$$

Denumirea completă a lui $\mathscr{L}$ este de *operator diferenţial liniar de ordinul n* şi deseori este mai convenabilă notaţia

$$\mathscr{L} = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n,$$

unde $D = \frac{d}{dx}$ este *operatorul de derivare*.

Cu ajutorul lui $\mathscr{L}$ ecuaţia diferenţială se scrie

$$\mathscr{L}(y) = f.$$

Punctele $x \in I$ în care $a_0(x) = 0$ se numesc *puncte singulare ale ecuaţiei* $\mathscr{L}(y) = f$. Pentru a ocoli complicaţiile impuse de prezenţa unor asemenea puncte presupunem $a_0(x) \neq 0,\ \forall x \in I$. În această ipoteză existenţa şi unicitatea soluţiilor problemelor Cauchy sînt garantate de teorema care urmează, caz particular al teoremei din Cap. 2, § 2.

1.1. Teorema de existenţă şi unicitate. Fie a_i, $f \in C^0(I)$ şi $a_0(x) \neq 0$, $\forall x \in I$. Pentru orice $x_0 \in I$ şi $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)} \in \mathbb{R}$, ecuaţia $\mathscr{L}(y) = f$ admite soluţia unică $x \to y(x)$, definită pe o vecinătate a lui x_0, care verifică condiţiile

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Se poate arăta că orice soluţie a ecuaţiei $\mathscr{L}(y) = f$ se poate prelungi pînă la extremităţile intervalului I, inclusiv aceste extremităţi dacă I este închis [35].

§2. Spaţiul vectorial al soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale liniare omogene

Ne situăm în ipotezele teoremei de existenţă şi unicitate a soluţiei pentru ecuaţia liniară omogenă

$$\mathscr{L}(y) = 0 \text{ pe } I.$$

Mulţimea soluţiilor acestei ecuaţii este Ker $\mathscr{L}$, subspaţiu vectorial al spaţiului vectorial real $C^n(I)$. Cu toate că $C^n(I)$ este infinit dimensional, subspaţial Ker $\mathscr{L}$ este întotdeauna finit dimensional.

2.1. Teoremă. Dacă $\mathscr{L}$ este un operator diferenţial liniar de ordinul n, atunci dimensiunea spaţiului vectorial al soluţiilor ecuaţiei liniare omogene $\mathscr{L}(y) = 0$ este n.

Demonstraţie. Fie Ker $\mathscr{L}$ spaţiul vectorial real al soluţiilor ecuaţiei date. Fiecărei funcţii $y \in$ Ker $\mathscr{L}$ îi putem ataşa punctul $(y(x_0), y^{(1)}(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0)) \in \mathbb{R}^n$. Obţinem funcţia $\mathscr{T}$: Ker $\mathscr{L} \to \mathbb{R}^n$, $\mathscr{T}(y) = (y(x_0), y^{(1)}(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0))$. Această funcţie este o transformare liniară şi are ca imagine întreg spaţiul $\mathbb{R}^n$. Liniaritatea lui $\mathscr{T}$ este evidentă; surjectivitatea decurge din teorema de existenţă care precizează că pentru orice condiţii iniţiale $(y(x_0), y^{(1)}(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0))$ există o soluţie $y \in$ Ker $\mathscr{L}$, iar injectivitatea este asigurată de teorema de unicitate a soluţiei y. În concluzie $\mathscr{T}$ este un izomorfism şi deci Ker $\mathscr{L} = n$.

Deoarece spaţiul vectorial al soluţiilor unei ecuaţii liniare omogene are dimensiunea n, orice mulţime ordonată formată din n soluţii liniar independente este o bază a acestui spaţiu. Din această observaţie şi din teorema precedentă rezultă:

2.2. Consecinţă. Dacă $\mathscr{L}$ este un operator diferenţial liniar de ordinul n şi dacă $y_1, \ldots, y_n$ sînt n soluţii liniar independente ale ecuaţiei omogene $\mathscr{L}(y) = 0$ pe I, atunci orice soluţie y pe I poate fi exprimată în forma

$$y = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k,$$

unde c_k sînt constante.

Soluţia $\sum_{k=1}^{n} c_k y_k$, unde c_k sînt constante arbitrare, se numeşte *soluţia generală* a ecuaţiei $\mathscr{L}(y) = 0$. Ea este acea soluţie care poate lua, prin particularizarea constantelor, valori prestabilite pentru $y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)$ în

$x = x_0$. Această afirmaţie decurge din teoremele precedente precum şi din cele ce urmează.

2.3. *Definiţie. Fie $y_1, \ldots, y_n$, n soluţii ale ecuaţiei liniare omogene $\mathscr{L}(y) = 0$. Determinantul*

$$w = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

se numeşte wronskian al acestor soluţii.

2.4. Teoremă. (Abel-Liouville) Wronskianul are expresia

$$w(x) = w(x_0) e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1}{a_0}(x)\mathrm{d}x}, \quad x_0, \quad x \in I.$$

Demonstraţie. Ţinînd seama de formula de derivare a unui determinant, avem

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \begin{vmatrix} y_1' & \cdots & y_n' \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

$$= 0$$

Înlocuind ultima linie cu $y_k^{(n)} = A_1 y_k^{(n-1)} + \ldots + A_n y_k$, $A_1 = -\dfrac{a_1}{a_0}$, desfacem în sumă de determinanţi şi observăm că numai primul este nenul. Deci

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = A_1 w,$$

adică este adevărată formula din teoremă.

2.5. Teoremă. Soluţiile $y_1, \ldots, y_n$ ale ecuaţiei diferenţiale $\mathscr{L}(y) = 0$ sînt liniar independente dacă şi numai dacă $w(x) \neq 0$, $\forall x \in I$.

Demonstraţie. Mai întîi observăm că $w(x) \neq 0$, $\forall x \in I \Leftrightarrow w(x_0) \neq 0$. Apoi fie izomorfismul $\mathscr{T} : \operatorname{Ker} \mathscr{L} \to \mathbb{R}^n$, $(y(x_0), \; y^{(1)}(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0)) = \mathscr{T}(y)$. Rezultă

$$\begin{cases} (y_1(x_0), \; y_1^{(1)}(x_0), \ldots, y_1^{(n-1)}(x_0)) = \mathscr{T}(y_1) \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ (y_n(x_0), \; y_n^{(1)}(x_0), \ldots, y_n^{n-1}(x_0)) = \mathscr{T}(y_n) \end{cases}$$

Deoarece $\mathscr{T}$ este un izomorfism vectorii y_k, $k = 1, \ldots, n$, din $\operatorname{Ker} \mathscr{L}$ sînt liniar independenţi dacă şi numai dacă vectorii $(y_k(x_0), \; y_k^{(1)}(x_0), \ldots$

$\ldots, y_k^{(n-1)}(x_0)), k = 1, \ldots, n$, din $\mathbb{R}^n$ sînt liniar independenţi, adică $w(x_0) \neq 0$ (determinantul vectorilor din $\mathbb{R}^n$).

§3. Metoda variaţiei constantelor

Ne situăm în ipotezele teoremei de existenţă şi unicitate. Considerăm ecuaţia diferenţială liniară neomogenă $\mathscr{L}(y) = f$ şi ecuaţia diferenţială liniară omogenă asociată $\mathscr{L}(y) = 0$, ambele pe intervalul I. Stabilim legătura între soluţiile generale ale celor două ecuaţii.

3.1. Teoremă. Soluţia generală a ecuaţiei neomogene, este suma dintre o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene şi soluţia generală a ecuaţiei omogene.

Demonstraţie. Fie ecuaţia $\mathscr{L}(y) = f$ şi y_p o soluţie particulară a sa. Punem $y = u + y_p$, unde u este noua necunoscută. Utilizînd liniaritatea lui $\mathscr{L}$ găsim $\mathscr{L}(u) + \mathscr{L}(y_p) = f$ şi aceasta împreună cu $\mathscr{L}(y_p) = f$ implică $\mathscr{L}(u) = 0$. Rezultă că u trebuie să fie soluţia generală a ecuaţiei liniare omogene.

Una dintre metodele de aflare a soluţiei particulare a ecuaţiei liniare neomogene, de îndată ce cunoaştem soluţia generală a ecuaţiei omogene, este metoda *variaţiei constantelor* al cărui conţinut se poate rezuma prin teorema următoare:

3.2. Teoremă. Dacă $y = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k$ este soluţia generală a ecuaţiei omogene, atunci o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene poate fi găsită sub forma $x \to y_p(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x) y_k(x)$, $x \in I$, unde $(c_1', \ldots, c_n')$ este soluţia sistemului

$$\begin{cases} y_1 c_1' + \ldots + y_n c_n' = 0 \\ y_1' c_1' + \ldots + y_n' c_n' = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ y_1^{(n-1)} c_1' + \ldots + y_n^{(n-1)} c_n' = \dfrac{f}{a_0}. \end{cases}$$

Demonstraţie. Determinantul sistemului liniar algebric este wronskianul $w(x) \neq 0$. De aceea sistemul are o soluţie unică $(c_1', \ldots, c_n')$, de unde prin integrare se găsesc funcţiile $x \to c_i(x)$, $x \in I$ (constantele arbitrare sînt omise).

În ipotezele din teoremă funcţia $x \to y_p(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x) y_k(x)$ satisface

$$\begin{aligned} y_p &= \sum c_k y_k \\ y_p' &= \sum c_k y_k' \\ \ldots \quad & \ldots \quad \ldots \\ y_p^{(n-1)} &= \sum c_k y_k^{(n-1)} \\ y_p^{(n)} &= \sum c_k y_k^{(n)} + \sum c_k' y_k^{(n-1)} = \sum c_k y_k^{(n)} + \frac{f}{a_0}. \end{aligned}$$

Înlocuind în $\mathscr{L}(y) = f$ găsim o identitate.

Exemplu. În studiul încovoierii unei plăci subțiri, circulare, încastrată pe contur și supusă unei sarcini concentrate în centrul ei intervine ecuația diferențială

$$x^2\frac{d^2\varphi}{dx^2}+x\frac{d\varphi}{dx}-\varphi=kx,\ x\in(0,r],$$

unde $k=\text{const}$. Să se determine soluția care satisface $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=0$, $\varphi(r)=0$, știind că ecuația liniară omogenă admite soluția particulară $\varphi_1=x$.

Soluție. Atașăm ecuația omogenă

$$x^2\frac{d^2\varphi}{dx^2}+x\frac{d\varphi}{dx}-\varphi=0.$$

Facem substituția $\varphi=xv$. Găsim $xv''+3v'=0$. Notăm $v'=z$ și deducem $xz'+3z=0$. Aceasta admite soluția particulară $z=-2/x^3$. Deci $v=1/x^2$, adică $\varphi_2=1/x$.

Cu ajutorul wronskianului deducem că φ_1 și φ_2 sînt liniar independente. Rezultă soluția generală a ecuației omogene $\varphi=c_1x+c_2\dfrac{1}{x}$.

Căutăm o soluție particulară a ecuației neomogene utilizînd metoda variației constantelor. Rezolvînd sistemul

$$\begin{cases} xc_1'+\dfrac{1}{x}c_2'=0\\[2ex] c_1'-\dfrac{1}{x^2}c_2'=\dfrac{k}{x}\end{cases}$$

rezultă $c_1(x)=\dfrac{k}{2}\ln x$, $c_2(x)=-\dfrac{k}{4}x^2$.

Soluția generală a ecuației neomogene este

$$\varphi=\left(\frac{k}{2}\ln x+c_1\right)x+\left(-\frac{k}{4}x^2+c_2\right)\frac{1}{x},$$

iar condițiile la limită implică $c_2=0$, $c_1=-\dfrac{k}{2}\ln r+\dfrac{k}{4}$.

§4. Metoda seriilor de puteri

Soluțiile particulare ale unor ecuații liniare pot fi obținute sub formă de serii de puteri de tipul

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k,\ y=(x-x_0)^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k.$$

Constantele a_k și α se determină prin înlocuirea în ecuație și identificarea cu zero a seriei de puteri care se obține trecînd totul în partea stîngă. Cea mai dificilă problemă, în acest caz, este aceea de a ști dacă o ecuație liniară dată admite sau nu o asemenea soluție.

Avînd în vedere problemele concrete ne vom mărgini la enunțul următoarelor teoreme:

4.1. Teoremă. Dacă f şi g sînt reprezentabile prin serii Taylor în vecinătatea punctului $x = x_0$, atunci orice soluţie a ecuaţiei

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$$

se poate scrie sub forma

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k.$$

4.2. Teoremă. Dacă funcţiile f_1 şi f_2 sînt reprezentabile prin serii Taylor în vecinătatea lui $x = x_0$, atunci cel puţin una dintre soluţiile ecuaţiei

$$(x - x_0)^2 y'' + (x - x_0) f_1(x) y' + f_2(x) y = 0$$

se poate reprezenta în forma

$$y = (x - x_0)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k.$$

În acest caz x_0 este un punct singular.

Exemplu. Pentru ecuaţia $xy'' - 2y' - xy = 0$, punctul $x = 0$ este punct singular. De aceea căutăm soluţii de tipul $y = x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\alpha+n}$. Prin derivare deducem $y' = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha + n) a_n x^{\alpha+n-1}$, $y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha + n)(\alpha + n - 1) a_n x^{\alpha+n-2}$ şi deci $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha + n)(\alpha + n - 1) a_n x^{\alpha+n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2(\alpha + n) a_n x^{\alpha+n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\alpha+n+1} = 0$,

adică

$$\alpha(\alpha + 1) a_0 x^{\alpha-1} + (\alpha + 1)(\alpha + 2) a_1 x^\alpha + \sum_{n=0}^{\infty} ((\alpha + n + 1)(\alpha + n + 2) a_{n+2} + 2(\alpha + n + 2) a_{n+2} - a_n) x^{\alpha+n+1} = 0.$$

Prin identificare găsim

$$\alpha(\alpha + 1) a_0 = 0, \quad (\alpha + 1)(\alpha + 2) a_1 = 0, \quad (\alpha + n + 2)(\alpha + n + 3) a_{n+2} = a_n.$$

Pentru $\alpha = 0$ rezultă $a_1 = 0$ şi $a_{n+2} = \dfrac{a_n}{(n + 2)(n + 3)}$. Deci $a_{2p} = \dfrac{a_0}{(2p + 1)!}$, $a_{2p+1} = 0$,

adică

$$y = a_0 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p}}{(2p + 1)!} = \begin{cases} a_0 \dfrac{\operatorname{sh} x}{x}, & x \neq 0 \\ a_0, & x = 0 \end{cases} \text{ este o soluţie a ecuaţiei.}$$

Fie $\alpha = -1$. Găsim $a_{n+2} = \dfrac{a_n}{(n + 1)(n + 2)}$ şi deci $a_{2p} = \dfrac{a_0}{(2p)!}$, $a_{2p+1} = \dfrac{a_1}{(2p + 1)!}$.

Astfel

$$y = a_0 x^{-1} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!} + a_1 x^{-1} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p + 1)!} = a_0 \frac{\operatorname{ch} x}{x} + a_1 \frac{\operatorname{sh} x}{x}, \quad x \neq 0$$

este soluţia generală a ecuaţiei propuse (liniar independenţa soluţiilor particulare este evidentă).

Cazul $\alpha = -2$ conduce tot la soluţia generală.

§5. Ecuații diferențiale liniare omogene cu coeficienți constanți

Fie $D : C^\infty(I) \to C^\infty(I)$ operatorul de derivare și $\mathscr{L} : C^\infty(I) \to C^\infty(I)$ un operator diferențial liniar cu coeficienți constanți (reali), de ordinul n, definit prin

$$\mathscr{L} = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n, \quad a_0 \neq 0.$$

Mulțimea V a tuturor operatorilor diferențiali liniari cu coeficienți constanți este un spațiu vectorial real infinit dimensional. De asemenea orice doi operatori diferențiali liniari cu coeficienți constanți sînt comutabili ca urmare a faptului $D^m D^n = D^n D^m = D^{n+m}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$.

Fie $\boldsymbol{P}$ spațiul vectorial real al tuturor funcțiilor polinomiale reale. Fiecărui operator $\mathscr{L} \in \boldsymbol{V}$ îi asociem acel polinom l din $\boldsymbol{P}$ care are aceiași coeficienți cu $\mathscr{L}$, polinom ce poartă numele de *polinomul caracteristic* atașat lui $\mathscr{L}$; deci

$$l(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n.$$

În acest fel obținem un izomorfism $\mathscr{T} : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{P}$, $\mathscr{T}(\mathscr{L}) = l$.

5.1. Teoremă. 1) Izomorfismul $\mathscr{T} : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{P}$, $\mathscr{T}(\mathscr{L}) = l$, păstrează descompunerea în factori, adică $\mathscr{T}(\mathscr{L}_1 \mathscr{L}_2) = \mathscr{T}(\mathscr{L}_1) \cdot \mathscr{T}(\mathscr{L}_2)$, $\forall \mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2 \in \boldsymbol{V}$.

2) Orice operator $\mathscr{L}$ poate fi factorizat ca un produs de factori de forma $D - \alpha$; $(D - \alpha)^m$, $m = 2, 3, \ldots$; $D^2 - 2\alpha D + \alpha^2 + \beta^2$; $(D^2 - 2\alpha D + \alpha^2 + \beta^2)^m$, $m = 2, 3, \ldots$

Demonstrație. 1) Verificare directă.

2) Se știe că orice polinom cu coeficienți reali poate fi scris ca un produs de polinoame de gradul întîi sau/și gradul al doilea cu coeficienți reali. Mai precis, se consideră ecuația (1) $l(r) = 0$, în $\mathbb{C}$, numită *ecuația caracteristică* a lui $\mathscr{L}$. La o soluție α, reală, simplă a ecuației (1) îi corespunde factorul $r - \alpha$ al polinomului $l(r)$ și deci factorul $D - \alpha$ al lui $\mathscr{L}$; la o soluție α, reală, multiplă de ordinul m a ecuației (1) îi corespunde factorul $(r - \alpha)^m$ al lui $l(r)$ și deci factorul $(D - \alpha)^m$ al lui $\mathscr{L}$; la o pereche de rădăcini complexe conjugate simple $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$, ale ecuației (1) îi corespunde factorul $r^2 - 2\alpha r + \alpha^2 + \beta^2$ al lui $l(r)$ și deci factorul $D^2 - 2\alpha D + \alpha^2 + \beta^2$ al lui $\mathscr{L}$; la o pereche de rădăcini complexe conjugate, multiple de ordinul m, $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$ ale ecuației (1) îi corespunde factorul $(r^2 - 2\alpha r + \alpha^2 + \beta^2)^m$ al lui $l(r)$ și deci factorul $(D^2 - 2\alpha D + \alpha^2 + \beta^2)^m$ al lui $\mathscr{L}$.

Fie $\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 \mathscr{L}_2 \ldots \mathscr{L}_k$ o descompunere a lui $\mathscr{L}$ ca un produs de operatori (ireductibili) cu coeficienți reali (produs de operatori de ordinul întîi și doi). Deoarece factorii sînt comutabili rezultă $\operatorname{Ker} \mathscr{L}_j \subset \operatorname{Ker} \mathscr{L}$, adică spațiul soluțiilor ecuației $\mathscr{L}(y) = 0$ conține subspațiile definite prin $\mathscr{L}_j(y) = 0$. Avînd în vedere că subspațiile $\operatorname{Ker} \mathscr{L}_j$ sînt finit dimensionale și două cîte două disjuncte rezultă

$$\operatorname{Ker} \mathscr{L} = \operatorname{Ker} \mathscr{L}_1 \oplus \operatorname{Ker} \mathscr{L}_2 \oplus \ldots \oplus \operatorname{Ker} \mathscr{L}_k.$$

Cu alte cuvinte pentru a obține soluția generală a ecuației $\mathscr{L}(y) = 0$ este suficient să explicităm baze ale subspațiilor $\operatorname{Ker} \mathscr{L}_j$ și să scriem elementul generic al acoperirii liniare a tuturor subspațiilor $\operatorname{Ker} \mathscr{L}_j$. Pentru aceasta ne servim de următoarea teoremă.

5.2. Teoremă. Fie $\mathscr{L}(y) = 0$ o ecuaţie liniară omogenă cu coeficienţi constanţi şi $l(r) = 0$ ecuaţia caracteristică asociată.

1) La o soluţie α, reală, simplă, a ecuaţiei caracteristice îi corespunde o singură soluţie liniar independentă $e^{\alpha x}$ a ecuaţiei $\mathscr{L}(y) = 0$.

2) La o soluţie α, reală, multiplă de ordinul m, a ecuaţiei caracteristice îi corespund m soluţii liniar independente

$$e^{\alpha x},\ xe^{\alpha x},\ \ldots,\ x^{m-1}e^{\alpha x}$$

ale ecuaţiei $\mathscr{L}(y) = 0$.

3) La o pereche de rădăcini complexe conjugate simple $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$ ale ecuaţiei caracteristice îi corespunde o pereche de soluţii liniar independente $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$ ale ecuaţiei $\mathscr{L}(y) = 0$.

4) La o pereche de rădăcini complexe conjugate $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$, multiple de ordinul m, îi corespund $2m$ soluţii liniar independente

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ldots,\ x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ldots,\ x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

ale ecuaţiei $\mathscr{L}(y) = 0$.

Demonstraţie. 2) Liniar independenţa funcţiilor $1, x, \ldots, x^{m-1}$ implică liniar independenţa funcţiilor din teoremă.

Pentru a arăta că funcţiile definite prin $u_1(x) = e^{\alpha x}$, $u_2(x) = xe^{\alpha x}, \ldots$ $\ldots, u_m(x) = x^{m-1}e^{\alpha x}$ satisfac ecuaţia $(D - \alpha)^m u = 0$ folosim inducţia. Se observă că $(D - \alpha)e^{\alpha x} = 0$. Apoi presupunem că $u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}$ sînt soluţii ale ecuaţiei $(D - \alpha)^{m-1} u = 0$. Să arătăm că $u_1, u_2, \ldots, u_m$ sînt soluţii ale ecuaţiei $(D - \alpha)^m u = 0$. Într-adevăr, $u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}$ satisfac $(D - \alpha)^m u = 0$ deoarece $(D - \alpha)^m = (D - \alpha)(D - \alpha)^{m-1}$, iar u_m satisface $(D-\alpha)^m u_m(x) = (D - \alpha)^{m-1}(D-\alpha) \circ (x^{m-1} e^{\alpha x}) = (D-\alpha)^{m-1}((m-1)x^{m-2}e^{\alpha x}) = (m-1)(D-\alpha)^{m-1} u_{m-1}(x) = 0$.

Exemple. 1) Să găsim soluţia generală a ecuaţiei

$$y''' - 8y = 0.$$

Ecuaţia caracteristică $r^3 - 8 = 0$ are rădăcinile $r_1 = 2$, $r_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{3}$. Rezultă

$$y = c_1e^{2x} + e^{-x}(c_2\cos\sqrt{3}x + c_3\sin\sqrt{3}x).$$

2) Ecuaţiei $y''' + y'' = 0$ i se ataşează ecuaţia caracteristică $r^3 + r^2 = 0$ care admite rădăcinile $r_{1,2} = 0$, $r_3 = -1$. Corespunzător, soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale este $y = c_1 + c_2x + c_3e^{-x}$.

§6. Cvasipolinoame

Cvasipolinoamele sînt combinaţii liniare ale funcţiilor de forma

$$x^{m-1}e^{\alpha x},\ x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,\ x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

unde $m = 1, 2, \ldots$, iar α, β sînt constante reale. Rezultatele din § 5 arată că soluţiile ecuaţiilor diferenţiale liniare omogene cu coeficienţi constanţi sînt cvasipolinoame.

Ţinînd seama de principiul reducerii (orice ecuaţie diferenţială de ordinul n poate fi scrisă ca un sistem de n ecuaţii de ordinul întîi), de definiţia din § 5 Cap. 2 şi de forma soluţiilor unei ecuaţii liniare omogene cu coeficienţi constanţi rezultă următoarea teoremă de stabilitate.

6.1. Teoremă. Fie poziţia de echilibru $y = y' = \ldots = y^{(n-1)} = 0$.

1) Dacă toate rădăcinile ecuaţiei caracteristice au partea reală strict negativă, atunci poziţia de echilibru este stabilă şi asimptotic stabilă.

2) Dacă unele rădăcini ale ecuaţiei caracteristice sînt pur imaginare simple, iar toate celelalte au partea reală negativă, atunci poziţia de echilibru este stabilă dar nu asimptotic stabilă.

3) Dacă o rădăcină a ecuaţiei caracteristice are partea reală strict pozitivă sau dacă există o rădăcină pur imaginară cel puţin dublă, atunci poziţia de echilibru nu este stabilă.

Demonstraţie. Soluţia generală,

$$y(x) = f(x\,;\, c_1, \ldots, c_n) = c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x),\ x \in \mathbb{R},$$

a unei ecuaţii diferenţiale liniare omogene de ordinul n cu coeficienţi constanţi este un cvasipolinom. Din aceasta se obţine soluţia cu proprietăţile

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

În particular putem presupune $\max\{|y_0|, |y'_0|, \ldots, |y_0^{(n-1)}|\} < \varepsilon$. Notînd $C = {}^t[c_1, \ldots, c_n]$, $Y_0 = {}^t[y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}]$ rezultă $W(x_0)\, C = Y_0$, unde $W(x_0)$ este matricea wronski ataşată soluţiilor particulare $y_1, \ldots, y_n$ în punctul x_0. Deoarece $\det W(x_0) \neq 0$ (soluţiile particulare sînt liniar independente) matricea Y_0 tinde la matricea zero dacă şi numai dacă matricea C tinde la matricea zero.

1) Fiecare termen al soluţiei generale conţine factori de tipul $e^{\alpha x}$, $\alpha < 0$. Relaţia $\lim\limits_{x\to\infty} e^{\alpha x} = 0$ implică

$$(*) \qquad \lim_{C\to 0} f^{(k)}(x\,;\, c_1, \ldots, c_n) = f^{(k)}(x\,;\, 0, \ldots, 0) = 0, \qquad \forall x \in [x_0, \infty)$$

$$(**) \qquad \lim_{x\to\infty} f^{(k)}(x\,;\, c_1, \ldots, c_n) = 0,\ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

2) Şi în acest caz au loc relaţiile (*). Dar cvasipolinomul $c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x)$ conţine şi termeni de tipul $c_j \sin \beta x$, iar $\lim\limits_{x\to\infty} c_j \sin \beta x$ nu există. De aceea relaţiile (**) nu au loc.

3) Există termeni ai cvasipolinomului $c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x)$ care conţin factori de tipul $e^{\alpha x}$, $\alpha > 0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} e^{\alpha x} = \infty$ sau factori nemărginiţi de tipul $x \sin x$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} x \sin x$ nu există. De aceea relaţiile (*) nu pot avea loc (fiind vorba de limite uniforme în raport cu x).

Exemple. Ecuaţiei diferenţiale $y'' + 3y' + 2y = 0$ îi corespunde ecuaţia caracteristică $r^2 + 3r + 2 = 0$ cu rădăcinile $r_1 = -1$, $r_2 = -2$. De aceea $y = 0$ este o soluţie stabilă şi asimptotic stabilă.

Fie $y''' + y'' + y' + y = 0$. Deoarece $r^3 + r^2 + r + 1 = 0$ admite soluţiile $r_1 = -1$, $r_2 = i$, $r_3 = -i$ rezultă că $y = 0$ este o soluţie stabilă, dar nu asimptotic stabilă.

Ecuaţia diferenţială $y^{IV} + 2y'' + y = 0$ are polinomul caracteristic $l(r) = (r^2 + 1)^2$ ale cărui rădăcini sînt $r_{1,2} = -i$, $r_{3,4} = i$. Rezultă că poziţia de echilibru $y = 0$ nu este stabilă.

Fie $\mathscr{L}(y) = f$, $f \in C^0(I)$, o ecuaţie liniară neomogenă cu coeficienţi constanţi şi $\mathscr{L}(y) = 0$ ecuaţia liniară omogenă asociată. Se ştie deja că soluţia generală a ecuaţiei neomogene este suma dintre o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene şi soluţia generală a ecuaţiei omogene. Soluţia generală a ecuaţiei omogene se poate afla după procedeul explicat în § 5 şi este un cvasipolinom, iar soluţia particulară a ecuaţiei neomogene se poate afla prin metoda variaţiei constantelor (§ 3).

În cazul în care f este un cvasipolinom, soluţia particulară a ecuaţiei neomogene se poate afla şi prin *metoda coeficienţilor nedeterminaţi*. Această metodă derivă din observaţia că dacă $\mathscr{A}$ este operatorul diferenţial cu coeficienţi constanţi cu proprietatea $\mathscr{A}(f) = 0$, atunci $\mathscr{L}(y_p) = f$ implică $\mathscr{A}\mathscr{L}(y_p) = 0$ şi deci $y_p \in \mathrm{Ker}(\mathscr{A}\mathscr{L})$. De aceea etapele determinării lui y_p sînt următoarele: 1) se notează cu $\mathscr{A}$ operatorul diferenţial de ordin minim cu coeficienţi constanţi pentru care $\mathscr{A}(f) = 0$,

2) se rezolvă ecuaţia cu coeficienţi constanţi $\mathscr{A}\mathscr{L}(y) = 0$,

3) din soluţia generală a ecuaţiei $\mathscr{A}\mathscr{L}(y) = 0$ lăsăm de o parte soluţia generală a ecuaţiei $\mathscr{L}(y) = 0$, iar din ce rămîne fixăm o funcţie particulară care satisface ecuaţia $\mathscr{L}(y) = f$.

Exemplu. Considerăm ecuaţia

$$y''' - y'' - y' + y = 3e^x + 5x\sin x.$$

Deoarece $f(x) = 3e^x + 5x\sin x$ este un cvasipolinom, pentru determinarea unei soluţii particulare a acestei ecuaţii putem aplica metoda coeficienţilor nedeterminaţi.

Funcţia f este o soluţie a ecuaţiei

$$(D - 1)(D^2 + 1)^2 y = 0$$

şi deci orice soluţie a ecuaţiei

$$(D^3 - D^2 - D + 1)y = 3e^x + 5x\sin x$$

este o soluţie a ecuaţiei

$$(D - 1)(D^2 + 1)^2(D - 1)^2(D + 1)y = 0.$$

Rădăcinile ecuaţiei caracteristice sînt $r_{1,2,3} = 1$, $r_4 = -1$, $r_{5,6,7,8} = \pm i$, adică soluţia generală a ultimei ecuaţii este

$$y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{-x} + c_4x^2e^x + c_5 \sin x + c_6 \cos x + c_7 x\sin x + c_8 x\cos x.$$

Să alegem pe c_i astfel încît $\mathscr{L}(y) = 3e^x + 5x\sin x$, unde $\mathscr{L} = D^3 - D^2 - D + 1 = (D - 1)^2(D + 1)$. Deoarece $c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{-x}$ este soluţia generală a ecuaţiei $\mathscr{L}(y) = 0$, putem lua $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Rămîne să găsim pe c_4, c_5, c_6, c_7, c_8 astfel încît

$$\mathscr{L}(c_4x^2e^x + c_5\sin x + c_6\cos x + c_7x\sin x + c_8x\cos x) = 3e^x + 5x\sin x.$$

Rezultă $c_4 = \frac{3}{4}$, $c_5 = -\frac{5}{7}$, $c_6 = \frac{10}{7}$, $c_7 = \frac{5}{7}$, $c_8 = \frac{5}{7}$ și deci

$$y_p = \frac{3}{4} x^2 e^x + \frac{5}{7} [(x + 2)\cos x + (x - 1)\sin x].$$

Pentru aplicarea cu succes a metodei precedente este necesar să se reţină tabelul următor împreună cu observaţia că dacă $\mathscr{A}(f_1) = 0$, $\mathscr{B}(f_2) = 0$, atunci $\mathscr{A}\mathscr{B}(c_1 f_1 + c_2 f_2) = 0$.

Funcţia f	Operatorul $\mathscr{A}$ cu proprietatea $\mathscr{A}(f) = 0$.
x^{m-1}	D^m
$e^{\alpha x}$	$D - \alpha$
$x^{m-1} e^{\alpha x}$	$(D - \alpha)^m$
$\cos \beta x$ sau $\sin \beta x$	$D^2 + \beta^2$
$x^{m-1} \cos \beta x$ sau $x^{m-1} \sin \beta x$	$(D^2 + \beta^2)^m$
$e^{\alpha x} \cos \beta x$ sau $e^{\alpha x} \sin \beta x$	$D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)$
$x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x$ sau $x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$	$[D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)]^m$

§7. Ecuaţii Euler

O ecuaţie liniară de tipul

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x),$$

unde a_i = const. reale, $a_0 \neq 0$ se numeşte *ecuaţie Euler*.

Punctul $x = 0$ este un punct singular al ecuaţiei Euler, existenţa sa implicînd cercetarea separată a cazurilor $x < 0$ respectiv $x > 0$. Se observă însă că este suficient să ne referim la ipoteza $x > 0$ întrucît $x < 0$ se reduce la primul caz prin schimbarea $x = -u$.

Pentru $x > 0$ ecuaţia Euler se reduce la o ecuaţie cu coeficienţi constanţi prin schimbarea de variabilă $x = e^t$, $t = \ln x$.

Într-adevăr,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

şi prin inducţie

$$\frac{d^ky}{dx^k} = \frac{1}{x^k} E_k\left(\frac{d^ky}{dt^k}, \ldots, \frac{dy}{dt}\right),$$

unde E_k sînt operatori diferenţiali liniari cu coeficienţi constanţi. Prin înlocuire în ecuaţia Euler se găseşte o ecuaţie diferenţială cu coeficienţi constanţi

$$b_0\frac{d^ny}{dt^n} + b_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + b_{n-1}\frac{dy}{dt} + b_ny = g(t).$$

Exemplu. 1) Să se găsească soluţia generală a ecuaţiei

$$x^2y'' - 6y = 0.$$

Soluţie. (I) Pentru $x > 0$, punem $x = e^t$ şi ecuaţia propusă se reduce la ecuaţia diferenţială cu coeficienţi constanţi $\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 6y = 0$. Deoarece ecuaţia caracteristică $r^2 - r - 6 = 0$ are soluţiile $r_1 = -2$, $r_2 = 3$, găsim $y(e^t) = c_1e^{-2t} + c_2e^{3t}$ şi deci $y(x) = \frac{c_1}{x^2} + c_2x^3$, $x > 0$. Această soluţie se prelungeşte şi pentru $x < 0$.

(II) Se caută soluţii particulare de forma $y = x^s$. Introducînd în ecuaţia iniţială obţinem $s(s-1) - 6 = 0$ cu rădăcinile $s_1 = -2$, $s_2 = 3$. Deci $y_1 = x^{-2}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ şi $y_2 = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ sînt soluţii ale ecuaţiei Euler. Utilizînd wronskianul se constată că funcţiile y_1 şi y_2, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, sînt liniar independente. Deci $y = \frac{c_1}{x^2} + cx^3$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, este soluţia generală căutată.

2) Să determinăm soluţia generală a ecuaţiei

$$x^2y'' + xy' + y = 0.$$

Pentru $x > 0$, punem $x = e^t$. Ecuaţia Euler se reduce la o ecuaţie cu coeficienţi constanţi, $\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$. Aceasta din urmă are soluţia generală $y(e^t) = c_1\cos t + c_2\sin t$ şi deci $y(x) = c_1\cos\ln x + c_2\sin\ln x$ defineşte soluţia generală a ecuaţiei Euler pe $(0, \infty)$.

Pentru $x < 0$ soluţia generală este definită prin $y(x) = c_1\cos\ln(-x) + c_2\sin\ln(-x)$.

§8. Probleme

1. Se dau

(1) $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = e^x$; $(2x - x^2)y'' + (x^2 - 2)y' + 2(1 - x)y = 0$

(2) $y_1(x) = \sin x$, $y_2(x) = \sin^2 x$; $y'' + (\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x)y' + 2y\operatorname{ctg}^2 x = 0$.

Pentru fiecare caz în parte, să se verifice că funcţiile sînt soluţii liniar independente ale ecuaţiei diferenţiale liniare.

2. Să se determine soluţiile generale ale următoarelor ecuaţii diferenţiale liniare, funcţiile date fiind soluţii particulare :

(1) $y'' - xy' + y = 0, \quad y_1(x) = x$

(2) $y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = 0, \; y_1(x) = x, \; y_2(x) = x^2$

3. Se dau ecuaţiile diferenţiale neomogene şi soluţiile generale ale ecuaţiilor diferenţiale omogene ataşate :

(1) $y'' + y = 2\sec^3 x, \quad y = c_1\cos x + c_2\sin x$

(2) $y''' - 9y' = \cos x, \; y = c_1 + c_2e^{-3x} + c_3e^{3x}$.

Utilizînd metoda variaţiei constantelor să se găsească soluţiile generale ale ecuaţiilor neomogene.

4. Să se găsească soluţii pentru

$$(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0, \; y(0) = 1, \; y'(0) = 0 ;$$

$$(1 + x^2)y'' + xy' - y = 0, \; y(0) = 1, \; y'(0) = -1 ;$$

$$x(x + 1)y'' + (x + 2)y' - y = (1 + x^2)e^x,$$

cu ajutorul seriilor de puteri.

5. Să se găsească soluţiile generale ale următoarelor ecuaţii diferenţiale :

$$y'' - 4y' = 0, \; y''' + 8y = 0,$$

$$y^{IV} + y'' = 0, \; y''' - y'' = 0,$$

$$(D^3 - 2D^2)(y) = 0, \; (D^2 + 3D)(y) = 0$$

şi pentru fiecare caz în parte să se cerceteze stabilitatea poziţiei de echilibru.

6. Să se rezolve problemele la limită

(1) $y'' + 2y' - 3y = 0, \; y(0) = -1, \; y(-1) = 0$

(2) $y'' - 2y' + 5y = 0, \; y(0) = 1, \; y(\pi/2) = 0$.

7. Să se găsească soluţiile generale ale următoarelor ecuaţii diferenţiale

$$y'' + 2y' - 3y = 3e^{-3x}$$

$$y'' - 2y' + 5y = 2xe^x + e^x\cos 2x$$

$$y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 4xe^{2x}$$

$$y''' - y'' - y' + y = 3e^x + 5x\cos x$$

$$x^2y''' + 5xy' + 4y' = \ln x$$

$$x^2y'' - 6y = 5x^3 + 8x^2.$$

Capitolul 4

SISTEME DIFERENȚIALE LINIARE DE ORDINUL ÎNTÎI

§1. Generalități

Un sistem de ecuații diferențiale de forma

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)y_j + f_i(t), \quad i = 1, \ldots, n,$$

unde $a_{ij}, f_i \in C^0(I)$, iar $y_1, \ldots, y_n \in C^1(I)$ sînt funcții necunoscute, se numește *sistem diferențial liniar de ordinul întîi*. Dacă $f_1 = \ldots = f_n = 0$, sistemul se numește *omogen*; în caz contrar sistemul se numește *neomogen*. Funcțiile a_{ij} se numesc *coeficienții sistemului*.

Un sistem liniar de ordinul întîi satisface condițiile din teorema de existență și unicitate pentru soluțiile problemelor Cauchy (vezi Cap. 2, § 2). De aceea $\forall(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ există o soluție unică $t \to (y_1(t), \ldots, y_n(t))$ definită pe o vecinătate a lui t_0 care verifică condițiile $y_i(t_0) = y_{i0}$, $i = 1, \ldots, n$. De asemenea se poate demonstra că orice asemenea soluție se poate prelungi pînă la extremitățile intervalului I, inclusiv aceste extremități dacă I este închis. Din punct de vedere fizic aceasta înseamnă că sistemele liniare cu coeficienți continui nu au soluții care tind la infinit în timp finit.

Geometric, soluțiile $(y_1, \ldots, y_n)$ sînt *curbe* în $\mathbb{R}^n$. Ele se reprezintă uneori prin *curbele integrale* din $\mathbb{D} = I \times \mathbb{R}^n$ (fig. 7).

Pentru simplificarea prezentării proprietăților generale ale sistemelor liniare se utilizează notațiile matriceale și tehnica de calcul adecvată funcțiilor matriceale. Din aceasta reamintim că noțiunile de limită, continuitate, diferențiabilitate și integrabilitate pentru funcțiile matriceale se reduc la noțiunile respective pentru elementele matricei. Notînd

$$Y = {}^t[y_1, \ldots, y_n], \quad A = [a_{ij}], \quad F = {}^t[f_1, \ldots, f_n],$$

sistemul liniar de ordinul întîi se transcrie sub forma unei ecuații matriceale

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y + F(t),$$

iar condițiile inițiale se scriu $Y(t_0) = Y_0$.

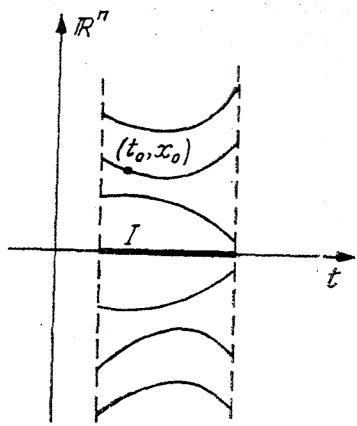


Fig. 7

§2. Spațiul vectorial al soluțiilor unui sistem diferențial liniar omogen

Considerăm sistemul liniar omogen

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y, \quad t \in I,$$

în ipotezele din § 1, și notăm cu V mulțimea tuturor soluțiilor definite pe intervalul I. Să

arătăm că V este un subspațiu vectorial finit dimensional al spațiului vectorial real infinit dimensional $C^1(I)$.

2.1. Teoremă. Dacă A este o matrice de ordinul n, atunci V este un spațiu vectorial izomorf cu $\mathbb{R}^n$.

Demonstrație. Fie Y_1 și Y_2 două soluții ale sistemului, adică

$$\frac{dY_i}{dt} = A(t)Y_i,\ i = 1, 2.$$

Rezultă

$$\frac{d}{dt}(c_1Y_1 + c_2Y_2) = c_1\frac{dY_1}{dt} + c_2\frac{dY_2}{dt} = c_1A(t)Y_1 + c_2A(t)Y_2 = A(t)(c_1Y_1 + c_2Y_2),$$

c_i = const. reale, adică $c_1Y_1 + c_2Y_2$ este o soluție. Aceasta înseamnă că V este un spațiu vectorial real.

Fie $t_0 \in I$. Fiecărei soluții $Y \in V$ îi putem atașa punctul $Y(t_0) \in \mathbb{R}^n$, regulă ce definește o transformare liniară $\mathcal{T} : V \to \mathbb{R}^n$. Transformarea liniară $\mathcal{T}$ este un izomorfism. Într-adevăr, imaginea lui $\mathcal{T}$ este întregul $\mathbb{R}^n$ deoarece teorema de existență asigură că $\forall Y_0 \in \mathbb{R}^n$, există o soluție Y cu condiția inițială $Y(t_0) = Y_0$; injectivitatea lui $\mathcal{T}$ decurge din teorema de unicitate conform căreia singura soluție cu condiția inițială $Y(t_0) = 0$ este $Y = 0$ și deci $\operatorname{Ker} \mathcal{T} = \{0\}$.

Teorema precedentă asigură că dimensiunea spațiului vectorial al soluțiilor unui sistem liniar omogen este n (ordinul matricei A). Rezultă că orice mulțime ordonată formată din n soluții liniar independente este o bază a acestui spațiu.

2.2. Consecință. Fie A o matrice de ordinul n. Dacă $Y_1, \ldots, Y_n$ sînt n soluții liniar independente ale sistemului omogen, atunci orice soluție Y poate fi exprimată în forma

$$Y = \sum_{k=1}^{n} c_k Y_k,$$

unde c_k sînt constante reale.

Soluția $\sum_{k=1}^{n} c_k Y_k$, unde c_k sînt constante arbitrare, se numește *soluția generală* a sistemului liniar omogen. Din ea se obține orice soluție a sistemului, pentru aceasta fiind suficient să particularizăm constantele.

2.3. *Definiție. Fie n soluții ale sistemului liniar omogen, să zicem $Y_1, \ldots, Y_n$. Matricea $W = [Y_1, \ldots, Y_n]$ se numește matrice wronski, iar $w = \det W$ se numește wronskian.*

Dacă notăm $C = {}^t[c_1, \ldots, c_n]$, atunci soluția generală a sistemului omogen se scrie $Y = WC$. De asemenea matricea W satisface ecuația diferențială

$$\frac{dW}{dt} = AW.$$

2.4. Teoremă. Wronskianul are expresia

$$w(t) = w(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(t)\, dt}.$$

Demonstrație. Ținînd seama de regula de derivare a unui determinant, găsim

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=\left|\frac{\mathrm{d}Y_1}{\mathrm{d}t},\ Y_2,\ldots,Y_n\right|+\ldots+\left|Y_1,\ldots,Y_{n-1},\frac{\mathrm{d}Y_n}{\mathrm{d}t}\right|=$$

$$=|AY_1,\ Y_2,\ldots,Y_n|+\ldots+|Y_1,\ldots,Y_{n-1},AY_n|=(\text{temă !})\ldots=w(\operatorname{tr}A).$$

O simplă integrare conduce la expresia din teoremă.

2.5. Teoremă. Soluțiile $Y_1,\ldots,Y_n$ sînt liniar independente dacă și numai dacă $w(t)\neq 0$, $\forall t\in I$.

Demonstrație. Se observă că $w(t)\neq 0, \forall t\in I$ dacă și numai dacă $w(t_0)\neq 0$. Fie izomorfismul $\mathscr{T}:\boldsymbol{V}\to\mathbb{R}^n$, $Y_0=\mathscr{T}(Y)$. Rezultă

$$Y_{10}=\mathscr{T}(Y_1),\ldots,Y_{n0}=\mathscr{T}(Y_n).$$

Deoarece $\mathscr{T}$ este un izomorfism, vectorii $Y_1,\ldots,Y_n$ din $\boldsymbol{V}$ sînt liniar independenți dacă și numai dacă vectorii $Y_{10},\ldots,Y_{n0}$ din $\mathbb{R}^n$ sînt liniar independenți, adică $w(t_0)\neq 0$.

Exemplu. Sistemul liniar omogen

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}=A(t)Y,\quad A(t)=\begin{bmatrix}\dfrac{4}{t} & -\dfrac{4}{t^2}\\[2ex] 2 & -\dfrac{1}{t}\end{bmatrix},\ t>0$$

admite soluțiile particulare

$$Y_1(t)=\begin{bmatrix}1\\ t\end{bmatrix},\quad Y_2(t)=\begin{bmatrix}2t^2\\ t^3\end{bmatrix}.$$

Deoarece

$$w(t)=\begin{vmatrix}1 & 2t^2\\ t & t^3\end{vmatrix}=-t^3<0,$$

soluțiile Y_1 și Y_2 sînt liniar independente și deci soluția generală a sistemului este $Y=c_1Y_1+c_2Y_2$.

§3. Metoda variației constantelor

Fie sistemul liniar neomogen

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}=A(t)Y+F(t)$$

și sistemul liniar omogen asociat

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}=A(t)Y,$$

ambele pe intervalul I. Legătura între soluțiile generale ale celor două sisteme este dată de

21 — c. 625 33

3.1. Teoremă. Soluţia generală a sistemului neomogen este suma dintre o soluţie particulară a sistemului neomogen şi soluţia generală a sistemului omogen.

Demonstraţie. Dacă Y_p este o soluţie a sistemului neomogen, atunci putem pune $Y = U + Y_p$, unde U este noua necunoscută. Înlocuind în sistemul neomogen deducem

$$\frac{dU}{dt} = A(t)U.$$

Astfel U trebuie să fie soluţia generală a sistemului omogen.

Dacă cunoaştem soluţia generală a sistemului omogen, atunci soluţia particulară a sistemului neomogen poate fi aflată prin metoda variaţiei constantelor. Mai precis este adevărată următoarea

3.2. Teoremă. Dacă $Y(t) = W(t)C$ este soluţia generală a sistemului omogen, atunci soluţia particulară a sistemului neomogen poate fi găsită sub forma $Y(t) = W(t)C(t)$, unde $\frac{dC}{dt} = W^{-1}F$ pe I.

Demonstraţie. Prin ipoteză

$$\frac{dW}{dt} = AW, \quad \frac{dC}{dt} = W^{-1}F.$$

Rezultă

$$\frac{dY}{dt} = \frac{d}{dt}(WC) = \frac{dW}{dt}C + W\frac{dC}{dt} = (AW)C + W(W^{-1}F) =$$

$$= A(WC) + F = AY + F,$$

adică $Y(t) = W(t)C(t)$ defineşte o soluţie a sistemului neomogen.

O b s e r v a ţ i e. Mulţimea soluţiilor unui sistem liniar neomogen este convexă.

Exemplu. Fie sistemul

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y + F(t), \quad A(t) = \begin{bmatrix} \frac{4}{t} & -\frac{4}{t^2} \\ 2 & -\frac{1}{t} \end{bmatrix}, \quad F(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{t} \\ t \end{bmatrix}, \quad t > 0.$$

Sistemul omogen ataşat admite soluţia generală (vezi § 2).

$$Y(t) = W(t)C, \quad W(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2t^2 \\ t & t^3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Căutăm pentru sistemul neomogen o soluție particulară de forma $Y(t) = W(t)C(t)$, unde

$$\frac{dC}{dt} = W^{-1}F, \quad W^{-1}(t) = \begin{bmatrix} -1 & \frac{2}{t} \\ \frac{1}{t^2} & -\frac{1}{t^3} \end{bmatrix}, \quad t > 0.$$

Rezultă

$$\frac{dC}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{t} \\ \frac{1}{t^3} & -\frac{1}{t^2} \end{bmatrix}, \quad C(t) = \begin{bmatrix} 2t & -\ln t \\ \frac{1}{t} & -\frac{1}{2t^2} \end{bmatrix}$$

și deci soluția generală a sistemului neomogen este definită de

$$Y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2t^2 \\ t & t^3 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2t & -\ln t \\ \frac{1}{t} & -\frac{1}{2t^2} \end{bmatrix} \right), \quad t > 0.$$

§4. Matricea exponențială

Se știe că, $\forall A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, seria

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \ldots, \quad I = \text{matricea unitate},$$

este absolut convergentă și deci convergentă. Ea este uniform convergentă pe fiecare submulțime $\{A \mid \|A\| \leqslant a,\ a \in \mathbb{R}_+\}$, unde $\|A\|$ este norma matricei A. Suma acestei serii se numește *matricea exponențială* și se notează cu e^A.

Dacă notăm cu $\mathcal{O}$ matricea zero, atunci definiția precedentă implică $e^{\mathcal{O}} = I$. De asemenea absolut convergența implică faptul că dacă $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ sînt matrice comutabile, atunci $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$.

Să considerăm acum funcția $\varphi : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ definită prin

$$\varphi(t) = e^{tA}.$$

4.1. Teoremă. Matricea φ satisface ecuația diferențială

$$\frac{d\varphi}{dt} = A\varphi.$$

Demonstrație. Seriile

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dt}\left(\frac{t^k A^k}{k!}\right) = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$$

converg absolut și uniform în orice domeniu din $\mathbb{R} \times \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ caracterizat prin $|t| \leqslant b$, $\|A\| \leqslant a$. De aceea există derivata sumei seriei inițiale și este egală cu suma seriei formată din derivate.

Observaţii. 1) Teorema Cayley-Hamilton asigură că matricea exponenţială,

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!},$$

se reduce la un polinom de gradul $n-1$ în A, unde n este ordinul matricei A.

2) Matricele A şi e^{tA} sînt comutabile. Această observaţie intervine în demonstraţia teoremei care urmează.

4.2. Teoremă. Inversa matricei e^{tA} este e^{-tA}.

Demonstraţie.

Fie $E(t) = e^{tA}e^{-tA}$, $t \in \mathbb{R}$. Prin derivare găsim

$$\frac{dE}{dt}(t) = Ae^{tA}e^{-tA} + e^{tA}(-A)e^{-tA} = \mathcal{O}, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Rezultă $E(t) = E(0) = I$.

În cele ce urmează ne interesează calculul efectiv al lui e^{tA}. În acest scop dăm întîi două exemple în care putem utiliza direct definiţia. Să presupunem că D este o matrice diagonală, adică

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Atunci

$$D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

şi deci

$$e^{tD} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}.$$

Fie J_p o celulă Jordan de ordinul n_p,

$$J_p = \begin{bmatrix} \lambda_p & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_p & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_p \end{bmatrix} = \lambda_p I_p + E_p,$$

unde I_p este matricea unitate de ordinul n_p, iar matricea

$$E_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

este nilpotentă de ordinul n_p. Ţinînd seama că I_p şi E_p sînt comutabile şi avînd în vedere puterile lui E_p, rezultă

$$e^{tJ_p} = e^{\lambda_p t I_p} e^{tE_p} = e^{\lambda_p t}\left[I_p + \frac{tE_p}{1!} + \frac{t^2E_p^2}{2!} + \ldots + \frac{t^{n_p-1}E_p^{n_p-1}}{(n_p-1)!}\right] =$$

$$= e^{\lambda_p t}\begin{bmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \ldots & \frac{t^{n_p-1}}{(n_p-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{t}{1!} & \ldots & \frac{t^{n_p-2}}{(n_p-2)!} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

Mai general, dacă

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & J_k \end{bmatrix}$$

unde J_p, $p = 1, \ldots, k$; sînt celule Jordan de ordinul n_p, $n_1 + \ldots + n_k = n$, atunci se verifică relaţia

$$e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^{tJ_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{tJ_2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & e^{tJ_k} \end{bmatrix}.$$

În general calculul lui e^{tA} pornind de la definiţia ca sumă a unei serii este complicat. De aceea s-au găsit diferite alternative care să simplifice pe cît posibil un asemenea calcul.

4.3. Teoremă. Dacă S este o matrice nesingulară şi dacă notăm $S^{-1}AS = B$, atunci $e^{tA} = Se^{tB}S^{-1}$.

Demonstraţie. Relaţia $A = SBS^{-1}$ implică $A^k = SB^kS^{-1}$. Rezultă

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^kA^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k(SB^kS^{-1})}{k!} = S\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^kB^k}{k!}\right)S^{-1}.$$

4.4. Consecinţă. 1) Dacă A este o matrice diagonalizabilă, iar D este matricea diagonală ataşată lui A, atunci

$$e^{tA} = Se^{tD}S^{-1},$$

unde S este matricea vectorilor proprii.

2) Dacă A are valori proprii multiple şi se reduce la forma canonică Jordan, atunci

$$e^{tA} = Se^{tJ}S^{-1},$$

unde S este matricea vectorilor proprii şi principali.

Exemplu. Să se calculeze e^{tA} pentru

$$1)\ A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad 2)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Soluţie. 1) Valorile proprii ale lui A sînt $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 1$. Utilizînd vectorii proprii deducem

$$S = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad S^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

astfel încît

$$D = S^{-1}AS, \quad D = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rezultă

$$e^{tA} = Se^{tD}S^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{6t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4e^{6t} + e^{t} & 4e^{6t} - 4e^{t} \\ e^{6t} - e^{t} & e^{6t} + 4e^{t} \end{bmatrix}.$$

2) Valorile proprii ale lui A sînt $\lambda_{1,2} = 3$. Din $AX = \lambda X$ găsim vectorul propriu $X = {}^t[1,1]$ Relaţia $AY = \lambda Y + X$ conduce la vectorul principal $Y = {}^t[0, 1]$. Găsim

$$S = [X, Y] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad J = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rezultă

$$e^{tA} = Se^{tJ}S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} e^{3t}\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{bmatrix}.$$

§ 5. Sisteme diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi

Considerăm un sistem diferenţial liniar omogen cu coeficienţi constanţi

$$\frac{dY}{dt} = AY,$$

unde $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Observăm că în mod necesar $Y \in C^{\infty}(\mathbb{R})$. Într-adevăr, $Y \in C^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \dfrac{dY}{dt} \in C^1(\mathbb{R}) \Rightarrow Y \in C^2(\mathbb{R})$ etc.

I. Soluţia generală a unui sistem liniar omogen cu coeficienţi constanţi poate fi găsită sub formă explicită cu ajutorul matricei exponenţiale.

5.1. Teoremă. Soluţia problemei Cauchy

$$\frac{dY}{dt} = AY, \quad Y(t_0) = Y_0$$

este definită prin $Y(t) = e^{(t-t_0)A}Y_0$, $t \in \mathbb{R}$.

Demonstraţie. Conform teoremei de existenţă şi unicitate, precum şi a teoremei de prelungire (§ 1), problema Cauchy are o soluţie unică. De aceea este suficient să facem doar verificări,

$$\frac{dY}{dt} = Ae^{(t-t_0)A}Y_0 = A\,Y, \quad Y(t_0) = e^{(t-t_0)A}Y_0 = Y_0.$$

Exemplu. Să se rezolve problema Cauchy

$$Y' = AY, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{bmatrix}, \quad Y(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Soluţie. Ecuaţia caracteristică $\det(A - \lambda I) = 0$ are rădăcinile $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 0$. Vectorii proprii corespunzători sînt

$$e_1 = {}^t[1, 0, -1], \quad e_2 = {}^t[2, -1, 0], \quad e_3 = {}^t[0, 1, -1].$$

Matricea vectorilor proprii

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

este matricea diagonalizatoare pentru A, adică

$$D = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Obţinem

$$Y(t) = Se^{tD}S^{-1}Y(0) = \begin{bmatrix} -3e^{-3t} + 2e^{-2t} \\ -e^{-2t} + 3 \\ 3e^{-3t} - 3 \end{bmatrix},$$

adică $y_1(t) = -3e^{-3t} + 2e^{-2t}$, $y_2(t) = 3 - e^{-2t}$, $y_3(t) = 3e^{-3t} - 3$.

II. Explicitarea matricei exponenţiale este destul de dificilă şi uneori face apel la tehnici speciale. Dacă nivelul de pregătire nu permite abordarea acestor tehnici, atunci pentru găsirea soluţiei generale a sistemului liniar omogen cu coeficienţi constanţi se poate proceda în felul următor.

Prin calcul direct se observă că

$Y(t) = He^{\lambda t}$, H = vector coloană cu coordonate constante, $t \in \mathbb{R}$, este o soluţie a sistemului liniar omogen cu coeficienţi constanţi dacă şi

numai dacă H este un vector propriu, iar λ este valoarea proprie corespunzătoare a matricei A în $\mathbb{C}$. Implicit soluţiile se caută de fapt în complexificatul spaţiului vectorial $C^\infty(I)$.

Cazul unu. Să presupunem că valorile proprii $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ale matricei A sînt diferite şi că $H_1, \ldots, H_n$ sînt vectorii proprii corespunzători. Acestora le corespund soluţiile liniar independente

$$Y_k = H_k e^{\lambda_k t}, \quad k = 1, \ldots, n$$

şi deci soluţia generală a sistemului diferenţial este

$$Y = c_1 Y_1 + \ldots + c_n Y_n.$$

Evident unele λ_k-uri pot fi complexe şi se grupează în perechi. În acest caz, partea reală sau partea imaginară din Y sînt soluţii generale reale.

Practic. Se determină rădăcinile ecuaţiei caracteristice ataşate matricei A. În ipoteza că acestea sînt simple se caută soluţii de forma $Y(t) = He^{\lambda t}$, unde H este un vector real sau complex după cum este λ. Dacă λ este un număr complex nu este necesară şi utilizarea rădăcinii complex conjugate.

Exemplu. Fie sistemul

$$Y' = AY, \; A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Valorile proprii ale matricei A sînt $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$.

Căutăm soluţii de forma

$$Y(t) = \begin{bmatrix} a + ib \\ c + id \end{bmatrix} e^{(1+i)t}.$$

Introducem în sistem şi găsim $b = c$, $a = -d$. Astfel

$$Y(t) = \begin{bmatrix} a + ib \\ b - ia \end{bmatrix} e^{(1+i)t}$$

este soluţia generală. Evident $\operatorname{Re} Y(t)$ sau $\operatorname{Im} Y(t)$ este soluţia generală reală a sistemului.

Cazul doi. Să presupunem că ecuaţia caracteristică posedă o valoare proprie λ multiplă de ordinul m şi că $H_1, \ldots, H_m$ sînt vectorii ataşaţi lui λ astfel încît

$$AH_1 = \lambda H_1, \; AH_2 = \lambda H_2 + H_1, \ldots, AH_m = \lambda H_m + H_{m-1}.$$

Construim funcţiile vectoriale

$$P_j(t) = \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} H_1 + \frac{t^{j-2}}{(j-2)!} H_2 + \ldots + H_j, \; j = 1, \ldots, m.$$

Să arătăm că funcţiile definite prin

$$Y_j(t) = P_j(t) e^{\lambda}$$

sînt soluţii ale sistemului omogen. Mai întîi observăm că

$$\frac{dP_j}{dt} = P_{j-1}, \quad AP_j = \lambda P_j + P_{j-1}, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Introducînd pe Y_j în

$$\frac{dY}{dt} = AY$$

obţinem o identitate.

Astfel unei valori proprii multiplă de ordinul m îi corespund m soluţii liniar independente de tipul precedent. Partea din soluţia generală corespunzătoare acestor soluţii este de forma $Y(t) = P(t)e^{\lambda t}$, unde $P(t)$ este o matrice de polinoame de gradul $m - 1$.

Practic. Dacă λ este o valoare proprie multiplă de ordinul m, atunci se încearcă o soluţie de tipul $Y(t) = P(t)e^{\lambda t}$, unde $P(t)$ este o matrice coloană ale cărei elemente sînt polinoame de gradul $m - 1$ cu coeficienţi reali sau complecşi după cum este λ.

Dacă soluţia generală găsită este complexă, atunci se separă partea reală sau partea imaginară care sînt soluţii generale reale.

Exemplu. Sistemului

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2 + y_3, \quad \frac{dy_2}{dt} = y_3 + y_1, \quad \frac{dy_3}{dt} = y_1 + y_2$$

i se ataşează matricea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

care admite valorile proprii $\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2,3} = -1$.

Pentru $\lambda_1 = 2$ căutăm $y_1 = ae^{2x}$, $y_2 = be^{2x}$, $y_3 = ce^{2x}$.
Introducînd în sistem rezultă $a = b = c = c_1$. Pentru $\lambda_{2,3} = -1$ căutăm $y_1 = (\alpha_1 t + \beta_1)e^{-t}$, $y_2 = (\alpha_2 t + \beta_2)e^{-t}$, $y_3 = (\alpha_3 t + \beta_3)e^{-t}$. Înlocuind în sistem găsim $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, $\beta_1 = c_2$, $\beta_2 = c_3$, $\beta_3 = -(c_2 + c_3)$.

Soluţia generală a sistemului este

$$Y = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}.$$

III. O cale şi mai simplă pentru găsirea soluţiei generale a sistemelor liniare omogene cu coeficienţi constanţi şi cu puţine funcţii necunoscute se bazează pe observaţia că orice necunoscută a sistemului verifică în acelaşi timp şi o ecuaţie liniară omogenă cu coeficienţi constanţi avînd ordinul cel mult egal cu ordinul matricei sistemului. Tehnica de lucru se numeşte *metoda eliminării*.

Exemplu. Sistemul $x' = y$, $y' = z$, $z' = x$ implică ecuația $x''' - x = 0$. Aceasta are soluția generală

$$x(t) = c_1 e^t + e^{-1/2t}\left[c_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + c_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t\right].$$ Din $y = x'$ deducem $y(t) = c_1 e^t -$

$$- 1/2\, e^{-1/2t}\left[(c_3 + 3c_2) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t - (\sqrt{3}\, c_3 - c_2) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t\right]$$ și din $z = y'$ rezultă $z(t) = c_1 e^t -$

$$-1/2 e^{-1/2t}\left[(c_2 + \sqrt{3}\, c_3) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + (c_3 - \sqrt{3}\, c_2) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t\right].$$

IV. Se observă că soluțiile sistemului diferențial liniar omogen cu coeficienți constanți se exprimă cu ajutorul cvasipolinoamelor. Ținînd seama de acest lucru și de definiția din Cap. 2, § 5, rezultă teorema de stabilitate.

5.2. Teoremă. Fie poziția de echilibru $y_1 = \ldots = y_n = 0$.

1) Dacă toate valorile proprii ale matricei A au partea reală strict negativă, atunci poziția de echilibru este stabilă și asimptotic stabilă.

2) Dacă valorile proprii ale matricei A sînt reale strict negative sau complexe cu partea reală negativă, rădăcinile pur imaginare existînd și avînd fiecare în parte proprietatea că dimensiunea subspațiului propriu atașat este egală cu ordinul de multiplicitate al valorii proprii, atunci poziția de echilibru este stabilă dar nu asimptotic stabilă.

3) Dacă o valoare proprie a matricei A are partea reală strict pozitivă sau dacă există o rădăcină pur imaginară astfel încît dimensiunea subspațiului propriu atașat să fie mai mică decît ordinul de multiplicitate al valorii proprii, atunci poziția de echilibru nu este stabilă.

V. Să considerăm sistemul liniar neomogen cu coeficienți constanți

$$\frac{dY}{dt} = AY + F(t), \quad t \in I,$$

unde $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, căruia i se atașează sistemul omogen

$$\frac{dY}{dt} = AY.$$

Soluția generală a sistemului neomogen este suma dintre o soluție particulară a sistemului neomogen și soluția generală a sistemului omogen. După explicațiile precedente soluția generală a sistemului omogen se exprimă cu ajutorul matricei exponențiale, matrice ale cărei elemente sînt cvasipolinoame. Soluția particulară a sistemului neomogen se poate afla prin metoda variației constantelor.

În cazul în care F este o matrice de cvasipolinoame, soluția particulară a sistemului neomogen se poate afla și prin metoda coeficienților nedeterminați.

§6. Probleme

1. Se dă sistemul diferențial liniar omogen $Y' = AY$, unde

$$A = \begin{bmatrix} 2\operatorname{ctg} t & -1 \\ -2 & \operatorname{tg} t \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Să se arate că vectorii $Y_1(t) = {}^t\left[\sin t,\ 2\sin t \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right) + \sin t\right]$, $Y_2(t) = {}^t\left[\cos t,\ 2\cos t \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right) + \cos t + 2\operatorname{tg} t\right]$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - \{0\}$ constituie o bază în spaţiul vectorial al soluţiilor sistemului. Să se scrie soluţia generală a sistemului.

2. Se dau sistemele diferenţiale liniare neomogene şi soluţiile generale ale sistemelor omogene ataşate:

1) $$\frac{dY}{dt} = A(t)Y + F(t), A(t) = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad F(t) = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix};$$

$$Y(t) = c_1 \begin{bmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} te^{4t} \\ (t-1)e^{4t} \end{bmatrix}.$$

2) $$\frac{dY}{dt} = A(t)Y + F(t), \quad A(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ \cos t \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$Y(t) = c_1 \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \sin t \\ \sin t + \cos t \\ \cos t \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -\cos t \\ \sin t - \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Utilizînd metoda variaţiei constantelor să se găsească soluţiile generale ale sistemelor neomogene.

3. Să se calculeze e^{tA} pentru

1) $A = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$, 2) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & -1 \end{bmatrix}$, 3) $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

4. Să se rezolve problemele Cauchy

1) $$Y' = AY, \ A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad Y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2) $$Y' = AY, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \quad Y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5. Se dau sistemele

1) $x' = y,\ y' = z,\ z' = -x$
2) $x' + y - z = 0,\ y' - z = 0,\ z' + x - z = 0$
3) $x' = y + z,\ y' = z + x,\ z' = x + y.$

Să se găsească soluţiile generale şi pentru fiecare caz în parte să se cerceteze stabilitatea poziţiei de echilibru.

6. Să se determine soluțiile generale ale următoarelor sisteme:

1) $x' = x\cos t,\ y' = xe^{-\sin t}$

2) $2x' + y' = 3t,\ x'' + y' - 2y = e^{2t}$

3) $x' + y' = y + e^t,\ 2x' + y' = -2y + \cos t.$

Capitolul 5

LINII ȘI HIPERSUPRAFEȚE DE CÎMP

§1. Linii de cîmp și sisteme simetrice

Fie $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă și conexă, iar X un cîmp vectorial de clasă C^1 pe $\mathbb{D}$. O curbă $\alpha : I \to \mathbb{D}$ de clasă C^1 cu proprietatea $\alpha'(t) = X(\alpha(t)), \forall t \in I$, se numește *linie de cîmp*. Altfel spus α are proprietatea că pentru fiecare $t \in I$ vectorul tangent la α în punctul $\alpha(t)$ coincide cu $X(\alpha(t))$, adică cîmpul vectorial tangent la α coincide cu $X \circ \alpha$ (fig. 8). De asemenea se observă că ecuația diferențială $\alpha'(t) = X(\alpha(t)),\ t \in I$, este echivalentă cu ecuația integrală $\alpha(t) = \alpha(t_0) + \int_{t_0}^{t} X(\alpha(t))\,dt$.

1.1. Teoremă. Dacă X este un cîmp vectorial de clasă C^1 pe o mulțime deschisă $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$, atunci pentru fiecare $x_0 \in \mathbb{D}$ există un interval deschis I care conține pe t_0 și o linie de cîmp $\alpha : I \to \mathbb{D}$ a lui X astfel încît

1) $\alpha(t_0) = x_0$,

2) orice altă linie de cîmp $\beta : J \to \mathbb{D}$ a lui X cu $\beta(t_0) = x_0$ are proprietatea $J \subseteq I$ și $\beta(t) = \alpha(t), \forall t \in J$.

α se numește *linie de cîmp maximală a lui X prin x_0*.

Demonstrație. Aici avem de-a face cu o reformulare a teoremei de existență și unicitate pentru soluțiile unui sistem diferențial de ordinul întîi (vezi Cap. 2, § 2). Într-adevăr, utilizînd notațiile

$$X(x) = (X_1(x), \ldots, X_n(x)), \quad X_i : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$$

$$\alpha(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)), \quad x_i : I \to \mathbb{R},$$

$$\alpha'(t) = \left(\frac{dx_1}{dt}(t), \ldots, \frac{dx_n}{dt}(t)\right),$$

ecuația diferențială vectorială $\alpha'(t) = X(\alpha(t)),\ \forall\, t \in I$, se transcrie sub forma unui *sistem diferențial autonom*

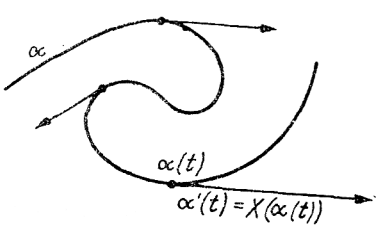


Fig. 8

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = X_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = X_n(x_1, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Teorema de existență arată că există o vecinătate I_1 a lui t_0 și n funcții : $x_i : I_1 \to \mathbb{R}$

de clasă C^1 care satisfac sistemul (1) şi condiţiile iniţiale $x_i(t_0) = x_{i0}$, $i = 1, \ldots, n$, $x_0 = (x_{10}, \ldots, x_{n0})$. Ansamblul $\beta_1(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ defineşte o linie de cîmp $\beta_1 : I_1 \to \mathbb{D}$ a lui X cu $\beta_1(t_0) = x_0$.

Teorema de unicitate arată că dacă $\tilde{x}_i : I_2 \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, este o altă soluţie a sistemului (1) care satisface condiţiile iniţiale $\tilde{x}_i(t_0) = x_{i0}$, atunci $\tilde{x}_i(t) = x_i(t)$, $\forall t \in I_1 \cap I_2$. Echivalent, dacă $\beta_2 = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) : I_2 \to \mathbb{D}$ este o altă linie de cîmp a lui X cu $\beta_2(t_0) = x_0$, atunci $\beta_1(t) = \beta_2(t)$, $\forall\, t \in I_1 \cap I_2$.

Din acestea rezultă: (i) există o singură linie de cîmp maximală α a lui X cu $\alpha(t_0) = x_0$, definită pe reuniunea domeniilor de definiţie ale liniilor de cîmp ale lui X care aplică pe t_0 în x_0; (ii) orice altă linie de cîmp $\beta : J \to \mathbb{D}$ a lui X cu $\beta(t_0) = x_0$ este o restricţie a lui α.

Observaţie. Soluţiile sistemului algebric $X_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, X_n(x_1, \ldots, x_n) = 0$ generează poziţiile de echilibru ale sistemului (1).

Exemplu: Fie $X(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$. Liniile sale de cîmp sînt soluţiile sistemului

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1,$$

adică

$$x_1(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \quad x_2(t) = c_1 \sin t - c_2 \cos t$$

Linia de cîmp maximală care trece prin punctul $x_1(0) = a$, $x_2(0) = b$ este

$$\alpha(t) = (a \cos t - b \sin t,\ a \sin t + b \cos t),\ t \in \mathbb{R}.$$

Evident, $\|\alpha(t)\|^2 = a^2 + b^2$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, şi deci α este un cerc de rază $\sqrt{a^2 + b^2}$ (fig. 9).

Un cîmp vectorial de clasă C^1 pe o mulţime deschisă şi conexă $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$ cu proprietatea că pentru fiecare $x_0 \in \mathbb{D}$ linia de cîmp maximală a lui X prin x_0 are domeniul de definiţie egal cu $\mathbb{R}$ se numeşte *complet*.

1.2. Teoremă. Fie X un cîmp vectorial de clasă C^1 pe o mulţime deschisă şi conexă $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$, fie $x_0 \in \mathbb{D}$ şi $\alpha : I \to \mathbb{D}$ o linie de cîmp maximală a lui X prin x_0. Dacă $\beta : J \to \mathbb{D}$ este o altă linie de cîmp a lui X cu $\beta(t_1) = x_0$ pentru $t_1 \in J$, atunci $\beta(t) = \alpha(t + t_0 - t_1)$, $\forall\, t \in J$.

Demonstraţie. Notăm $s = t_0 - t_1$ şi observăm că dacă $t \to \alpha(t)$ este o linie de cîmp, atunci şi $t \to \alpha(t + s)$ este tot linie de cîmp. Într-adevăr,

$$\frac{d\alpha}{dt}(t + s)\Big|_{t=t_0} = \frac{d\alpha}{dt}(t)\Big|_{t=t_0+s} =$$

$$= X(\alpha(t_0 + s)) = X(\alpha(t + s))\Big|_{t=t_0}.$$

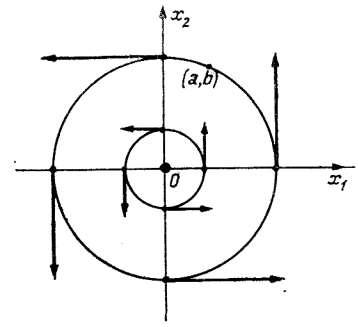


Fig. 9

1.3. Consecinţă. Prin fiecare punct $x_0 \in \mathbb{D}$ trece o singură linie de cîmp maximală.

Fie X un cîmp vectorial de clasă C^1 pe $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$. Discuţia precedentă arată că diversele

linii de cîmp ale lui X nu se intersectează. Uneori însă există linii de cîmp care se autointersectează, adică sînt curbe închise. În particular, poziţiile de echilibru ale sistemului (1) fac parte din această categorie de curbe.

1.4. Teoremă. Fie X un cîmp vectorial de clasă C^1 pe $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$. Dacă $\alpha : I \to \mathbb{D}$ este o linie de cîmp a lui X cu $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$, $t_1, t_2 \in I$, $t_1 < t_2$ (adică α este închisă), atunci α se poate prelungi la întreaga axă $\mathbb{R}$, prelungirea $\tilde{\alpha} : \mathbb{R} \to \mathbb{D}$ fiind periodică de perioadă $T \in (0, t_2 - t_1]$.

Demonstraţie. Orice $s \in \mathbb{R}$ se poate reprezenta univoc în forma $s = t + n(t_2 - t_1)$, $t \in [t_1, t_2]$, $n \in \mathbb{Z}$. Funcţia $\tilde{\alpha} : \mathbb{R} \to \mathbb{D}$, definită prin $\tilde{\alpha}(s) = \alpha(t)$ este periodică şi are perioada $\min\{T \mid \tilde{\alpha}(s + T) = \tilde{\alpha}(s)\} \in (0, t_2 - t_1]$. Pe de altă parte, în baza teoremei 1.2, $\tilde{\alpha} : \mathbb{R} \to \mathbb{D}$ este o linie de cîmp. În plus $\tilde{\alpha}(t_1) = \alpha(t_1)$.

Se ştie că pentru o funcţie continuă periodică, mulţimea perioadelor coincide sau cu dreapta reală (caz în care funcţia este constantă) sau cu mulţimea multiplilor întregi ai celei mai mici perioade [3]. De aceea o linie de cîmp care se autointersectează este sau o poziţie de echilibru sau o curbă propriu zis închisă.

Uneori pentru sistemul de tipul (1) se foloseşte scrierea

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, \ldots, x_n)} \; (= dt), \tag{2}$$

cu denumirea de *sistem simetric*. Pentru aceasta se convine că dacă un numitor este funcţia zero, atunci numărătorul respectiv trebuie egalat cu zero. Punctele în care se anulează toţi numitorii generează poziţiile de echilibru.

O funcţie $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ de clasă C^1 se numeşte *integrală primă* a sistemului simetric dacă $D_X f = 0$, unde D_X este operatorul de derivare în raport cu cîmpul vectorial $X = (X_1, \ldots, X_n)$. Relaţia de definiţie $D_X f = 0$ este echivalentă cu fiecare dintre următoarele două proprietăţi:

— funcţia f este constantă de-a lungul oricărei soluţii $\alpha : I \to \mathbb{D}$ a sistemului (2), adică $f \circ \alpha = \text{const}$; indicaţie, $D_X f \circ \alpha = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)$;

— fiecare linie de cîmp $\alpha : I \to \mathbb{D}$ este conţinută în una şi numai una dintre mulţimile de nivel constant ale funcţiei f (fig. 10).

Exemplu. Hamilton a arătat că unele probleme de mecanică, optică, calcul variaţional etc. pot fi modelate cu ajutorul sistemului de ecuaţii

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

unde $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ este o funcţie de clasă C^2 de $2n$ variabile $p_1, \ldots, p_n$; $q_1, \ldots, q_n$. Legea conservării energiei este echivalentă cu faptul că H este o integrală primă a sistemului precedent. Într-adevăr, dacă notăm

$$X_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad X_{n+i} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad X = (X_i, X_{n+i}),$$

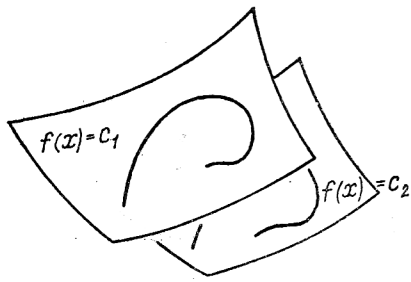


Fig. 10

atunci

$$D_X H = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum_{i=1}^{n} X_{n+i} \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0.$$

Funcția H este un exemplu de integrală primă globală, caz întîlnit destul de rar. În general nu există integrale prime globale ci locale.

1.5. Teoremă. Dacă X este un cîmp de clasă C^1 pe $\mathbb{D}$ și $x_0 \in \mathbb{D}$ este un punct în care $X(x_0) \neq 0$, atunci există o vecinătate U a lui x_0 astfel încît sistemul simetric admite $n-1$ integrale prime $f_1, \ldots, f_{n-1}$ funcțional independente pe U și orice altă integrală primă este o funcție de clasă C^1 de acestea. În aceste condiții soluția generală a sistemului (2) pe U poate fi scrisă în forma

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = c_1, \ldots, f_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) = c_{n-1}.$$

Demonstrație. Continuitatea lui X împreună cu $X(x_0) \neq 0$ asigură existența unei vecinătăți a lui x_0 pe care X este nenul, adică o restricție a soluției $\alpha : J \to \mathbb{D}$ care satisface condiția $\alpha(t_0) = x_0$ este curbă regulată,

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t)), \quad \left(\frac{d\alpha_1}{dt}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d\alpha_n}{dt}\right)^2 > 0, \quad t \in (a, b) \subset I.$$

Fie $\frac{d\alpha_n}{dt}(t_0) = X_n(x_0) \neq 0$. Conform teoremei funcției inverse, într-o vecinătate a lui t_0, funcția definită prin $x_n = \alpha_n(t)$ admite inversa $t = \alpha_n^{-1}(x_n)$. Funcțiile definite prin

$$f_i(x) = x_i - \alpha_i \circ \alpha_n^{-1}(x_n), \quad i = 1, \ldots, n-1, \; x \in U$$

sînt $n-1$ integrale prime ale sistemului (2). Într-adevăr,

$$D_X f_i = \sum_{j=1}^{n} X_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = X_i - X_n \frac{d}{dx_n}(\alpha_i \circ \alpha_n^{-1}(x)) =$$

$$= X_i - X_n \frac{d}{dt} \alpha_i(t) \frac{dt}{dx_n} = 0.$$

Acestea sînt funcțional independente pe U deoarece matricea Jacobian

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \ldots 0 & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ 0 & 1 \ldots 0 & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots 1 & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

are rangul $n-1$.

Fie $f_1, \ldots, f_{n-1}$ integrale prime independente ale sistemului (2). Dacă f este o altă integrală primă, atunci

$$X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

$$X_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \ldots + X_n \frac{\partial f_1}{\partial x_n} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X_1 \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1} + \ldots + X_n \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} = 0.$$

Dar acesta este un sistem liniar omogen de n ecuaţii care admite prin ipoteză soluţia nebanală $(X_1, \ldots, X_n)$. Rezultă că determinantul sistemului trebuie să fie nul,

$$\frac{D(f, f_1, \ldots, f_{n-1})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = 0, \quad \forall\, x \in U$$

şi deci $f, f_1, \ldots, f_{n-1}$ sînt funcţional dependente, adică există $\emptyset$ astfel încît

$$f = \emptyset(f_1, \ldots, f_{n-1}).$$

Reciproc, orice funcţie de clasă C^1 de tipul $f = \emptyset(f_1, \ldots, f_{n-1})$ este o integrală primă a sistemului (2). Într-adevăr,

$$D_X f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \emptyset}{\partial f_i} D_X f_i = 0.$$

Pentru determinarea integralelor prime ale unor sisteme simetrice particulare se utilizează *metoda combinaţiilor integrabile*. În ipoteza că există funcţiile $\lambda_j : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$, de clasă C^1, astfel încît $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j dx_j = df$ şi $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j = 0$, din

$$\frac{dx_1}{X_1} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j dx_j}{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j} = \frac{df}{0}$$

rezultă $df = 0$ şi deci $f(x_1, \ldots, x_n) = c$, în punctele x din $\mathbb{D}$ caracterizate de sistemul simetric, adică $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $(x_1, \ldots, x_n) \to f(x_1, \ldots, x_n)$ este o integrală primă a sistemului simetric. Expresia $\sum_j \lambda_j dx_j = df$, cu condiţia $\sum_j \lambda_j X_j = 0$, se numeşte *combinaţie integrabilă*.

Exemplu.

$$\frac{dx}{bz-cy}=\frac{dy}{cx-az}=\frac{dz}{ay-bx}=\frac{adx+bdy+cdz}{0}=\frac{xdx+ydy+zdz}{0}.$$

Rezultă $adx+bdy+cdz=0$, $xdx+ydy+zdz=0$ și deci $ax+by+cz=c_1$, $x^2+y^2+z^2=c_2$. Fie integralele prime definite prin $f_1(x,y,z)=ax+by+cz$ respectiv $f_2(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ și

$$J=\begin{bmatrix} a & b & c \\ 2x & 2y & 2z \end{bmatrix}$$

matricea Jacobian atașată lui (f_1, f_2). Deoarece

$$\operatorname{rang} J=\begin{cases} 1 & \text{pe } A=\{(x,y,z)\mid ay-bx=0,\ az-cx=0,\ bz-cy=0\} \\ 2 & \text{pe } \mathbb{R}^3-A \end{cases}$$

rezultă că soluția generală a sistemului pe $\mathbb{R}^3-A$ este familia de cercuri $ax+by+cz=c_1$, $x^2+y^2+z^2=c_2$. Se observă că A este mulțimea pozițiilor de echilibru.

O b s e r v a ț i i. 1) $k(\leqslant n-1)$ integrale prime funcțional independente determină o subvarietate a lui $\mathbb{R}^n$ cu $n-k$ dimensiuni, iar liniile de cîmp se află complet incluse în această subvarietate.

2) Dacă găsim $n-2$ integrale prime funcțional independente $f_1,\ldots,f_{n-2}$ ale sistemului (2), atunci găsirea soluției generale se reduce la găsirea soluției generale a unei ecuații diferențiale de ordinul întîi.

Pentru a justifica afirmația precedentă, fie subvarietatea bidimensională

$$f_1(x_1,\ldots,x_n)=c_1,\ldots,f_{n-2}(x_1,\ldots,x_n)=c_{n-2}.$$

Avem un sistem de $n-2$ ecuații care definesc pe $x_1,\ldots,x_{n-2}$ în funcție de x_{n-1}, x_n:

$$x_k=\varphi_k(x_{n-1},x_n;c_1,\ldots,c_{n-2}),\ k=1,\ldots,n-2.$$

Dar

$$\frac{dx_{n-1}}{X_{n-1}}=\frac{dx_n}{X_n}.$$

Înlocuind pe x_k obținem o ecuație de ordinul unu cu soluția

$$\varnothing(x_{n-1},x_n;c_1,\ldots,c_{n-2})=c_{n-1}.$$

Punînd $c_k=f_k$ rezultă $f_{n-1}(x)=c_{n-1}$, o nouă integrală primă funcțional independentă de celelalte.

Exemplu. Fie sistemul

$$\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{-xy}=\frac{dz}{y^2},\ x>0,\ y>0.$$

Din $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{-y}$ rezultă $xy=c_1$. Din $\dfrac{dy}{-xy}=\dfrac{dz}{y^2}$ găsim

$$\frac{dy}{c_1}+\frac{dz}{y^2}=0 \text{ sau } \frac{y^3}{3}+c_1z=c_2. \text{ Deci } xy=c_1,\ y^3+3xyz=c_2,\ x>0,$$

$y>0$ este soluția generală a sistemului.

3) Avînd în vedere principiul reducerii, o *integrală primă* a unei ecuații diferențiale (sau sistem) de ordin arbitrar este, prin definiție, o integrală primă a sistemului de ordinul întîi la care aceasta (acesta) se reduce.

4) În cazul spațiului cu trei dimensiuni, se utilizează și notațiile $\vec{V}(x, y, z) = v_1(x, y, z)\vec{i} + v_2(x, y, z)\vec{j} + v_3(x, y, z)\vec{k}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$. Sistemul simetric

$$\frac{dx}{v_1(x, y, z)} = \frac{dy}{v_2(x, y, z)} = \frac{dz}{v_3(x, y, z)}$$

este echivalent cu ecuația vectorială $\vec{V} \times d\vec{r} = \vec{0}$.

Exemplu. Fie

$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{q_0}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 - \{0\},$$

cîmpul electrostatic produs de sarcina q_0. Liniile de cîmp sînt soluțiile sistemului $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$ adică familia de semidrepte $x = c_1 y$, $x = c_2 z$; $y = 0$, $z = 0$; $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$.

§2. Stabilitatea pozițiilor de echilibru

Considerăm sistemul autonom

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Din punct de vedere fizic un asemenea sistem se interpretează ca fiind legea locală de evoluție a unui proces. Punctele x în care se anulează X generează pozițiile de echilibru ale sistemului. Stabilitatea acestor poziții ne interesează în mod deosebit.

Cazul sistemelor liniare cu coeficienți constanți a fost deja discutat în § 5, Cap. 4. Acest caz este important prin sine însuși, dar și prin faptul că situații mult mai generale se reduc tot la el.

Presupunem $X = (X_1, \ldots, X_n) \in C^2(\mathbb{D})$ și $x = 0$ ca fiind o poziție de echilibru. Avem $X_i(0) = 0$ și diferențiabilitatea lui X implică

$$X_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_j}(0) x_j + \|x\| F_i(x), \quad \lim_{x \to 0} F_i(x) = 0.$$

Notăm $A = \left[\frac{\partial X_i}{\partial x_j}(0)\right]$ și utilizăm notațiile matriceale. Sistemului

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \|x\| F(x)$$

i se ataşează sistemul liniar omogen cu coeficienţi constanţi

$$\frac{dx}{dt} = Ax.$$

Teorema care urmează arată că perturbaţia $\|x\| F(x)$ nu distruge stabilitatea asimptotică a poziţiei de echilibru a sistemului liniar omogen.

2.1. Teoremă. Dacă toate valorile proprii ale matricei A au părţile reale strict negative, atunci poziţia de echilibru $x = 0$ a sistemului

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \|x\| F(x)$$

este asimptotic stabilă (şi deci stabilă).

Demonstraţia este destul de complicată şi de aceea o ocolim. Ne mulţumim cu un exemplu care pune în evidenţă modul concret de folosire a teoremei.

Exemplu. Se consideră sistemul

$$\frac{dx}{dt} = -10x + 4e^y - 4\cos y^2$$

$$\frac{dy}{dt} = 2e^x - 2 - y + x^4, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Deoarece în jurul originii $e^x \simeq 1 + x$, $\cos y^2 \simeq 1$ sistemul liniar ataşat este

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -10x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases}$$

Matricea

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

are valorile proprii strict negative. De aceea poziţia de echilibru (0, 0) a sistemului liniar omogen este asimptotic stabilă. În consecinţă această poziţie este asimptotic stabilă şi pentru sistemul iniţial.

§ 3. Hipersuprafeţe de cîmp şi ecuaţii liniare cu derivate parţiale

Fie $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un cîmp vectorial de clasă C^1 pe o mulţime deschisă şi conexă $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$. Fie $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1 şi $M : f(x) = c$ o hipersuprafaţă de nivel constant c. Dacă X este un cîmp vectorial tangent

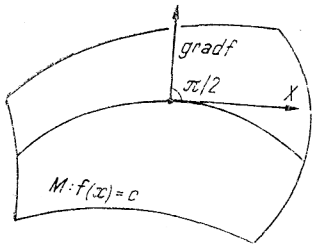


Fig. 11

la M (fig. 11), adică $(X, \operatorname{grad} f)=0$ sau $D_X f=0$, atunci M se numește *hipersuprafață de cîmp* a lui X. Explicit, hipersuprafețele de cîmp sînt caracterizate prin ecuația diferențială

$$(3) \quad X_1(x)\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \ldots + X_n(x)\frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = 0,$$

care poartă numele de *ecuație liniară omogenă cu derivate parțiale de ordinul întîi.*

O hipersuprafață de cîmp mai poate fi privită și ca fiind o hipersuprafață generată de linii de cîmp ale lui X. Pe de altă parte, liniile de cîmp ale lui X sînt soluții ale sistemului simetric (vezi § 1)

$$(4) \qquad \frac{dx_1}{X_1(x)} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n(x)},$$

numit *sistemul caracteristic* atașat ecuației (3).

Parafrazînd discuția integralelor prime și proprietățile acestora rezultă că:

— orice integrală primă a sistemului (4) este o soluție a ecuației (3) și reciproc, orice soluție a ecuației (3) este o integrală primă a sistemului (4);

— fie $f_1, \ldots, f_{n-1}$ cele $n-1$ integrale prime funcțional independente definite de sistemul (2) într-o vecinătate U a unui punct $x_0 \in \mathbb{D}$ în care $X(x_0) \neq 0$. O funcție f de clasă C^1 este o soluție a ecuației (3) dacă și numai dacă ea este de tipul $f = \emptyset(f_1, \ldots, f_{n-1})$. Cu alte cuvinte *soluția generală* a ecuației (3) este o funcție arbitrară de clasă C^1 de cele $n-1$ integrale prime funcțional independente ale sistemului (4).

Aceste considerații împreună cu faptul că dacă $f_1, \ldots, f_{n-1}$ sînt integrale prime funcțional independente ale sistemului (4), atunci soluția generală a sistemului se poate scrie în forma

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = c_1, \ldots, f_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) = c_{n-1}$$

conduc la următoarele concluzii:

— pentru găsirea soluției generale a ecuației (3) este suficient să determinăm soluția generală a sistemului (4);

— pentru obținerea soluției generale a sistemului (4) este suficient să găsim $n-1$ soluții funcțional independente ale ecuației (3).

Exemplu. Să găsim soluția generală a ecuației

$$(x-a)\frac{\partial f}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y} + (z-c)\frac{\partial f}{\partial z} + (t-d)\frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad x \neq a.$$

Atașăm sistemul

$$\frac{dx}{x-a} = \frac{dy}{y-b} = \frac{dz}{z-c} = \frac{dt}{t-d}.$$

Rezultă

$$\frac{y-b}{x-a}=c_1,\ \frac{z-c}{x-a}=c_2,\ \frac{t-d}{x-a}=c_3$$

și deci

$$f(x, y, z)=\varnothing\left(\frac{y-b}{x-a},\ \frac{z-c}{x-a},\ \frac{t-d}{x-a}\right),\quad x\neq a.$$

Fie $f=\varnothing(f_1,\ldots,f_{n-1})$ soluția generală a ecuației (3) și $M_c:\varnothing(f_1(x),\ldots$ $\ldots,f_{n-1}(x))=c$ familia hipersuprafețelor de cîmp.

Problema lui Cauchy pentru o ecuație de tipul (3) constă în determinarea hipersuprafeței de cîmp care să conțină o subvarietate cu $n-2$ dimensiuni $\Gamma: g(x_1,\ldots,x_n)=0,\ h(x_1,\ldots,x_n)=0$. În anumite condiții problema lui Cauchy admite soluție unică [19]. Pentru cazurile particulare se observă că hipersuprafața căutată poate fi privită ca fiind generată de liniile de cîmp determinate de sistemul (4), $f_1(x)=c_1,\ldots,f_{n-1}(x)=c_{n-1}$, care întîlnesc pe Γ. Ecuațiile $f_1(x)=c_1,\ldots,f_{n-1}(x)=c_{n-1}$, $g(x)=0$, $h(x)=0$ formează un sistem algebric de $n+1$ ecuații cu n necunoscute $x_1,\ldots,x_n$. Eliminînd pe $x_1,\ldots,x_n$ obținem condiția de compatibilitate $\varnothing(c_1,\ldots,c_{n-1})=0$ și apoi eliminînd parametrii $c_1,\ldots,c_n$ găsim hipersuprafața de cîmp $M:\varnothing(f_1(x),\ldots,f_{n-1}(x))=0$.

Exemplu. Se dă ecuația

$$(x^2+y^2)\frac{\partial f}{\partial x}+2xy\frac{\partial f}{\partial y}+xz\frac{\partial f}{\partial z}=0,\ x+y>0,\ x-y<0,\ z>0.$$

Să se determine suprafața de cîmp care se sprijină pe curba $\Gamma: x=a,\ y^2+z^2=a^2$.

Soluție. Relațiile $x+y>0$, $x-y<0$ implică $y>0$. Asociem sistemul simetric

$$\frac{dx}{x^2+y^2}=\frac{dy}{2xy}=\frac{dz}{xz}.$$

Rezultă

$$\frac{dy}{2y}=\frac{dz}{z},\quad \frac{d(x+y)}{(x+y)}=\frac{d(x-y)}{(x-y)^2},$$

de unde

$$\frac{z^2}{y}=c_1,\quad \frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}=\frac{2}{c_2}.$$

Integralele prime sînt funcțional independente pe mulțimea specificată în enunț, iar condiția de compatibilitate a sistemului

$$x=a,\ y^2+z^2=a^2,\ \frac{z^2}{y}=c_1,\ \frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}=\frac{2}{c_2},\quad x+y>0,\ x-y<0,\ z>0$$

este $c_1=c_2$. Deci $M: y^2+z^2-x^2=0,\ x+y>0,\ x-y<0,\ y>0,\ z>0$.

Ecuațiile liniare neomogene cu derivate parțiale de ordinul întîi au forma

$$X_1(x,f)\frac{\partial f}{\partial x_1}+\ldots+X_n(x,f)\frac{\partial f}{\partial x_n}=F(x,f),$$

unde f este funcția necunoscută. În acest caz f se caută sub formă implicită $\emptyset(x,f)=0$, ecuația diferențială reducîndu-se la o ecuație de tipul (3) căreia îi corespunde sistemul simetric

$$\frac{dx_1}{X_1(x,f)}=\ldots=\frac{dx_n}{X_n(x,f)}=\frac{df}{F(x,f)}.$$

Se află soluția generală a acestui sistem, apoi soluția generală $\emptyset$ a ecuației diferențiale corespunzătoare (liniară omogenă) și din $\emptyset(x,f)=0$ rezultă f.

Exemplu. Să găsim soluția generală a ecuației

$$xz\frac{\partial z}{\partial x}-yz\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+y^2.$$

Sistemul

$$\frac{dx}{xz}=\frac{dy}{-yz}=\frac{dz}{x^2+y^2}$$

admite soluția generală $xy=c_1$, $x^2-y^2-z^2=c_2$, pe $\mathbb{R}^3-Oz$. De aceea soluția generală a ecuației liniare neomogene pe $\mathbb{R}^3-Oz$ este definită prin $\emptyset(xy,\ x^2-y^2-z^2)=0$. Punctele axei Oz sînt poziții de echilibru.

§ 4. Metoda rețelei de integrare a ecuațiilor cu derivate parțiale

Pentru simplificare fie ecuația cu derivate parțiale de ordinul întîi $a\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}=F(x,y)$, unde f este funcția necunoscută de clasă C^1 pe $[a,\ b]\times[0,\ T]$ care satisface condiția inițială $f(x,0)=g(x)$. Constanta a este dată, iar F și g sînt funcții de clasă C^1 cunoscute. Această problemă are soluția exactă $f(x,y)=$

$$=g(x-ay)+\int_0^y F(at-ay+x,t)\,dt.$$

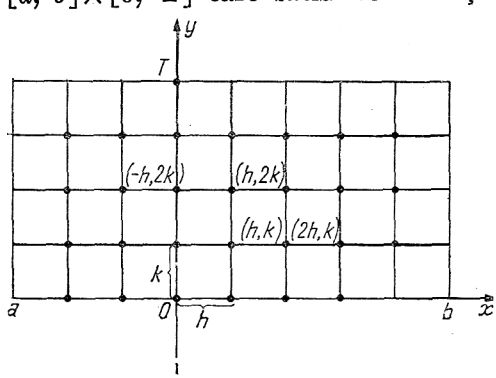


Fig. 12

Metoda numerică de integrare, numită *metoda rețelei*, constă în următoarele: se înlocuiește domeniul de integrare printr-o rețea *dreptunghiulară de pas dublu* h, k ($h>0$, $k>0$ convenabil alese, fig. 12),

adică printr-o mulţime *discretă de puncte* $M_{p,q}$ de coordonate $x_p = ph$ şi $y_q = qk$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \geqslant 0$, numite nodurile reţelei; se acoperă domeniul de integrare $[a, b] \times [0, T]$ cu o reţea de dreptunghiuri cu laturile paralele cu axele şi de lungimi egale cu multiplii întregi de h şi respectiv k şi apoi se determină valorile funcţiei f în nodurile reţelei. Algoritmul este următorul: se fixează h şi k, se notează $F_{p,q} = F(ph, kq)$, $g_p = g(ph)$, $f_{p,q} = f(ph, qk)$ şi se înlocuieşte problema Cauchy $a \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = F(x, y)$, $f(x, 0) = g(x)$ prin sistemul de ecuaţii cu *diferenţe finite* $\dfrac{f_{p,q+1} - f_{p,q}}{k} + a \dfrac{f_{p+1,q} - f_{p,q}}{h} = F_{p,q}$; $f_{p,0} = g_p$, în care a, $F_{p,q}$, g_p sînt numere reale cunoscute, iar

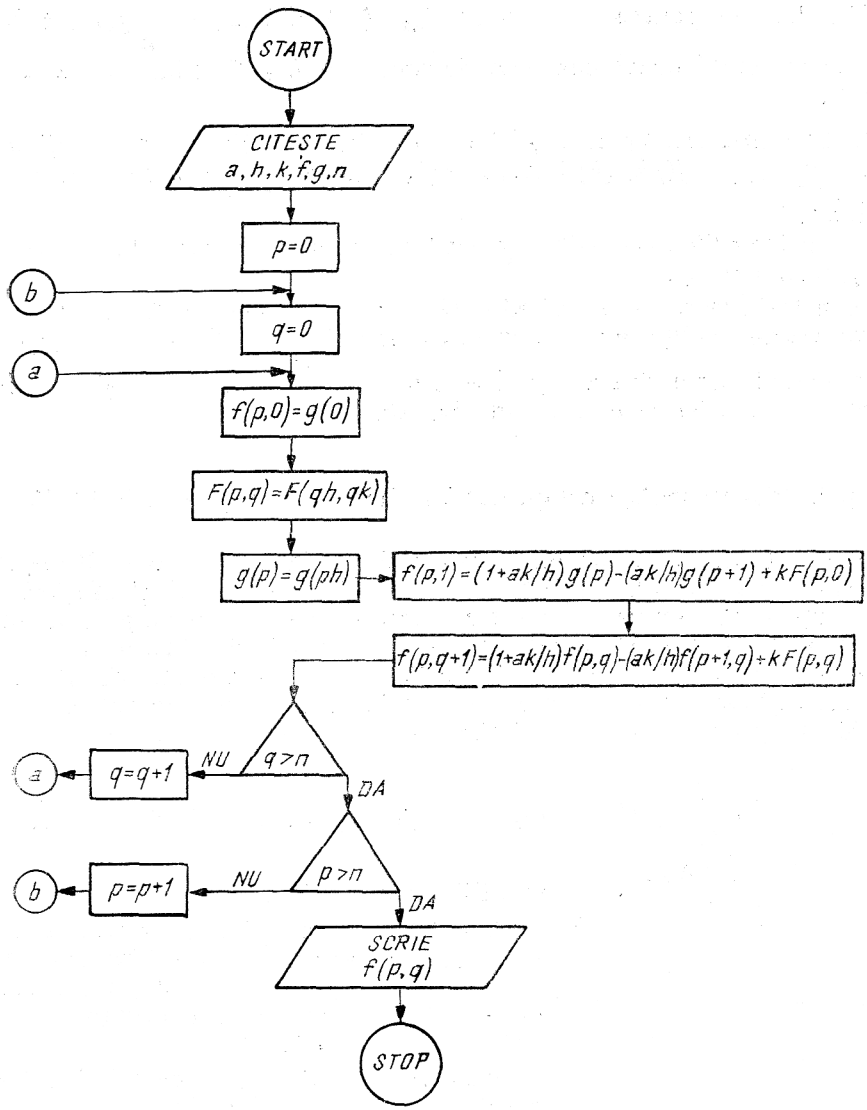


Fig. 13

şirul $(f_{p,q})$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \geqslant 0$, este un şir dublu de numere reale care se determină. Primul raport din acest sistem aproximează pe $\frac{\partial f}{\partial y}$, iar al doilea raport aproximează derivata $a\frac{\partial f}{\partial x}$. Prima ecuaţie a sistemului se scrie şi sub forma $f_{p,q+1} = (1 + ak/h)f_{p,q} - a\frac{k}{h}f_{p+1,q} + kF_{p,q}$. Luînd $q = 0$ obţinem

$$f_{p,1} = (1 + ak/h)f_{p,0} - a\frac{k}{h}f_{p+1,0} + F_{p,0} = (1 + ak/h)g_p - a\frac{k}{h}g_{p+1} + kF_{p,0},$$

care dă valoarea $f_{p,1}$ deoarece membrul drept al acestei egalităţi este cunoscut. Mai departe, pentru $q = 1$, avem $f_{p,2} = (1 + ak/h)f_{p,1} - a\frac{k}{h}f_{p+1,1} + kF_{p,1}$ care are membrul drept cunoscut deoarece pe $f_{p,1}$ îl ştim de la pasul anterior.

4.1. Teoremă. Dacă paşii reţelei h şi k satisfac condiţia $0 \leqslant -ak/h \leqslant 1$, atunci $\sup\limits_{p \in \mathbb{Z}} |f_{p,q} - f(ph, qk)| \leqslant nk\,|\eta(h, k)|$, unde $\lim\limits_{h,\,k \to 0} \eta(h, k) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n =$ fixat.

Această inegalitate constituie o evaluare a erorii în formula aproximativă $f(ph, kq) \simeq f_{p,q}$.

În concluzie teorema afirmă că dacă $h, k \to 0$ şi n este suficient de mare determinat de condiţia $nk =$ constant, atunci $\lim\limits_{h,\,k \to 0} \sup |f_{p,q} - f(ph, qk)| = 0$ şi deci metoda numerică a reţelei este convergentă. Schema logică pentru algoritmul metodei este dată în fig. 13.

§ 5. Hipersuprafeţe ortogonale liniilor de cîmp şi ecuaţii Pfaff

Fie $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un cîmp vectorial de clasă C^1 pe o mulţime deschisă şi conexă $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$. Fie $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^2 şi $M : f(x) = c$ o hipersuprafaţă de nivel constant c. Dacă X este coliniar cu grad f, adică $\exists\, \lambda : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ de clasă C^1 astfel încît $X = \lambda \operatorname{grad} f$ (fig. 14), atunci M se numeşte *hipersuprafaţă ortogonală liniilor de cîmp* ale lui X. Deoarece $(dx_1, \ldots, dx_n)$ este un vector din planul tangent la M în punctul x, rezultă că o hipersuprafaţă ortogonală liniilor de cîmp ale lui X satisface ecuaţia

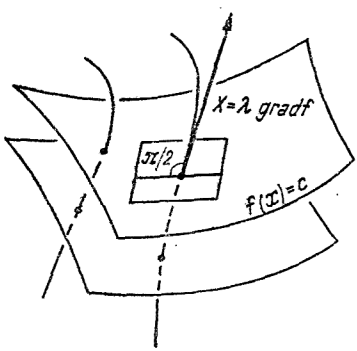


Fig. 14

$$X_1(x)dx_1 + \ldots + X_n(x)\,dx_n = 0, \tag{5}$$

numită *ecuaţie Pfaff*.

Uneori în loc de cîmpul vectorial $X = (X_1, \ldots, X_n)$ este preferată utilizarea 1-formei diferenţiale ataşate $\omega = X_1(x)\,dx_1 + \ldots + X_n(x)dx_n$ context în care ecuaţia Pfaff se scrie simplu $\omega = 0$.

Precizare. Soluţiile unei ecuaţii Pfaff sînt mulţimi de puncte din $\mathbb{D}$ (hipersuprafeţe *olonome* sau *neolonome*).

5.1. Teoremă. Dacă $\mathbb{D}$ este un interval n-dimensional şi dacă $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial X_j}{\partial x_i}(x), \forall x \in \mathbb{D}, i, j = 1, \ldots, n$, atunci funcţia $f: \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \int_{x_{10}}^{x_1} X_1(x_1, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_1 + \int_{x_{20}}^{x_2} X_2(x_{10}, x_2, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_2 + \ldots +$$

$$+ \int_{x_{n_0}}^{x_n} X_n(x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}, x_n)\,\mathrm{d}x_n,$$

$x_0 = (x_{10}, \ldots, x_{n0}) \in \mathbb{D}$, are proprietatea $\mathrm{d}f = X_1\mathrm{d}x_1 + \ldots + X_n\mathrm{d}x_n$ şi deci soluţia generală a ecuaţiei Pfaff este definită prin $f(x) = c$.

Demonstraţie. Se observă că

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = X_1(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = \frac{\partial}{\partial x_2}\int_{x_{10}}^{x_1} X_1(x_1, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_1 + X_2(x_{10}, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \int_{x_{10}}^{x_1} \frac{\partial X_1}{\partial x_2}(x_1, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_1 + X_2(x_{10}, x_2, \ldots, x_n) = \int_{x_{10}}^{x_1} \frac{\partial X_2}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_1 +$$

$+ X_2(x_{10}, x_2, \ldots, x_n) = X_2(x)$ etc. De aceea ecuaţia (5) este echivalentă cu $\mathrm{d}f(x) = 0$, iar aceasta este echivalentă cu ecuaţia $f(x) = c$.

5.2. Teoremă. Dacă $\mathbb{D}$ este o mulţime convexă şi dacă $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial X_j}{\partial x_i}(x), \forall x \in \mathbb{D}, i, j = 1, \ldots, n$, atunci funcţia $f: \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^1 (X(x_0 + t(x - x_0)), x - x_0)\,\mathrm{d}t$, $x_0 = (x_{10}, \ldots, x_{n0}) \in \mathbb{D}$, are proprietatea $\mathrm{d}f = X_1\mathrm{d}x_1 + \ldots = X_n\mathrm{d}x_n$ şi deci soluţia generală a ecuaţiei (5) este definită prin $f(x) = c$.

Demonstraţie. Notăm $u_i(t) = x_{i0} + t(x_i - x_{i0})$, $i = 1, \ldots, n$, $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t))$. Rezultă

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x_k} X(u(t)),\ x - x_0\right) + X_k(u(t))\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial X}{\partial u_j}(u(t))\,\frac{\partial u_j}{\partial x_k}(t),\ x - x_0\right) + X_k(u(t))\,\mathrm{d}t =$$

$$=\int_0^1 t\left(\frac{\partial X}{\partial u_k}(u(t)),\ x-x_0\right)\mathrm{d}t+\int_0^1 X_k(u(t))\mathrm{d}t=\int_0^1 t\sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial u_k}(u(t))\,(x_i-x_{i0})\mathrm{d}t+$$

$$+\int_0^1 X_k(u(t))\mathrm{d}t=\left(\text{ținem seama că } \frac{\partial X_i}{\partial u_k}=\frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right),$$

$$=\int_0^1 t\sum_{i=1}^n \frac{\partial X_k}{\partial u_i}(u(t))\,(x_i-x_{i0})\mathrm{d}t+\int_0^1 X_k(u(t))\mathrm{d}t=\int_0^1 t\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X_k(u(t))\mathrm{d}t+$$

$$+\int_0^1 X_k(u(t))\mathrm{d}t \text{ (integrăm prin părți)},\ X_k(u(1))=X_k(x).$$

Cu aceasta teorema devine evidentă.

Ecuațiile Pfaff pentru care mulțimea $\mathbb{D}$ este conexă și simplu conexă, iar $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}(x)=\frac{\partial X_j}{\partial x_i}(x)$, $\forall\, x\in\mathbb{D}$, adică X este un cîmp potențial sau echivalent forma ω este exactă, se numesc *ecuații diferențiale exacte.*

Fie $\mathbb{D}$ o mulțime deschisă conexă și simplu conexă. Uneori există o funcție nenulă $\mu:\mathbb{D}\to\mathbb{R}$ de clasă C^1 astfel încît

$$\mu(x)X_1(x)\mathrm{d}x_1+\ldots+\mu(x)\,X_n(x)\mathrm{d}x_n=0$$

să fie o ecuație diferențială exactă. Funcția μ se numește *factor integrant* și satisface sistemul cu derivate parțiale

$$\frac{\partial(\mu X_i)}{\partial x_j}(x)=\frac{\partial(\mu X_j)}{\partial x_i}(x).$$

Ecuațiile diferențiale exacte și ecuațiile Pfaff care admit un factor integrant se numesc *ecuații complet integrabile.* Soluția unor asemenea ecuații depinde de o constantă arbitrară. Cu alte cuvinte cîmpurile vectoriale corespunzătoare unor ecuații complet integrabile admit o familie cu un parametru de hipersuprafețe ortogonale liniilor de cîmp.

O ecuație Pfaff în două variabile este complet integrabilă (vezi Cap. 1, § 6). În general, ecuația $\omega=0$ este complet integrabilă dacă și numai dacă $\omega\wedge\mathrm{d}\omega=0$ [41] (bineînțeles, se presupune că mulțimea pe care lucrăm este conexă și simplu conexă).

Presupunem că ecuația Pfaff nu este complet integrabilă, adică X nu posedă o familie cu un parametru de hipersuprafețe ortogonale liniilor de cîmp. O asemenea ecuație Pfaff definește o infinitate de curbe integrale al căror ansamblu se numește *hipersuprafață neolonomă.*

Exemplu. În $\mathbb{R}^3$, ecuațiile $\omega_1=z\mathrm{d}x-y\mathrm{d}y=0$, $\omega_2=x\mathrm{d}y-z\mathrm{d}z=0$ reprezintă respectiv suprafețe neolonome. Într-adevăr ele nu sînt complet integrabile

$$\omega_1\wedge\mathrm{d}\omega_1=-y\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z,\quad \omega_2\wedge\mathrm{d}\omega_2=-z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z.$$

Intersecția celor două suprafețe neolonome constă din soluțiile sistemului simetric (echivalent, sistem liniar cu coeficienți constanți)

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{x},$$

adică din liniile de cîmp ale lui $y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$.

Observație. Revenim la ecuația Pfaff $X_1(x)dx_1 + \ldots + X_n(x)dx_n = 0$ și presupunem $X_n(x) \neq 0$. Înlocuind pe $x_1, \ldots, x_{n-1}$ cu $u_1, \ldots, u_{n-1}$ și pe x_n cu z ecuația precedentă se poate transcrie sub forma $dz = f_1(u_1, \ldots, u_{n-1}, z)du_1 + \ldots + f_{n-1}(u_1, \ldots, u_{n-1}, z)du_{n-1}$, $f_i = \frac{X_i}{X_n}$, $i = 1, \ldots, n-1$. De aceea o ecuație Pfaff este echivalentă cu sistemul

$$\frac{\partial z}{\partial u_i} = f_i(u_1, \ldots, u_{n-1}, z), \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Dacă mulțimea $\mathbb{D}$ este deschisă, conexă și simplu conexă, atunci condițiile de complet integrabilitate ale sistemului sînt

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{\partial^2 z}{\partial u_j \partial u_i}$$

sau echivalent

$$\frac{\partial f_j}{\partial u_i} + \frac{\partial f_j}{\partial z} f_i = \frac{\partial f_i}{\partial u_j} + \frac{\partial f_i}{\partial z} f_j, \quad i, j = 1, \ldots, n-1.$$

Presupunem că există două cîmpuri scalare λ și f astfel încît $X = \lambda \operatorname{grad} f$. Dacă λ și f sînt funcțional independente, atunci cîmpul vectorial X se numește *biscalar*. Dacă λ și f sînt funcțional dependente, atunci se dovedește că X este un cîmp potențial. Discuția precedentă arată că X este un cîmp biscalar sau potențial dacă și numai dacă admite o familie cu un parametru de hipersuprafețe ortogonale liniilor de cîmp.

5.3. Teoremă. Fie $\mathbb{D}$ o mulțime deschisă, conexă și simplu conexă din $\mathbb{R}^3$ și $X = (X_1, X_2, X_3)$ un cîmp vectorial pe $\mathbb{D}$ de clasă C^1. O condiție necesară și suficientă ca X să fie biscalar, adică ecuația Pfaff $X_1(x, y, z)dx + X_2(x, y, z)dy + X_3(x, y, z)dz = 0$ să admită un factor integrant, este $(X, \operatorname{rot} X) = 0$.

Demonstrație. Fie $X = \lambda \operatorname{grad} f$. Rezultă $\operatorname{rot} X = \operatorname{grad} \lambda \times \operatorname{grad} f$ și deci $(X, \operatorname{rot} X) = 0$.

Presupunem $(X, \operatorname{rot} X) = 0$. Această relație arată că suprafețele ortogonale liniilor de cîmp ale lui X trebuie căutate printre suprafețele de cîmp ale lui $\operatorname{rot} X$ (suprafețe de vîrtej). Fie $\varphi_1(x, y, z) = c_1$, $\varphi_2(x, y, z) = c_2$ liniile de cîmp ale lui $\operatorname{rot} X$ (linii de vîrtej). Avem $(\operatorname{grad} \varphi_1, \operatorname{rot} X) = 0$, $(\operatorname{grad} \varphi_2, \operatorname{rot} X) = 0$, care împreună cu ipoteza implică „coplanaritatea" cîmpurilor vectoriale X, $\operatorname{grad} \varphi_1$, $\operatorname{grad} \varphi_2$, adică $X = \alpha \operatorname{grad} \varphi_1 + \beta \operatorname{grad} \varphi_2$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Aceasta permite transcrierea ecuației Pfaff sub forma $\alpha\, d\varphi_1 + \beta\, d\varphi_2 = 0$.

Să arătăm că $\frac{\alpha}{\beta}$, bineînțeles pentru $\beta \neq 0$, depinde numai de funcțiile φ_1 și φ_2. Într-adevăr, relațiile $X = \alpha \operatorname{grad} \varphi_1 + \beta \operatorname{grad} \varphi_2$, $(X, \operatorname{rot} X) = 0$ implică $\left(\operatorname{grad} \frac{\alpha}{\beta}, \operatorname{grad} \varphi_1 \times \operatorname{grad} \varphi_2\right) = 0$, iar acest produs mixt reprezintă Jacobianul funcțiilor $\frac{\alpha}{\beta}$, φ_1 și φ_2. Rezultă $\frac{\alpha}{\beta} = E(\varphi_1, \varphi_2)$ și deci $\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} + E(\varphi_1, \varphi_2) = 0$. Soluția generală a acestei ecuații, $\emptyset(\varphi_1, \varphi_2) = c$, reprezintă familia suprafețelor ortogonale liniilor de cîmp ale lui X. Cînd este cazul, din identitatea $X = \lambda \operatorname{grad} \emptyset$ se găsește λ.

Exemplu. $X(x, y, z) = (yz, x(z - x), -xy)$, $x > 0$, $y > 0$, este un cîmp biscalar. Într-adevăr

$$\operatorname{rot} X(x, y, z) = \left(\frac{\partial}{\partial y}(-xy) - \frac{\partial}{\partial z}(x(z-x)), \frac{\partial}{\partial z}(yz) - \frac{\partial}{\partial x}(-xy), \frac{\partial}{\partial x}(x(z-x)) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial y}(yz)\right) = (-2x, 2y, -2x)$$

și deci $(X, \operatorname{rot} X) = 0$.

Familia liniilor de vîrtej ale lui X este soluția generală a sistemului

$$\frac{dx}{-x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{-x},$$

adică $xy = c_1$, $x - z = c_2$. Rezultă

$$X(x, y, z) = \alpha \operatorname{grad}(xy) + \beta \operatorname{grad}(x - z) = \alpha(y, x, 0) + \beta(1, 0, -1)$$

și prin identificare găsim $\alpha = z - x$, $\beta = xy$, adică $X(x, y, z) = (z - x) \operatorname{grad}(xy) + xy \operatorname{grad}(x - z)$.

Ecuația $yzdx + x(z - x)dy - xydz = 0$ se transcrie $(z - x)\, d(xy) + xyd(x - z) = 0$ și deci $xy = c(x - z)$ reprezintă familia suprafețelor ortogonale liniilor de cîmp ale lui X.

Din identitatea

$$X = \lambda \operatorname{grad} \frac{xy}{x - z}$$

rezultă $\lambda = -(x - z)^2$.

§6. Probleme

1. Să se cerceteze care dintre următoarele cîmpuri vectoriale sînt complete

1) $X(x_1, x_2) = (1, 0)$, $\quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

2) $X(x_1, x_2) = (1, 0)$, $\quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

3) $X(x_1, x_2) = (-x_2, x_1), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

4) $X(x_1, x_2) = (1 + x_1^2, 0), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

2. Considerăm cîmpul vectorial definit pe $\mathbb{R}^2$ prin $X(x_1, x_2) = (1, 0)$. Pentru $t \in \mathbb{R}$ și $p \in \mathbb{R}^2$, notăm $\varphi_t(p) = \alpha_p(t)$, unde α_p este linia de cîmp maximală a lui X prin p.

1) Să se arate că $\varphi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ este bijectivă. Ce semnificație geometrică are φ_t?

2) Să se verifice relațiile

$$\varphi_0 = \mathrm{id},$$

$$\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s, \qquad \forall t, s \in \mathbb{R}$$

$$\varphi_{-t} = \varphi_t^{-1}, \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

(Rezultă că $t \to \varphi_t$ este un homorfism de la grupul aditiv al numerelor reale în grupul bijecțiilor planului).

Aceeași problemă pentru $X(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

3. Se dau cîmpurile vectoriale definite respectiv prin:

1) $\vec{V}(x, y, z) = xz\vec{i} + z(2x - y)j - x^2\vec{k}, \quad x \neq 0, \ z \neq 0$;

2) $\vec{V}(x, y, z) = x^2(y + z)\vec{i} - y^2(z + x)\vec{j} + z^2(y - x)\vec{k}, \quad xyz \neq 0$;

3) $\vec{V}(x, y, z) = xz\vec{i} + yz\vec{j} - (x^2 + y^2)\vec{k}, \quad x > 0, \ y > 0, \ z > 0$.

Să se determine familiile liniilor de cîmp.

4. Să se cerceteze stabilitatea pozițiilor de echilibru pentru

1) $x' = \sin(x + y), \ y' = e^x - 1$;

2) $x' = 1 - xy, \ y' = x - y^3$.

5. Fie $\boldsymbol{V}$ spațiul vectorial real al funcțiilor reale de clasă C^∞ pe $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3$ și fie $\mathcal{T} : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ funcția definită prin

$$\mathcal{T}(f) = \frac{\partial f}{\partial x} - (y + 2z)\frac{\partial f}{\partial y} + (3y + 4z)\frac{\partial f}{\partial z}.$$

1) Să se arate că $\mathcal{T}$ este o transformare liniară.

2) Să se determine $\operatorname{Ker} \mathcal{T}$.

3) Să se rezolve ecuația $\mathcal{T}(f) = f$.

6. Pentru fiecare dintre următoarele cîmpuri vectoriale să se determine suprafața de cîmp ce trece prin curba specificată.

1) $\vec{V}(x, y, z) = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j} + z(x^2 + y^2)\vec{k}, \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}, \ C : x^2 + y^2 = 4, \ z = 1$.

2) $\vec{V}(x, y, z) = x(1 - 2y^2)\vec{i} + y(1 + 2x^2)\vec{j} + 2z(x^2 + y^2)\vec{k}, \ \dfrac{xy}{a} > 0, \ \dfrac{z}{b} > 0, \ C : xy = a, \ z = b$.

7. Să se determine soluțiile generale ale următoarelor ecuații:

$$xy^2 \frac{\partial z}{\partial x} + x^2y \frac{\partial z}{\partial y} = z(x^2 + y^2), \ z \neq 0;$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + 3y \frac{\partial z}{\partial y} = 4\frac{y^2}{x^2}, \ x \neq 0.$$

8. Folosind metoda reţelei să se aproximeze soluţiile ecuaţiilor:

1) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y}$, $f(x, 0) = \sin \pi x$, $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, $h = k = 0{,}2$;

2) $2\dfrac{\partial f}{\partial x} - 3\dfrac{\partial f}{\partial y} = x + y$, $f(x, 0) = x(2 - x)$, $(x, y) \in [0, 2] \times [0, 2]$, $h = k = 0{,}1$;

3) $7\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = y \sin x$, $f(x, 0) = \cos x$, $(x, y) \in [0, 1] \times [0, \pi/2]$, $h = 0{,}05$; $k = 0{,}1$.

9. Să se găsească soluţiile generale ale următoarelor ecuaţii Pfaff:

1) $x_1(x_1^2 + x_2^2 - a^2)dx_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2 + a^2)dx_2 = 0$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

2) $(e^{x_1x_2} + 1)dx_1 + \dfrac{x_1x_2 - 1}{x_2^2} e^{x_1x_2} dx_2 = 0$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 - 0x_2$

3) $\sum \left[\dfrac{\ln(x_1x_2x_3)}{x_1 + x_2 + x_3} + \dfrac{1}{x_1} \right] dx_1 = 0$, $x_1, x_2, x_3 > 0$.

10. Fie $\vec{V}(x, y, z) = 2z(x\vec{i} + y\vec{j}) - (x^2 + y^2)\vec{k}$.

1) Să se determine suprafeţele ortogonale liniilor de cîmp şi să se scrie $\vec{V}$ sub forma $\vec{V} = \lambda \operatorname{grad} f$.

2) Să se găsească funcţiile φ pentru care $\vec{X}(x, y, z) = 2z(x\vec{i} + y\vec{j}) + \varphi(x, y, z)\vec{k}$ admite suprafeţe ortogonale liniilor de cîmp.

BIBLIOGRAFIE

1. J. Acher, J. Gardelle, *Algèbre linéaire et programation linéaire*, Dunod, Paris, 1970.
2. T. M. Apostol, *Calculus*, vol. II, Blaisdell Publishing Company, 1969.
3. V. I. Arnold, *Ecuații diferențiale ordinare*, Editura științifică și enciclopedică, București, 1978.
4. Gh. Atanasiu, *Geometrie diferențială*, Litografia Univ. Brașov, 1979.
5. N. Bakhvalov, *Methodes numeriques*, Editions Mir Moscou, 1976.
6. V. Boju, *Geometrie pe varietăți*, Editura Scrisul românesc, Craiova, 1978.
7. M. Berger, B. Gostiaux, *Géométrie différentielle*, Armand Colin, Paris, 1972.
8. R. M. Bowen, C. C. Wang, *Introduction to vectors and tensors*, vol. 1, 2, Plenus Press, New York, London, 1976.
9. M. Craiu, M. Roșculeț, *Ecuații diferențiale*, Editura didactică și pedagogică, București, 1971.
10. I. Creangă și colectiv, *Algebră liniară*, Editura didactică și pedagogică, 1970.
11. V. Cruceanu, *Elemente de algebră liniară și geometrie*, Editura didactică și pedagogică, 1973.
12. Gh. Dodescu, M. Toma, *Metode de calcul numeric*, Editura didactică și pedagogică, București, 1976.
13. P. Dragomir, A. Dragomir, *Structuri algebrice*, Editura Facla, 1975.
14. N. Efimov, *Formes quadratiques et matrices*, Editions Mir Moscou, 1976.
15. Gh. Galbură, F. Rado, *Geometrie*, Editura didactică și pedagogică, București, 1979.
16. Noël Gastinel, *Linear numerical analysis*, Academic Press, 1970.
17. Gh. Gheorghiev, V. Oproiu, *Varietăți diferențiale finit și infinit dimensionale*, Editura Academiei R.S.R., 1976.
18. Gh. Th. Gheorghiu, *A gebră liniară, geometrie analitică și diferențială și programare*, Editura didactică și pedagogică, București, 1977.
19. A. Halanay, *Ecuații diferențiale*, Editura didactică și pedagogică, București, 1972.
20. S. Ianuș, *Curs de geometrie diferențială*, Litografia Univ. București, 1981.
21. Ion D. Ion, R. Nicolae, *Algebră*, Editura didactică și pedagogică, București, 1981.
22. N. Jacobson, *Lectures in abstract algebra*, II. Linear algebra, Springer-Verlag, 1975.
23. M. Jurchescu, *Introducere în analiza pe varietăți*, Litografia Univ. București, 1980.
24. N. V. Kopchenova, I. Maron, *Computational mathematics*, Editions Mir, Moscou, 1975.
25. J. F. Lelong, J. M. Arnaudiés, *Equations différentielles, intégrales multiples, fonctions holomorphes*, Dunod, Paris, 1974.
26. N. Mihăileanu, *Geometrie analitică, proiectivă și diferențială*, Editura didactică și pedagogică, București, 1972.
27. C. Mihu, *Metode numerice în algebra liniară* Editura tehnică, București, 1977.
28. R. Miron, *Introducere în geometria diferențială*, Litografia Universității Iași, 1971; *Geometrie analitică*, Editura didactică și pedagogică, București, 1976.

29. I. Morris, W. Hirsch, S. Smale, *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*, Academic Press, 1974.
30. V. Obădeanu, *El. de alg. liniară şi geom. analitică*, Editura Facla, Timişoara, 1981.
31. V. Olariu, *Analiză matematică şi matematici speciale*, Litografia I.P.B., 1979–1980; *Analiză matematică*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1981.
32. V. Oproiu, *Geometrie*, Litografia Univ. Iaşi, 1980.
33. B. O'Neill, *Elementary differential geometry*, Academic Press, 1970.
34. D. I. Papuc, A. C. Albu, *Elemente de geometrie diferenţială globală*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1973.
35. L. S. Pontriaghin, *Obiknovenie diferenţialnie urovnenie*, Nauka, 1974.
36. I. P. Popescu, *Lecţii de geometrie diferenţială*, Litografia Univ. Timişoara, 1973, *Elemente de geometrie analitică*, Litografia Univ. Timişoara, I, 1978; II, 1979.
37. C. Radu, *Algebră şi geometrie*, Litografia I.P.B., 1976.
38. C. Radu, E. Cioară, *Programarea în FORTRAN, metode numerice de calcul*, Litografia IPB, 1979.
39. L. Smith, *Linear algebra*, Springer-Verlag, 1978.
40. N. Teodorescu, V. Olariu, *Ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţiale* I, II, III, Editura tehnică, Bucureşti, 1972.
41. C. Teleman, *Geometria diferenţială şi globală*, Editura Tehnică, 1974.
42. J. A. Thorpe, *Elementary Topics in differential geometry*, Springer-Verlag, 1979.
43. C. Udrişte, *Probleme de algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1972.
44. C. Udrişte, *Curbe şi suprafeţe*, Litografia I.P.B., 1975.
45. C. Udrişte, *Analiză matematică*, Litografia I.P.B., 1978.
46. C. Udrişte, C. Bucur, *Probleme de matematici şi observaţii metodologice*, Editura Facla, Timişoara, 1980.
47. C. Udrişte, E. Tănăsescu, *Minime şi maxime ale funcţiilor reale de variabile reale*, Editura tehnică, Bucureşti, 1980.
48. C. Udrişte. C. Radu, C. Dicu, O. Mălancioiu, *Probleme de algebră, geometrie şi ecuaţii diferenţiale*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1981.
49. C. Udrişte, V. Tomuleanu, *Geometrie analitică*, manual pentru clasa a XI-a, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1981.
50. V. Voievodine, *Algèbre linéaire*, Editions Mir, Moscou, 1976.
51. Gh. Gh. Vrînceanu, G. Mărgulescu, *Geometrie analitică*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1973.

Plan editură Nr. 9189
Coli de tipar; 21,75
Bun de tipar; 18.10.82

c. 625—I. P. INFORMAŢIA
Str. Brezoianu Nr. 23—25
Bucureşti